

JOSÉ KIMIO ANDO

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS COM  
COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil. Área de Concentração: Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Mauro Schulz, D.Sc.

Niterói  
2008

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da  
UFF

A552 Ando, José Kimio.

Análise da estabilidade de estruturas metálicas com comportamento não-linear / José Kimio Ando. – Niterói, RJ : [s.n.], 2008.

153 f.

Orientador: Mauro Schulz.

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal Fluminense, 2008.

1. Estrutura metálica. 2. Elemento finito. 3. Estabilidade.  
4. Engenharia Civil. 5. Análise estrutural. I. Título.

CDD 624.182

JOSÉ KIMIO ANDO

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS COM  
COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil. Área de Concentração: Engenharia Civil.

Aprovada em 28 de Maio de 2008.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Mauro Schulz, D.Sc. (Orientador)  
Universidade Federal Fluminense – UFF

---

Prof. Benjamin Ernani Diaz, Dr. Ing.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

---

Eng. Manoel Rodrigues Justino Filho, D. Sc.  
Promon Engenharia

---

Prof. Luiz Carlos Mendes, D. Sc.  
Universidade Federal Fluminense – UFF

---

Prof. Emil de Souza Sánchez Filho, D. Sc.  
Universidade Federal Fluminense – UFF

Niterói  
2008

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, projetista, financiador e construtor de todas as obras do mundo.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFF por sua preciosa colaboração na construção deste trabalho.

A meus pais por terem me dado uma base sólida sobre a qual pude erguer todas as edificações da minha vida.

Ao meu Orientador, Professor Mauro Schulz, que, pacientemente, me guiou, apoiou, incentivou e, acima de tudo, acreditou na construção da ponte que me permitiu chegar a um novo patamar de conhecimento e realização.

A minha querida esposa, Denise, por seu incentivo e colaboração, nos dias de sol escaldante e nos dias de chuva torrencial que aconteceram nesta empreitada.

## **RESUMO**

Neste trabalho propõe-se uma metodologia para analisar a estabilidade das estruturas com comportamento físico não-linear através da determinação do menor fator crítico de um carregamento aplicado. Métodos numéricos e técnicas computacionais relevantes são apresentados e revistos. As estruturas são modeladas usando-se do método dos elementos finitos. São desenvolvidos elementos de barras tridimensionais e de placas com momentos fletores e volventes. A não-linearidade geométrica é considerada através de uma formulação Lagrangeana total. Utiliza-se o método do arco cilíndrico para traçar o caminho de equilíbrio para incrementos do carregamento. A análise de instabilidade é realizada para cada incremento de carga considerando as propriedades não-lineares físicas dos materiais. O problema de autovalor, que permite identificar pontos críticos, é formulado através do método energético. Como a formulação proposta determina a variação da matriz de rigidez tangente de forma analítica, o problema de autovalor é resolvido com precisão. Avalia-se o valor esperado do menor fator de carga crítico, que corresponde ao valor efetivo quando este ocorre no próprio intervalo de carregamento. Dessa forma, o procedimento é capaz de identificar pontos limite e de bifurcação em estruturas com materiais não-lineares. A metodologia proposta é implementada na linguagem C++ e aspectos relevantes do desenvolvimento são salientados. Exemplos são apresentados e comentados.

## **ABSTRACT**

The purpose of this work is the stability analysis of structures with nonlinear physical behavior by determining the least critical load factor. Relevant numerical methods and computational techniques are presented and reviewed. The structures are modeled by the finite element method. A tridimensional beam element and a plate element with bending and torsional moments are developed. The geometric nonlinearity is considered using the total Lagrangean formulation. The cylindrical arc-length method is used to trace the equilibrium path for incremental loading. The stability analysis is carried out at every load increment taking into account the material nonlinear physical properties. The eigenvalue problem, that is formulated using the energy method, can identify critical points. As the proposed formulation attains the analytical form of the tangent stiffness matrix variation, the eigenvalues are determined with great precision. The expected least critical load factor value is evaluated and corresponds to the effective value when it is within the load increment interval. Therefore the procedure can identify limit and bifurcation points of structures with nonlinear material. The proposed methodology is implemented in C++ language and relevant features are pointed out. Examples are shown and commented on.

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS .....	3
RESUMO .....	4
ABSTRACT .....	5
SUMÁRIO.....	6
LISTA DE FIGURAS .....	9
LISTA DE TABELAS .....	11
LISTA DE ABREVIATURAS.....	12
LISTA DE SÍMBOLOS .....	13
ALFABETO GREGO .....	15
1       INTRODUÇÃO.....	16
1.1     HISTÓRICO.....	16
1.2     CONTRIBUIÇÕES AO TEMA .....	17
1.3     OBJETIVO .....	29
1.4     RELEVÂNCIA DO ASSUNTO .....	29
1.5     ESTRUTURA DO TRABALHO .....	33
2       REVISÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS.....	35
2.1     PROPRIEDADES DE MATRIZES .....	35
2.2     SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.....	36
2.2.1   Método de Gauss-Jordan .....	38
2.2.2   Decomposição de matriz .....	40
2.2.3   Comparação de métodos diretos.....	43
2.3     ARMAZENAMENTO DE MATRIZ.....	44
2.3.1   Renumeração de nós.....	47
2.3.2   Definições da teoria dos grafos .....	47
2.3.3   Algoritmo de Sloan.....	48
2.3.3.1 Montagem da Matriz de Adjacências .....	49
2.3.3.2 Determinação de Nós Pseudoperiféricos.....	51
2.3.3.3 Renumeração de nós.....	53
2.4     PROBLEMA DE AUTOVALOR .....	55
2.4.1   Revisão histórica .....	56
2.4.2   Método de Jacobi.....	58
2.4.3   Método QR .....	61
2.4.4   Método de Lanczos.....	62

3	ELEMENTO DE BARRA ESPACIAL .....	65
3.1	CINEMÁTICA .....	65
3.2	MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA .....	67
3.3	EQUAÇÃO INCREMENTAL .....	69
3.4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	70
3.5	VARIAÇÃO ANALÍTICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE.....	71
4	DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTO DE CASCA PLANA.....	73
4.1	CINEMÁTICA .....	73
4.2	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO .....	75
4.3	EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO .....	78
4.4	DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTO DE CASCA PLANA.....	79
4.5	EQUAÇÃO INCREMENTAL .....	85
4.6	VARIAÇÃO ANALÍTICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE.....	86
5	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE INSTABILIDADE.....	88
5.1	O PROBLEMA DE INSTABILIDADE.....	88
5.2	CAMINHO DE EQUILÍBRIO .....	88
5.3	ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS .....	91
5.4	ENERGIA POTENCIAL EM SISTEMAS DISCRETOS .....	93
5.5	LOCALIZAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS.....	96
5.6	CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS.....	97
5.7	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PONTO CRÍTICO USANDO DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR .....	101
5.7.1	Análise de Estabilidade de Ponto Limite.....	104
5.7.2	Análise de Estabilidade de Ponto de Bifurcação.....	104
6	RESOLUÇÃO NUMÉRICA.....	107
6.1	DESCRIÇÃO DO PROGRAMA .....	107
6.2	SELEÇÃO DA LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO.....	108
6.3	FLUXOGRAMA DO PROGRAMA .....	110
7	APLICAÇÕES DA METODOLOGIA .....	113
7.1	DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DE FORÇA DE FLAMBAGEM DE COLUNA.. .....	113
7.2	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE COLUNA EM COMPRESSÃO AXIAL COM MATERIAL LINEAR.....	116
7.3	COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO AÇO INOXIDÁVEL.....	118
7.4	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE COLUNA EM COMPRESSÃO AXIAL COM MATERIAL NÃO-LINEAR.....	119
7.5	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE PÓRTICO SUBMETIDO A FORÇAS VERTICAIS .....	121
7.6	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE TRELIÇA .....	122
7.7	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ARCO TRELIÇADO .....	125
7.8	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE DOMO TRIDIMENSIONAL.....	126
7.9	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE DOMO HEMISFÉRICO SCHWEDLER..	129
7.10	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE DOMO HEMISFÉRICO GITTERKUPPEL... .....	132
7.11	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE PLACA QUADRADA EM COMPRESSÃO . .....	135
7.12	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE PLACA RETANGULAR EM COMPRESSÃO .....	139
7.13	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ARCO PARABÓLICO .....	140

7.14	LAMBAGEM AXISSIMÉTRICA DE TUBO CIRCULAR .....	141
7.15	FLAMBAGEM LOCAL DE TUBO QUADRADO .....	142
7.16	OBSERVAÇÕES .....	144
8	CONCLUSÕES .....	147
	REFERENCIAS .....	150
	OBRAS CITADAS .....	150
	OBRAS CONSULTADAS .....	152

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ponte de Cala Galdana em Menorca, Espanha.....	30
Figura 1.2 – Viaduto de Millau na França (vista aérea).....	30
Figura 1.3 – Viaduto de Millau na França.....	31
Figura 1.4 – Estação de TGV de Liège Guillemins, Bélgica. ....	31
Figura 1.5– Centro olímpico de natação em Beijing, China (durante a construção).....	32
Figura 1.6– Centro olímpico de natação em Beijing, China (após inauguração).....	32
Figura 2.1 – Porcentagem de armazenamento de matrizes simétricas. ....	44
Figura 2.2 – Acréscimo de termos não-nulos na decomposição de Cholesky sem rearranjo...45	
Figura 2.3 – Acréscimo de termos não-nulos na decomposição de Cholesky após rearranjo..45	
Figura 2.4 – Exemplo de grafo dirigido. ....	47
Figura 2.5 – Exemplo de grafo simétrico. ....	48
Figura 2.6 – Malha de nós de uma estrutura.....	49
Figura 2.7 – Grafo para a estrutura da Figura 2.6 composta de elementos quadrangulares.....	50
Figura 2.8 – Graus dos nós. ....	51
Figura 2.9 – Estrutura de nó inicial. ....	51
Figura 2.10 – Estrutura de nó final. ....	52
Figura 2.11 – Nó inicial e nó final.....	52
Figura 2.12 – Distância de cada nó até o nó final.....	53
Figura 2.13 – Prioridade de nós.....	54
Figura 2.14 – Indicação de situação dos nós. ....	54
Figura 2.15 – Atualização de prioridades.....	54
Figura 2.16 – Atualização de situação após renumeração do nó inicial.....	55
Figura 2.17 – Atualização de prioridades após renumeração do nó inicial.....	55
Figura 3.1 – Seção transversal de elemento de barra. ....	65
Figura 3.2 – Elemento finito de barra.....	70
Figura 4.1 – Deslocamentos em elemento de casca plana.....	74
Figura 4.2 – Numeração dos nós do elemento de casca plana. ....	79
Figura 4.3 – Eixos da borda 1-2 do elemento de casca plana.....	80
Figura 4.4 – Rotações no elemento de casca plana. ....	82
Figura 5.1 – Caminho de equilíbrio.....	89
Figura 5.2 – Pontos críticos (adaptado de FELIPPA, 2001, p. 5-4).....	98
Figura 5.3 – Bifurcação simétrica estável. ....	99
Figura 5.4 – Bifurcação simétrica instável.....	100
Figura 5.5 – Bifurcação assimétrica (adaptado de FALZON e HITCHINGS, 2006, p.17)...100	
Figura 5.6 –Trelça de Roorda ( <i>apud</i> FALZON e HITCHINGS, 2006, p.17).....	101
Figura 6.1 – Fluxograma do programa. ....	112
Figura 7.1 – Barra bi-apoiada comprimida.....	114
Figura 7.2 – Coluna em compressão axial.....	117

Figura 7.3 – Curva tensão-deformação específica para o aço inoxidável. ....	118
Figura 7.4 – Correlação polinomial entre fator de carga e índice de esbeltez.....	120
Figura 7.5 – Coluna: convergência do caso 2c.....	120
Figura 7.6 – Pórtico contraventado: modos de instabilidade. ....	121
Figura 7.7 – Pórtico: deslocamento vertical do nó de aplicação da força. ....	122
Figura 7.8 – Pórtico: convergência da força crítica.....	122
Figura 7.9 – Treliça para primeira condição de restrição nodal .....	123
Figura 7.10 – Método do comprimento de arco para primeira condição de restrição nodal. .	123
Figura 7.11 – Treliça para segunda condição de restrição nodal.....	124
Figura 7.12 – Método do comprimento de arco para segunda condição de restrição nodal. .	124
Figura 7.13 – Arco treliçado (adaptado de CRISFIELD, 1997).....	125
Figura 7.14 – Arco treliçado: convergência da força crítica. ....	126
Figura 7.15 – Arco treliçado: modo de instabilidade. ....	126
Figura 7.16 – Vista superior de domo tridimensional .....	127
Figura 7.17 – Vista lateral e em perspectiva de domo tridimensional .....	127
Figura 7.18 – Domo tridimensional: convergência do fator crítico de força. ....	128
Figura 7.19 – Domo tridimensional: modo de instabilidade. ....	129
Figura 7.20 – Domo hemisférico Schwedler discretizado por elementos finitos (adaptado de ALVES, 1995). ....	130
Figura 7.21 – Domo hemisférico Schwedler: convergência do fator crítico de força.....	131
Figura 7.22 – Domo hemisférico Schwedler: modo de instabilidade.....	132
Figura 7.23 – Domo hemisférico Gitterkuppel.....	133
Figura 7.24 – Domo hemisférico Gitterkuppel: convergência do fator crítico de força. ....	133
Figura 7.25 – Domo hemisférico Gitterkuppel: modo de instabilidade. ....	134
Figura 7.26 – Carregamento e restrições de placa.....	136
Figura 7.27 – Diferença percentual dos resultados vs. número de elementos de discretização. ....	138
Figura 7.28 – Placa quadrada: modo de instabilidade.....	138
Figura 7.29 – Placa retangular: modo de instabilidade. ....	140
Figura 7.30 – Arco parabólico: modo de instabilidade. ....	140
Figura 7.31 – Flambagem axissimétrica de tubo circular.....	142
Figura 7.32 – Diferença percentual vs. número de elementos de discretização.....	144
Figura 7.33 – Flambagem local de tubo quadrado. ....	144

## LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Dados da coluna em compressão axial. ....	117
Tabela 7.2 – Força crítica de coluna. ....	117
Tabela 7.3 – Resultados obtidos. ....	119
Tabela 7.4– Dados do arco treliçado. ....	125
Tabela 7.5 – Dados do domo tridimensional. ....	128
Tabela 7.6 – Domo hemisférico Schwedler: dados da discretização. ....	130
Tabela 7.7 – Domo hemisférico Schwedler: comparação de resultados. ....	131
Tabela 7.8 - Domo hemisférico Gitterkuppel: comparação de resultados. ....	135
Tabela 7.9 - Comparação entre domo Gitterkuppel e domo Schwedler. ....	135
Tabela 7.10 – Dados da placa quadrada. ....	136
Tabela 7.11 – Resultados para a placa quadrada com $n = 0$ . ....	137
Tabela 7.12 – Resultados para a placa quadrada com $n = 0,3$ . ....	137
Tabela 7.13 – Dados da placa retangular. ....	139
Tabela 7.14 – Placa retangular: comparação de resultados. ....	139
Tabela 7.15 – Flambagem axissimétrica: comparação de resultados. ....	142
1,029 . ....	142
Tabela 7.16 – Flambagem local de tubo quadrado: comparação de resultados. ....	143

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

(em ordem alfabética)

CAD	Projeto assistido por computador
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCN	Catálogo Coletivo Nacional
DM	Dissertação de Mestrado
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
SciELO	Scientific Electronic Library Online
TD	Tese de Doutorado
TGV	Trem de alta velocidade
UFF	Universidade Federal Fluminense
USP	Universidade de São Paulo

## LISTA DE SÍMBOLOS

(em ordem alfabética)

	Letras romanas minúsculas
$\det$	determinante
$dV$	elemento infinitesimal de volume
$f_{,x}$	derivada de primeira ordem da função $f$ em relação a $x$
$f_{,xx}$	derivada de segunda ordem da função $f$ em relação a $x$
$k_{ij}$	elemento da linha $i$ e coluna $j$ da matriz $\mathbf{K}$
$\mathbf{p}$	vetor de posição
$r_y$	rotação em torno do eixo $y$
$u_i$	elemento $i$ do vetor $\mathbf{U}$
$u$	deslocamento nodal na direção $x$
$\mathbf{u}$	vetor de deslocamentos nodais
$v$	deslocamento nodal na direção $y$
$w$	deslocamento nodal na direção $z$
$\mathbf{b}$	matriz de interpolação
	Letras romanas maiúsculas
$A$	área
$\mathbf{B}$	matriz de interpolação
$\mathbf{D}$	matriz diagonal
$E$	módulo de elasticidade
$\mathbf{E}$	matriz constitutiva
$\mathbf{F}$	vetor de forças externas nodais
$GJ_{sv}$	módulo tangente de rigidez à torção de Saint-Venant
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\mathbf{K}^T$	matriz transposta da matriz $\mathbf{K}$
$\mathbf{L}$	matriz triangular inferior
$L$	comprimento
$M_y, M_z$	momentos fletores
$N_x$	esforço normal
$\mathbf{N}_\alpha$	vetor de interpolação do deslocamento $\alpha$
$\mathbf{U}$	matriz triangular superior
$S$	indicação de simetria de matriz
$\mathbf{S}$	vetor de esforços internos generalizados

$T_{sv}$  momento de torção de Saint-Venant  
 $V$  volume

Letras gregas minúsculas

$\delta x$  variação de  $x$   
 $\varepsilon$  deformação  
 $\boldsymbol{\varepsilon}$  vetor de deformações  
 $\zeta$  deslocamento na origem da seção transversal na direção  $x$   
 $\eta$  deslocamento na direção  $z$   
 $\lambda$  fator de carga  
 $\boldsymbol{\sigma}$  vetor de tensões  
 $\sigma$  tensão normal  
 $\theta$  ângulo de rotação  
 $\boldsymbol{\varphi}$  autovetor  
 $\chi$  autovalor

Letras gregas maiúsculas

$\Lambda$  matriz diagonal de autovalores  
 $\Phi$  matriz de autovetores

## ALFABETO GREGO

Nome grego	Caracteres gregos	
	Minúsculas	Maiúsculas
Alfa	$\alpha$	A
Beta	$\beta$	B
Gama	$\gamma$	Γ
Delta	$\delta$	Δ
Épsilon	$\epsilon$	E
Zeta	$\zeta$	Z
Eta	$\eta$	H
Teta	$\theta$	Θ
Iota	$\iota$	I
Capa	$\kappa$	K
Lâmbda	$\lambda$	Λ
Mü	$\mu$	M
Nü	$\nu$	N
Csi	$\xi$	Ξ
Ômicron	$\omicron$	O
Pi	$\pi$	Π
Ro	$\rho$	P
Sigma	$\sigma$	Σ
Tau	$\tau$	T
Üpsilon	$\upsilon$	Υ
Fi	$\phi$	Φ
Chi	$\chi$	X
Psi	$\psi$	Ψ
Ômega	$\omega$	Ω

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 HISTÓRICO

FRUCHTTENGARTEN (2005) apresenta um breve histórico do estudo da flambagem. Os estudos sobre o tema iniciam-se no século XVIII. Os primeiros estudos sobre o fenômeno da flambagem são atribuídos a Euler, que em 1759 elaborou um modelo analítico linear elástico para uma viga comprimida.

SCHULZ e REIS (2003) citam que o estudo da resposta não-linear geométrica também recebe a atenção dos pesquisadores há vários séculos. Bernoulli (1654-1705) e Euler (1707-1783), por exemplo, não limitaram seus estudos aos pequenos deslocamentos. Após o início do século XIX Navier (1785-1836) consolidou a teoria de viga para pequenos deslocamentos, e o uso da aproximação linear passou ser mais estudado.

As pesquisas iniciais não se limitaram ao campo teórico, pois diversos ensaios sobre flambagem foram elaborados. Fairbairn em 1854 conduziu pesquisas empíricas relacionadas à flambagem lateral de vigas. Burr em 1884, Marburg em 1909 e Moore em 1910 realizaram ensaios para confirmar a relação entre a resistência ao momento fletor e o índice de esbeltez da aba comprimida de uma viga.

Em 1899 Prandtl e Michell formularam as equações diferenciais que regem a flambagem de vigas de seção transversal retangular em regime elástico. Por volta de 1910 Timoshenko estende esse estudo, incluindo o empenamento em vigas de seção I.

Vlasov em 1936, Bleich em 1952 e Timoshenko em 1953 fazem importantes contribuições à teoria de flambagem lateral de vigas.

Soluções numéricas, obtidas por cálculo manual, são apresentadas por Winter em 1943, Massonet em 1947, Flint em 1951, Poley em 1954, Salvadori em 1955 e Austin em 1955. No entanto, a necessidade de extensos cálculos limita a obtenção de resultados práticos.

A partir da década de 1960 soluções mais acuradas são obtidas com o advento da computação e a utilização de métodos numéricos adequados. Em 1970 Barsoum e Galagher

propõem a utilização do método de elementos finitos para a análise da flambagem por flexo-torção.

Elementos finitos tridimensionais para análise não-linear também são desenvolvidos desde o início dos anos 1960. Progresso significativo foi atingido por Bathe e Bolourchi (1979), que implementaram os métodos incrementais utilizando formulação Lagrangeana Total e formulação Lagrangeana Atualizada.

No caso mais geral a análise não-linear pode envolver, além de grandes deslocamentos, grandes deformações e grandes rotações. Simo e Vu-Quoc (1986) desenvolvem um elemento finito tridimensional para rotações finitas baseado na formulação Lagrangeana Total.

Em 1969 a formulação co-rotacional para elementos finitos é apresentada por Wempner. Belytschko (1973) e Argyris (1982), entre outros, aperfeiçoam essa técnica. Grandes rotações são tratadas com uma formulação co-rotacional por CRISFIELD (1991 p.211).

A pesquisa sobre o tema prossegue intensamente nos dias atuais. Uma consulta realizada em 22/set/2006 no sítio [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com) listou 142 trabalhos publicados, apenas no ano de 2006, que tratam simultaneamente de flambagem e elementos finitos.

## 1.2 CONTRIBUIÇÕES AO TEMA

As contribuições ao tema são em grande número e remontam à época de Euler (1785). Buscando-se a situação das publicações sobre o tema foram pesquisadas as seguintes bases de dados:

- a) Biblioteca do Centro Tecnológico da UFF;
- b) Biblioteca da PUC-Rio;
- c) Banco de teses e dissertações da CAPES;
- d) IBICT – CCN;
- e) SciELO;
- f) Periódicos da CAPES.

A Tabela 1.1 apresenta os quantitativos de teses e dissertações referentes ao assunto flambagem obtidos no banco de dados da CAPES até junho de 2006. De um quantitativo de 97 trabalhos verifica-se que 37% estão relacionados à análise não-linear.

Tabela 1.1 – Levantamento de teses e dissertações no banco de dados da CAPES.

Palavra chave	Dissertações de Mestrado (DM)	Teses de Doutorado (TD)
Flambagem	77	20
Flambagem não-linear:	29	7

A Tabela 1.2 lista as teses de doutorado por ordem cronológica, e a Tabela 1.3 lista as dissertações de mestrado obtidas nesse levantamento.

Tabela 1.2 – Lista de teses de doutorado relacionadas à flambagem

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
1.	Luiz Tarcisio Souza	Um sistema para análise incremental estática e dinâmica de cascas em processo de flambagem com computação gráfica interativa	01/01/1991	TD	NÃO-LINEAR
2.	Francisco Carlos Rodrigues	Estudo teórico-experimental de perfis de chapa dobrada submetidos a compressão	01/02/1993	TD	NÃO-LINEAR
3.	Nelson Dos Santos Gomes	Pilares mistos tubulares de aço e concreto	01/09/1994	TD	
4.	Severino P. Cavalcanti Marques	Um modelo numérico para análise de estruturas de materiais compostos considerando efeitos viscoelásticos e falhas progressivas	01/04/1994	TD	NÃO-LINEAR
5.	Joao Alberto Venegas Requena	Carregamento crítico de instabilidade geral de pilares de seção composta variável, de edifícios industriais metálicos	01/10/1995	TD	
6.	Paulo Shigueme Ide	Análise de vibrações livres em torno de configurações deformadas em placas comportamento geometricamente não-linear pelo método dos elementos finitos	01/12/1995	TD	NÃO-LINEAR

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
7.	Arlene Maria Sarmanho Freitas	Análise do comportamento e da resistência de estruturas metálicas treliçadas sujeitas a interação entre modos de flambagem	01/07/1996	TD	
8.	Luis Eustáquio Moreira	Aspectos singulares das treliças de bambu: flambagem e conexões	01/04/1998	TD	
9.	Osvaldo Casares Pinto	Controle ativo das vibrações não-lineares de estruturas flexíveis	01/08/1999	TD	NÃO-LINEAR
10.	Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado	Acoplamento e interação modal na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas	01/05/2001	TD	NÃO-LINEAR
11.	Roberto Ramos Jr	Modelos analíticos no estudo do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais	01/12/2001	TD	
12.	Airton Nabarrete	A three layer quasi 3d finite element model for structural analyses of sandwich plates	01/05/2002	TD	
13.	Elaine Garrido Vazquez	Análise teórica e experimental da instabilidade torcional de perfis formados a frio sob compressão centrada	01/05/2002	TD	
14.	Marcelo Augusto Leal Alves	Um modelo pra análise da instabilidade dos reforçadores no processo de fabricação de tubos estruturados	01/09/2002	TD	
15.	Norman Adrian Millan Neumann	Elementos de cascas aplicados a materiais compósitos	01/12/2002	TD	
16.	Koji De Jesus Nagahama	Análise de estabilidade local em perfis de seção aberta em aço e resina reforçada com fibra de vidro	01/02/2003	TD	NÃO-LINEAR
17.	Santiago Venancio Sanchez Perez	Análise experimental da flambagem distorcional em perfis de paredes finas e seção aberta, sob força de compressão excêntrica	01/05/2003	TD	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
18.	Humberto Correia Lima Junior	Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado, submetidos a flexo-compressão reta com e sem adição de fibras metálicas	01/07/2003	TD	
19.	Elaine Toscano Fonseca	Comportamento de vigas de aço sujeitas a cargas concentradas através de técnicas de inteligência computacional	01/09/2003	TD	
20.	Mauro Jacinto Pastor Braga	Instabilidade de armaduras de tração de linhas flexíveis	01/09/2003	TD	

(banco de teses e dissertações da CAPES).

Tabela 1.3 – Lista de dissertações de mestrado do relacionadas a flambagem

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
1.	Juan Angel Ronda Vasquez	Estudo comparativo de matrizes geométricas para análise da estabilidade de pórticos espaciais	01/11/1987	DM	
2.	Catia C. Bandeira de Figueiredo	Um modelo matemático para estabilidade elástica de cascas cilíndricas enrijecidas	01/06/1988	DM	
3.	Donald Mark Santee	Estudo do acoplamento modal, da quebra de simetria e das distribuições de energia na perda de estabilidade de cascas cilíndricas sob a ação de cargas combinadas	01/09/1988	DM	
4.	Lea Mara Benatti Assaid	Técnicas para a determinação de cargas de flambagem a partir das frequências naturais de vibração	01/06/1989	DM	
5.	Sandro Borges de Almeida	Instabilidade de estruturas metálicas planas compostas de perfis de chapa dobrada	01/12/1989	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
6.	Expedito Baracho Junior	Desenvolvimento e teste de uma tesoura de madeira com barras duplas e chapas-prego, para telhados	01/02/1990	DM	
7.	Jose Mauro da Costa Martins	Verificação de um método prático para dimensionamento de colunas de concreto armado submetidas a flexão composta oblíqua	01/12/1990	DM	
8.	Kennedy Diniz do Nascimento	Análise e síntese de placas sanduíche reforçadas	01/10/1990	DM	
9.	Lilian Dutra Giannini	Modelo de elementos finitos para estabilidade de perfis de paredes finas	01/09/1990	DM	
10.	Ricardo Azoubel da Mota Silveira	Análise não-linear geométrica de cascas cilíndricas isotrópicas e enrijecidas	01/01/1990	DM	NÃO-LINEAR
11.	Sergio Luiz Millon Junior	Técnicas gráficas e computacionais para a análise de oscilações não-lineares e caos em sistemas estruturais suscetíveis a flambagem	01/06/1991	DM	
12.	Renato Silva Bernardes	Dimensionamento a flambagem de pilares de concreto armado submetidos a flexão composta reta	01/12/1991	DM	
13.	Alberto Vilela Chaer	Modelo de elementos finitos para flambagem de estruturas espaciais de concreto armado	01/02/1991	DM	
14.	Eliane Regina Flores de Oliveira	Determinação da capacidade máxima de placas cisalhadas	01/12/1991	DM	
15.	Edmundo Queiroz De Andrade	Instabilidade e vibrações de colunas esbeltas sobre base elástica	01/06/1993	DM	
16.	Geraldo Donizetti de Paula	Alguns aspectos da fundamentação teórica e dimensionamento de elementos comprimidos de aço	01/03/1994	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
17.	João Chafi Hallack	Estudo comparativo de modelos para análise de estabilidade de vigas curvas	01/09/1994	DM	
18.	Marcos Mendes de Oliveira Pinto	Análise experimental do fenômeno de "steady tilt" sob enfoque da teoria de bifurcação dos sistemas dinâmicos	01/06/1994	DM	
19.	Ricardo Alfonso Armijos Galarza	Avaliação e padronização de pórticos treliçados leves para edificações industriais	01/09/1995	DM	
20.	Evandro Parente Junior	Otimização de estruturas sujeitas a instabilidade global: aplicação a treliças planas	01/04/1995	DM	
21.	Adão Roberto Rodrigues Villaverde	Análise não-linear física e geométrica de barras de seção aberta	01/05/1995	DM	NÃO-LINEAR
22.	Rouerson Pereira da Silva	Determinação da concentração de tensões em furos circulares de placas cisalhadas	01/07/1995	DM	
23.	Ronaldo Silveira de Souza	Flambagem local de vigas de aço sujeitas a cargas concentradas	01/12/1995	DM	
24.	Marcus Thompsen Primo	O efeito dos apoios elásticos em barras longas de seção delgada aberta	01/03/1996	DM	
25.	Ana Lydia Fernandes Dos Reis	O método da energia aplicado à flambagem lateral com torção de vigas de aço	01/08/1996	DM	
26.	Aécio Pereira Cardoso	Estudo da resistência de colunas curtas de perfis tipo rack	01/09/1996	DM	
27.	Roberval José Pimenta	Proposição de uma curva de flambagem para perfis I soldados formados por chapas cortadas a maçarico	01/04/1997	DM	
28.	Lúcio de Camargo Fortes	Análise e ensaios de painéis laminados de grafita/epóxi em pós flambagem	01/06/1997	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
29.	Juliano Casarin Ozores	Análise de estabilidade estática de cascas achatadas de dupla curvatura em materiais isotrópicos, utilizando modelo de elementos finitos	01/10/1997	DM	
30.	Sérgio José Priori Jovino Marques	Comportamento Estrutural Não Linear Geométrico de Edifícios em Concreto Armado em Laje Cogumelo	01/11/1997	DM	
31.	Elaine Garrido Vazquez	Estabilidade e resistência de perfis de chapa dobrada afetados pelo modo distorcional	01/02/1998	DM	
32.	Luciano Jorge de Andrade Jr	Análise estrutural das chapas metálicas de silos e de reservatórios cilíndricos	01/05/1998	DM	
33.	Janes Cleiton Alves de Oliveira	Estimativa do índice global de esbeltez de edifícios altos de concreto armado	01/05/1998	DM	
34.	Joelma Magalhães Braga	Estudo de estacas metálicas submetidas à esforços laterais em argilas moles	01/10/1998	DM	
35.	Willian Mota Baldoíno	Simulação numérica do comportamento mecânico de uma barra de material composto: análise estática e de estabilidade	01/11/1998	DM	
36.	Clodoaldo Cesar Malheiros Ferreira	Análise não-linear em pilares de pontes em concreto armado com vãos biapoiados	01/12/1998	DM	NÃO-LINEAR
37.	Branca Freitas de Oliveira	Programa computacional para modelagem de cascas de materiais compostos com análise acoplada de viscoelasticidade e falhas progressivas	01/02/1999	DM	
38.	Kepler Cavalcante Silva	Análise Experimental de Barras Comprimidas de Estruturas Metálicas Espaciais	01/02/1999	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
39.	Romel Dias Vanderlei	Análise experimental de pilares de concreto armado de alta resistência sob flexo compressão reta	01/03/1999	DM	
40.	Frederico Guilherme de Freitas Bueno	Estudo de perfis u simples de chapa dobrada submetidos a compressão excêntrica	01/03/1999	DM	
41.	Silvana de Nardin	Estudo teórico-experimental de pilares mistos compostos por tubos de aço preenchidos com concreto de alta resistência	01/03/1999	DM	
42.	Stefane Rodrigues Xavier	Influência da Interação Modal na Instabilidade de Placas	01/04/1999	DM	
43.	Walter Menezes Guimarães Júnior	Avaliação do Efeito das Imperfeições sobre a Flambagem de Estruturas sob a Ação de Cargas Dependentes dos Deslocamentos	01/04/1999	DM	
44.	Patricia Cristina Silva Costa Santana	Curva de Flambagem para Perfis "S" Formados a Frio	01/05/1999	DM	
45.	Christovão Pereira Abrahão	Efeito da redução da área colada no comportamento mecânico de vigas e de colunas de madeira laminada de eucalyptus grandis -	01/09/1999	DM	
46.	Tiago Guizzo	Laços de Histerese Elastoplásticos Gerados sob Carregamentos Complexos	02/09/1999	DM	NÃO-LINEAR
47.	Leonardo Vilain João	Estimativa da resistência última de colunas avariadas de plataformas semi-submersíveis	01/10/1999	DM	
48.	Luiz Antonio De Souza	Flambagem Lateral com Torção de Vigas de Aço em Regime Elasto-Plástico	01/10/1999	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
49.	Wagner Luiz de Mello	Análise de pórticos metálicos planos com conexões semi-rígidas considerando a não-linearidade física e geométrica	01/11/1999	DM	
50.	Fernando Marcus da Rocha Cerqueira	Elementos multicamadas para laminados	01/03/2000	DM	
51.	Jimmu de Azevedo Ikeda	Análise de Segunda Ordem Geométrica (Flambagem) de Pórticos Planos e Comparações com Normas de Concreto Armado	01/05/2000	DM	
52.	Alexandre da Silva Severo Júnior	Análise experimental de perfis de paredes esbeltas com enrijecedor intermediário	01/10/2000	DM	
53.	Andre Luiz de Lucas Verri Nunes	Análise da flambagem por cisalhamento de placas laminadas na presença de tensões térmicas	01/11/2000	DM	
54.	Carlos Eduardo Marcos Guilherme	Otimização topológica de pórticos e treliças com restrições de flexibilidade e flambagem	01/12/2000	DM	
55.	Carlos Eduardo Pereira	Pilares de Concreto: Análise do Comportamento do Estribo Suplementar	01/02/2001	DM	
56.	Daniel Leonardo Braga Rodriguez Jurjo	Estabilidade de colunas sujeitas ao peso próprio	01/04/2001	DM	
57.	Aleide Waleska Alves de Carvalho	Influência de falhas locais na resposta pós-crítica de estruturas treliçadas	01/06/2001	DM	
58.	Flavia Caetano Carvalhar	Determinação experimental da carga de flambagem e da excentricidade accidental de pilares compostos de madeira	01/07/2001	DM	
59.	José Anchieta Júnior	Análise Não-Linear Geométrica e Material de Torres de Transmissão	01/10/2001	DM	NÃO-LINEAR

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
60.	Germano Gavarrao Freitas	Modelagem paramétrica de compostas hidráulicas: análise de tensões e estabilidade estrutural	01/12/2001	DM	
61.	Rafael Familiar Solano	Flambagem Térmica de Um Sistema Pipe-in-Pipe Dual em Águas Profundas	01/03/2001	DM	
62.	Maurício Carmo Antunes	Comprimento efetivo de colunas de aço em pórticos deslocáveis	01/09/2001	DM	
63.	Patrícia Reis Vitória	Flambagem Local de Dutos Sujeitos a Carregamentos Combinados	01/09/2001	DM	
64.	Rafael Carreiro Carletti	Modelo para Análise da Estabilidade de Dutos em Meio Elástico	01/09/2001	DM	
65.	Márcio Andrade da Silva	Flambagem de perfis de aço de paredes delgadas e seção aberta	01/12/2001	DM	
66.	Marco Antonio Maddalena	Restabelecimento da Resistência Limite Compressiva de Colunas Avariadas de Plataformas Semi-Submersíveis	01/12/2001	DM	
67.	Rogério Mitsuo dos Santos	Análise de estruturas metálicas reticuladas planas considerando a não-linearidade física em sistemas não-conservativos	01/02/2002	DM	NÃO-LINEAR
68.	Carlúcio Magno de Holanda Macêdo	Otimização de treliças planas sob várias solicitações com ênfase a problemas multiobjetivos	01/07/2002	DM	
69.	Anderson Pereira	Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem	01/08/2002	DM	
70.	Martha Lissette Sanchez Cruz	Caracterização Física e Mecânica de Colmos Inteiros do Bambu da Espécie Phyllostachys Aurea: Comportamento à Flambagem	01/08/2002	DM	
71.	Silvia dos Santos Pereira	Análise do Comportamento e da Resistência de Pilares de Aço Eletrossoldados	01/09/2002	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
72.	Warley Soares Santos	Interação flambagem global - flambagem local em pilares metálicos de seção I duplamente simétricos sob compressão uniforme	01/09/2002	DM	NÃO-LINEAR
73.	Antônio Carlos Viana Silva	Estudo comparativo e crítico entre normas de projeto de estruturas de aço de edifício de edifício	01/09/2002	DM	
74.	Andre Luiz Lupinacci Massa	Contribuição ao estudo de flambagem em dutos rígidos submarinos conduzindo fluidos aquecidos	01/03/2003	DM	NÃO-LINEAR
75.	Arcadio Angst	Estudo crítico das metodologias de cálculos para perfis dobrados a frio de vigas tipo canal sem enrijecedores de borda	01/03/2003	DM	
76.	Gustavo Monteiro de Barros Chodraui	Flambagem por distorção da seção transversal em perfis de aço formados a frio submetidos à compressão centrada e à flexão	01/04/2003	DM	NÃO-LINEAR
77.	Aurélio de Lima e Silva	Estudo do comportamento estrutural do sistema telha-terça	01/06/2003	DM	
78.	Adriana Fátima Tonidandel Andrade	Uma contribuição ao estudo da resistência ao fogo de pilares de aço parcialmente protegidos	01/07/2003	DM	
79.	Daniela Lemes David	Vigas mistas com laje treliçada e perfis formados a frio: análise do comportamento estrutural	01/07/2003	DM	
80.	Dary Lottmar Kayser Junior	Análise dinâmica de linhas flexíveis com elemento de pórtico não-linear geométrico híbrido	01/07/2003	DM	NÃO-LINEAR
81.	Fabiana Freitas Nogueira	Estudo experimental do comportamento de pilares mistos sujeitos a flexo-compressão	01/08/2003	DM	

	AUTOR	TÍTULO	DATA	TIPO	OBSERVAÇÃO
82.	Daniela Lobo Francisco	Deformações reológicas de estacas esbeltas em solos argilosos	01/09/2003	DM	
83.	Antonio Alberto Almeida	Estabilidade de cascas laminadas cilíndricas circulares	01/12/2003	DM	NÃO-LINEAR
84.	Claussius Pimentel	Análise da flambagem de painéis enrijecidos solicitados por carregamento axial uniformemente distribuídos	01/12/2003	DM	NÃO-LINEAR

Tabela 1.3 – Lista de dissertações de mestrado do relacionadas a flambagem (banco de teses e dissertações da CAPES).

A Tabela 1.4 apresenta alguns trabalhos de pesquisa datados da década de 1980, que mostram que o assunto tem sido pesquisado no Brasil por mais de 25 anos.

Tabela 1.4 – Trabalhos da década de 1980 relacionadas a instabilidade

AUTOR	TÍTULO	DATA
Ricardo Coscarelli Antonini	Influencia da interação entre modos e imperfeições na flambagem de cascas cilíndricas axialmente comprimidas	1981
Renato Bertolino Junior	Bifurcação secundária instável em placas retangulares	1984
Ricardo Coscarelli Antonini	Uma formulação discretizada da teoria da estabilidade elástica para análise estrutural via elementos finitos	1986
Luiz Fernando Taborda Garcia	Contribuição ao estudo da flexão de barras com forte não linearidade geométrica	1987
Ricardo Valeriano Alves	Análise modal assintótica da estabilidade de estruturas reticuladas espaciais	1989
Sandro Borges de Almeida	Instabilidade de estruturas metálicas planas compostas de perfis de chapa dobrada	1989

Da mesma forma que a lista de teses e dissertações mostrada, a lista de trabalhos internacionais sobre esse assunto é bastante extensa, indicando a grande importância que é dispensada à pesquisa do tema tanto em âmbito nacional quanto internacional.

### 1.3 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar uma metodologia que avalie a estabilidade de uma estrutura modelada por elementos finitos, determinando-se numericamente o menor fator crítico relativo ao carregamento aplicado. Nesta metodologia considera-se a influência tanto da não-linearidade geométrica quanto da não-linearidade física nos elementos de discretização.

### 1.4 RELEVÂNCIA DO ASSUNTO

BAZANT (2003, p.xxi) destaca a relevância do assunto logo no início de seu trabalho, ao salientar que “*falhas de muitas estruturas de engenharia caem em uma das duas simples categorias: (1) falha de material e (2) instabilidade estrutural*”. Acrescenta que, normalmente, as falhas de material são adequadamente estimadas com conhecimentos básicos de mecânica e resistência dos materiais, sem a necessidade de identificar a deformação da estrutura. Ao contrário, a previsão de falha por instabilidade estrutural requer a formulação de equações de equilíbrio com base em deformações que não são antecipadamente conhecidas.

Por sua vez, GONÇALVES e CAMOTIM (2004, p. 1473) citam que tem ocorrido um aumento na utilização de aço inoxidável e alumínio em estruturas. Esse aumento ocorre em função de distintos aspectos desses materiais, como a alta relação resistência/peso, resistência à corrosão, aspectos estéticos, facilidade de manutenção e versatilidade de fabricação.

De acordo com esses autores a busca de menores custos aliada às exigências estéticas leva a projetos estruturais com elementos esbeltos e de paredes finas. Como esses elementos são muito susceptíveis à flambagem local e global, esses projetos devem analisar os fenômenos de instabilidade que podem ocorrer nessas estruturas.

Alguns exemplos de obras com essas características são:

a) a ponte de Cala Galdana em Menorca, Espanha, construída em 2005 com 45 m de vão em aço inoxidável (Figura 1.1);



Figura 1.1 – Ponte de Cala Galdana em Menorca, Espanha.

b) o viaduto de Millau, na França, construído em 2004 com 343 m de altura e “pylon” de aço de 89 m (Figuras 1.2 e 1.3);



Figura 1.2 – Viaduto de Millau na França (vista aérea).



Figura 1.3 – Viaduto de Millau na França.

c) A estação de trens TGV de Liège Guillemins, Bélgica, em construção, com domo em vidro e aço, apresentando 200 m de comprimento e 35 m de altura (Figura 1.4);



Figura 1.4 – Estação de TGV de Liège Guillemins, Bélgica.

d) O centro olímpico de natação em Beijing, China, inaugurado em 2008, com 177m x 177m x 31 m, num total de 22000 elementos de aço. O projeto é citado como o primeiro caso de análise não-linear de flambagem inelástica em seção transversal (Figuras 1.5 e 1.6).



Figura 1.5– Centro olímpico de natação em Beijing, China (durante a construção).



Figura 1.6– Centro olímpico de natação em Beijing, China (após inauguração).

Além disso, os aços de alta resistência têm grande aplicação na construção naval e na área de exploração de petróleo. Encontram-se, também, inúmeros trabalhos publicados sobre

a estabilidade de estruturas com materiais compostos, que são de uso comum na indústria aeronáutica.

O grande número de pesquisas publicadas sobre o tema mostra que o assunto não está esgotado, e que persiste a necessidade de se ter um maior conhecimento da estabilidade das estruturas.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em oito capítulos que são descritos a seguir:

### Capítulo 1 – INTRODUÇÃO

Nesse capítulo inicialmente apresenta-se um breve histórico do estudo de estabilidade estrutural. A seguir, listam-se as contribuições acadêmicas brasileiras ao tema e são comentados o objetivo, a relevância do assunto e a estrutura do trabalho.

### Capítulo 2 – REVISÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são abordados os métodos numéricos e as técnicas essenciais para a elaboração de um programa de computação que possa resolver problema de instabilidade de estruturas modeladas por elementos finitos.

### Capítulo 3 – ELEMENTO DE BARRA ESPACIAL

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento de um elemento de barra espacial não-linear na formulação Lagrangeana Total, obtendo-se as expressões analíticas da matriz tangente de rigidez e de sua correspondente variação.

### Capítulo 4 – ELEMENTO DE CASCA PLANA

Neste capítulo é apresentada a formulação Lagrangeana Total de um elemento finito de casca plana quadrangular não-linear. Como resultado desta formulação obtém-se a expressão analítica da matriz de rigidez tangente e de sua variação.

### Capítulo 5 – PROBLEMA DE INSTABILIDADE

Neste capítulo são apresentados os aspectos do problema de instabilidade para uma estrutura modelada por elementos finitos. É desenvolvida uma formulação variacional que resulta num problema de autovalor que permite identificar pontos singulares.

## Capítulo 6 – RESOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas características da linguagem C++ e aspectos relevantes da estrutura do programa, visando implementar a metodologia desenvolvida nos capítulos anteriores.

## Capítulo 7 – APLICAÇÕES DA METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados e comentadas a estabilidade de algumas estruturas nas quais a metodologia é aplicada. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido são comparados com resultados analíticos e numéricos publicados.

## Capítulo 8 – CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões desta tese.

## 2 REVISÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Nesse capítulo são abordados aspectos numéricos considerados essenciais à elaboração de um programa de computação para a análise do problema de instabilidade de estruturas modeladas por elementos finitos.

São apresentados os fundamentos teóricos dos seguintes métodos e técnicas:

- g) solução de sistemas de equações lineares;
- h) técnica de armazenamento de matrizes;
- i) técnica de renumeração de nós;
- j) métodos para determinação de autovalores e autovetores.

### 2.1 PROPRIEDADES DE MATRIZES

As seguintes propriedades das matrizes são consideradas importantes para o desenvolvimento dos métodos apresentados:

- a) se  $\mathbf{A}$  é uma matriz simétrica, tem-se:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \quad (2.1)$$

- b) se  $\mathbf{AB}$  é o produto das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  tem-se:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (2.2)$$

- c) se  $\mathbf{ABC}$  é o produto das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  tem-se:

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (2.3)$$

- d) se  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada com autovalor  $\chi_i$  e correspondente autovetor  $\boldsymbol{\varphi}_i$  tem-se:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\varphi}_i = \chi_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (2.4)$$

- e) se  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $\chi_i$  é um dos  $n$  autovalores de  $\mathbf{A}$  tem-se:

$$\det(\mathbf{A}) = \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n \quad (2.5)$$

- f) se a matriz  $\mathbf{A}$  é simétrica e real, isto é, seus elementos são reais, seus autovalores são reais.

g) se  $\mathbf{x}$  é um vetor e  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada, a forma quadrática da matriz  $\mathbf{A}$  é dada pela expressão  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$

h) se  $\mathbf{A}$  é uma matriz simétrica,  $\lambda_i$  é um autovalor de  $\mathbf{A}$  e  $\boldsymbol{\varphi}_i$  é o autovetor correspondente tem-se:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i \quad (2.6)$$

i) a matriz simétrica  $\mathbf{A}$  é denominada positiva definida se sua forma quadrática é positiva para todo vetor  $\mathbf{x}$  real não nulo.

j) se a matriz  $\mathbf{A}$  é simétrica positiva definida todos seus autovalores são positivos.

k) se a matriz  $\mathbf{A}$  é simétrica positiva definida seu determinante é positivo.

## 2.2 SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Os problemas de elementos finitos apresentam no seu processo de solução a necessidade de se resolver um sistema de equações lineares da forma

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{K}$  é uma matriz quadrada simétrica referente à rigidez da estrutura,  $\mathbf{U}$  é um vetor de deslocamentos nodais e  $\mathbf{F}$  é um vetor de forças externas nodais.

Matematicamente a resolução da equação (2.7) consiste em obter a solução  $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ , onde  $\mathbf{K}^{-1}$  é a matriz inversa da matriz de rigidez. Esta inversão de matriz de rigidez demanda grande esforço computacional, pois os problemas de engenharia apresentam usualmente matrizes de ordem elevada.

Os algoritmos desenvolvidos para resolver sistemas de equações de forma eficiente podem ser colocados em duas grandes classes: os algoritmos diretos e os algoritmos iterativos.

Nos algoritmos iterativos o problema é desenvolvido por meio do processamento reiterado de aproximações visando-se obter a convergência para a solução, tal como no método de Gauss-Seidel.

Nos métodos diretos a solução é obtida por meio do processamento algébrico da matriz de rigidez e do vetor de forças. Desta forma obtém-se um problema do tipo

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2.8)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}$  é uma matriz triangular.

Se no processamento optar-se por  $\bar{\mathbf{K}}$  ser uma matriz triangular inferior, o problema apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & & & \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \bar{k}_{n1} & \bar{k}_{n2} & \dots & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \dots \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Quando obtém-se  $\bar{\mathbf{K}}$  como uma matriz triangular superior, o problema apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \dots & \bar{k}_{1n} \\ & \bar{k}_{22} & \dots & \bar{k}_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ (0) & & & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \dots \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

As incógnitas  $u_i$  são calculadas por um processo seqüencial de retrossubstituição. Na configuração dada pela expressão (2.9) este processo pode ser implementado utilizando-se a relação

$$u_i = \frac{\bar{F}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{k}_{ij} u_j}{\bar{k}_{ii}} \quad (2.11)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Na configuração dada pela expressão (2.10), a retrossubstituição é realizada na ordem inversa por meio da expressão

$$u_i = \frac{\bar{F}_i - \sum_{j=i+1}^n \bar{k}_{ij} u_j}{\bar{k}_{ii}} \quad (2.12)$$

onde  $i = n, n-1, \dots, 1$ .

JENNINGS e MCKEOWN (1992, p.295) apresentam uma comparação entre os algoritmos iterativos e os algoritmos diretos para a resolução de sistemas de equações. As seguintes desvantagens dos algoritmos iterativos são destacadas:

- a) observa-se usualmente a necessidade de um grande número de iterações para se obter a convergência da solução;
- b) não se verifica redução significativa no tempo de computação e no espaço de armazenamento para matrizes simétricas.

Em virtude das desvantagens dos métodos indiretos, neste trabalho são utilizados métodos diretos para a solução de sistemas de equações lineares. A seguir são analisados o

método de Gauss-Jordan e o método de decomposição de matriz, efetuando-se uma comparação sucinta entre os resultados fornecidos pelos mesmos.

### 2.2.1 Método de Gauss-Jordan

Os problemas de sistemas de equações lineares podem ser apresentados em forma de produtos de matrizes como na equação (2.1), cuja forma expandida é

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Particionando-se as matrizes da equação (2.13) pode-se definir as submatrizes

$$\mathbf{K}_{12} = [k_{12} \quad k_{13} \quad \dots \quad k_{1n}] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{K}_{21} = [k_{21} \quad k_{31} \quad \dots \quad k_{n1}]^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n2} & \dots & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{U}_2 = [u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n]^T \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = [F_2 \quad F_3 \quad \dots \quad F_n]^T \quad (2.18)$$

Utilizando-se as submatrizes definidas pelas expressões de (2.14) a (2.18), pode-se reescrever a equação (2.13) e obter a equação matricial

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Expandindo-se o produto matricial, dado pela expressão (2.19) obtém-se as equações

$$k_{11}u_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{U}_2 = F_1 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{K}_{21}u_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{U}_2 = \hat{\mathbf{F}}_2 \quad (2.21)$$

Explicitando-se  $u_1$  na equação (2.20) tem-se

$$u_1 = \frac{F_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{U}_2}{k_{11}} \quad (2.22)$$

Substituindo-se a expressão (2.22) na expressão (2.21) e reorganizando-se os termos, obtém-se a equação

$$(\mathbf{K}_{22} - \frac{\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{12}}{k_{11}})\mathbf{U}_2 = \hat{\mathbf{F}}_2 - \frac{\mathbf{K}_{21}}{k_{11}}F_1 \quad (2.23)$$

que define um novo sistema de equações no qual são retiradas a variável  $u_1$  e a primeira linha da matriz  $\mathbf{K}$ .

Definindo-se os termos  $\mathbf{K}_{22}^{(1)}$  e  $\hat{\mathbf{F}}_2^{(1)}$  por meio das expressões

$$\mathbf{K}_{22}^{(1)} = \mathbf{K}_{22} - \frac{\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{12}}{k_{11}} \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2^{(1)} = \hat{\mathbf{F}}_2 - \frac{\mathbf{K}_{21}}{k_{11}}F_1 \quad (2.25)$$

tem-se a seguinte expressão para a equação (2.23):

$$\mathbf{K}_{22}^{(1)}\mathbf{U}_2 = \hat{\mathbf{F}}_2^{(1)} \quad (2.26)$$

Utilizando-se as expressões (2.20) e (2.26), o sistema de equações (2.13) pode ser apresentado na forma condensada

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

onde  $(\mathbf{0})$  indica que os termos, que não são apresentados, são nulos.

Este processo pode ser repetido para a matriz  $\mathbf{K}_{22}^{(1)}$  e assim sucessivamente, de forma a se obter o sistema triangularizado:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & \dots & k_{2n}^{(1)} \\ & & k_{33}^{(2)} & \dots & k_{3n}^{(2)} \\ & & & \dots & \dots \\ (\mathbf{0}) & & & & k_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2^{(1)} \\ \hat{\mathbf{F}}_3^{(2)} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{F}}_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde o índice superscrito indica a etapa em que o termo é obtido.

Este processo é conhecido como método de eliminação de Gauss-Jordan. A equação matricial de condensação, dada pela expressão (2.23), representa uma combinação linear da primeira equação com as demais equações que tem como objetivo anular os coeficientes da primeira variável.

Considerando-se que a matriz  $\mathbf{K}$  é simétrica, isto é,  $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{12}^T$  e  $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{22}^T$ , a matriz condensada também é simétrica, pois

$$[\mathbf{K}_{22}^{(1)}]^T = [\mathbf{K}_{22} - \frac{\mathbf{K}_{12}^T \mathbf{K}_{12}}{k_{11}}]^T = \mathbf{K}_{22}^{(1)} \quad (2.29)$$

Como a simetria da matriz é mantida, apenas os  $(n^2+n)/2$  termos, que correspondem aos termos da diagonal e da parte inferior ou superior da matriz precisam ser armazenados e processados. Essa propriedade reduz de forma significativa o espaço de memória e o tempo de computação utilizados pelo método.

### 2.2.2 Decomposição de matriz

A matriz condensada da equação (2.27) do método de Gauss-Jordan pode ser obtida pelo seguinte produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\mathbf{0}) \\ -\frac{\mathbf{K}_{21}}{k_{11}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A expressão (2.30) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_1 \mathbf{K}^{(1)} \quad (2.31)$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & (\mathbf{0}) \\ -\frac{\mathbf{K}_{21}}{k_{11}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Aplicando-se o mesmo procedimento na matriz (2.34) tem-se:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{T}_2 \mathbf{K}^{(2)} \quad (2.35)$$

onde

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ 0 & k_{22}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{K}_{32}^{(1)}}{k_{22}^{(1)}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

e

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ & k_{22}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} \\ (0) & & \mathbf{K}_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Numa etapa  $i$  do processo de condensação tem-se:

$$\mathbf{K}^{(i-1)} = \mathbf{T}_i \mathbf{K}^{(i)} \quad (2.39)$$

onde

$$\mathbf{K}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1i} & \dots & k_{1i} \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & \dots & k_{2i}^{(1)} \\ & & k_{33}^{(2)} & \dots & k_{3i}^{(2)} \\ & & & k_{(i-1)(i-1)}^{(i-2)} & \mathbf{K}_{(i-1)i}^{(i-2)} \\ (0) & & & \mathbf{K}_{i(i-1)}^{(i-2)} & \mathbf{K}_{ii}^{(i-2)} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \dots & (0) \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & (0) \\ (0) & & & \frac{\mathbf{K}_{i(i-1)}^{(i-2)}}{k_{(i-1)(i-1)}^{(i-2)}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & \mathbf{K}_{1i} \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & \dots & \mathbf{K}_{2i}^{(1)} \\ & & k_{33}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{3i}^{(2)} \\ & & & \dots & \\ (0) & & & & \mathbf{K}_{ii}^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Utilizando-se sucessivamente a equação (2.33) na expressão (2.25) obtém-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{n-2} \mathbf{T}_{n-1} \mathbf{K}^{(n-1)} \quad (2.43)$$

A expressão (2.37) representa a decomposição da matriz  $\mathbf{K}$  no produto:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{L} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{n-2} \mathbf{T}_{n-1}$  é uma matriz triangular inferior, cujos elementos na diagonal são iguais a 1, e  $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{(n-1)}$  é a matriz triangular superior obtida pelo método de Gauss-Jordan.

Esse método é denominado de decomposição de Doolittle. Quando os elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{U}$  são iguais a 1, o método é denominado método de decomposição de Crout.

Usando-se essa decomposição, o sistema de equações pode ser reescrito como

$$\mathbf{LUX} = \mathbf{F} \quad (2.45)$$

Divide-se o problema inicial em outros dois problemas seqüenciais. No primeiro problema resolve-se  $\mathbf{LY} = \mathbf{F}$ ; em seguida obtém-se a solução final, solucionando-se  $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ .

Utilizando-se o processo de retrossubstituição, apresentado na expressão (2.11), resolve-se

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & & \dots & \\ l_{n,1} & \dots & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Em seguida, utilizando-se o processo de retrossubstituição definido pela expressão (2.12), resolve-se  $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ , cuja forma matricial é

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & \dots & \dots & u_{2,n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ (0) & & & & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Para uma matriz simétrica demonstra-se que a decomposição pode ser feita sob a forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular com elementos unitários na diagonal e  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal.

A decomposição dada pela expressão (2.48) necessita menor espaço de armazenamento computacional do que a decomposição dada pela expressão (2.44). Na decomposição com o uso da expressão (2.48) necessita-se armazenar  $(n^2-n)/2$  elementos para a matriz  $\mathbf{L}$  e  $n$  elementos para a matriz  $\mathbf{D}$ , enquanto que na decomposição dada pela expressão (2.44) necessita-se armazenar  $n^2$  elementos para as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$ .

O problema inicial pode ser reescrito como:

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.49)$$

que pode ser dividido nas seguintes três etapas

$$\mathbf{LZ} = \mathbf{F} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{DY} = \mathbf{Z} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (2.52)$$

O método de Cholesky é uma variação da decomposição dada pela expressão (2.48), obtendo-se

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{L}}^T \quad (2.53)$$

onde  $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{LD}^{1/2}$ .

O problema assume a forma

$$\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.54)$$

e pode ser dividido em

$$\bar{\mathbf{L}}\mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad (2.55)$$

$$\bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (2.56)$$

A decomposição de Cholesky dada pela expressão (2.54) não utiliza menos espaço de armazenamento do que a decomposição  $\mathbf{LDL}^T$  dada pela expressão (2.48), mas utiliza apenas dois processos de retrossubstituição definidos pela expressão (2.12).

### 2.2.3 Comparação de métodos diretos

Segundo BATHE (1996, p.696) as técnicas de solução direta mais eficientes atualmente utilizadas são basicamente aplicações do método de eliminação de Gauss-Jordan.

SORIANO (1997, p.206) faz a seguinte análise comparativa de implementação computacional dos métodos diretos:

“...verifica-se que o método de Cholesky conduz a c.n divisões [onde n é a ordem da matriz de rigidez e c é o numero de vetores de força a resolver] a mais do que o método de Gauss..., além de n raízes quadradas não existentes nesse último método. O corpo da programação para o método de Cholesky é maior do que para o de Gauss, ... Dentro dessa ordem de idéias, para matrizes simétricas positivas-definidas, ..., o método mais indicado é o método de Gauss”

Em virtude dessas considerações neste trabalho adota-se o método de Gauss-Jordan para a resolução numérica de sistemas lineares. Além disso, o método de Cholesky acrescenta termos não-nulos na matriz (JENNINGS, 1993, p.130), dificultando o armazenamento otimizado de matrizes esparsas.

### 2.3 ARMAZENAMENTO DE MATRIZ

Nos problemas de elementos finitos a precisão dos resultados está associada ao tipo de elemento utilizado e ao grau de refinamento da malha de elementos (BATHE, 1996, p.242 e COOK, 1989, p.563). Quando se utiliza elementos finitos com maior complexidade usualmente se obtém resultados mais precisos, mas esses elementos empregam grande número de graus de liberdade. De maneira semelhante, ao se fazer uma maior discretização das estruturas consegue-se melhores resultados, mas isso implica na utilização de grande quantidade de elementos. A combinação dessas situações resulta em problemas com matrizes de rigidez de ordem elevada, cuja resolução pode ser computacionalmente inviável, se não for utilizada uma forma adequada de armazenamento da matriz,.

Como a simetria da matriz de rigidez é mantida nos métodos diretos de Gauss-Jordan (COOK, 1989, p.34), o armazenamento dos  $n^2$  elementos da matriz pode ser reduzido para apenas  $(n^2+n)/2$  elementos. O gráfico da Figura 2.1 mostra que o espaço de armazenamento fica reduzido a praticamente 50% para matrizes com ordem superior a 100.

Esse espaço pode ser reduzido ainda mais se for considerado que a matriz de rigidez é esparsa. Desta forma muitos termos armazenados são nulos e não necessitam processamento.

O número de coeficientes nulos na matriz de rigidez independe da maneira como os nós são numerados (COOK, 1989, p.45), mas uma renumeração dos nós pode reduzir o armazenamento e tempo de manipulação da matriz de rigidez.

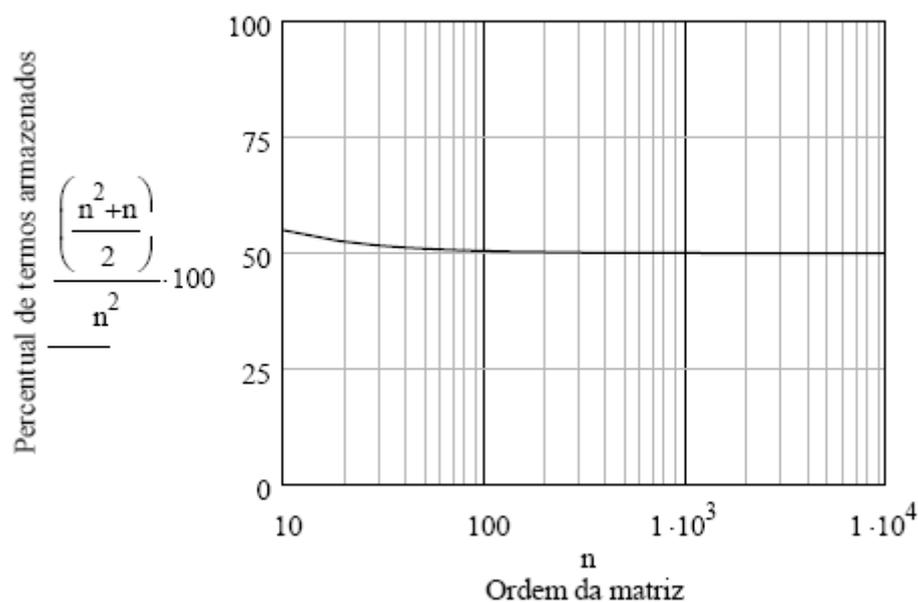


Figura 2.1 – Porcentagem de armazenamento de matrizes simétricas.



**Tabela 2.1 – Efeitos de renumeração de nós**

	Nº de elementos não nulos	Nº de multiplicações e divisões efetuadas
Matriz sem renumeração	25	48
Matriz com renumeração	21	32
Redução percentual	16%	33,3 %

(adaptado de JENNINGS, 1993, p.131).

De forma semelhante, se todos os termos não-nulos são colocados dentro de uma determinada banda ao longo da diagonal, verifica-se no método de Gauss-Jordan que todas as operações só são executadas dentro desta região, reduzindo-se o armazenamento e o tempo de computação utilizados.

Esse procedimento pode ser otimizado utilizando-se uma banda de largura variável. Os elementos são armazenados em colunas (ou linhas) a partir do primeiro elemento não-nulo da coluna (linha) até a diagonal. Essa técnica é chamada de *altura efetiva de coluna* ou de *perfil* (SORIANO, 1997, p.144). Na literatura de língua inglesa essa técnica recebe as denominações de *skyline* ou *profile* (JENNINGS, 1993, p.136).

Recomenda-se a utilização de algoritmos de renumeração automática para pré-processamento da estrutura, pois a dificuldade na renumeração manual aumenta à medida que o número de elementos da matriz aumenta (JENNINGS, 1993, p.142).

Dentre os algoritmos de renumeração automática destacam-se os algoritmos de Cuthill-McKee (1969, *apud* JENNINGS, 1993, p.142), King (1970, *apud* JENNINGS, 1993, p.144), Gibbs (1976, *apud* JENNINGS, 1993, p.148) e Sloan (1986, *apud* JENNINGS, 1993, p.148).

Armstrong (1985, *apud* SLOAN, 1989, p.2660) desenvolve um algoritmo que obtém uma redução de perfil quase ótima, mas consome um elevado tempo de processamento, inviabilizando sua utilização prática (SLOAN, 1989, p. 2660).

COOK (1989, p.48) considera que “*a renumeração automática é vantajosa, especialmente se a mesma numeração é usada para repetidas soluções, como é o caso de problemas não-lineares*”. De acordo com o mesmo autor a “*renumeração automática é sempre vantajosa do ponto de vista de conveniência do usuário*”.

Descreve-se a seguir a técnica de renumeração de nós desenvolvida por SLOAN (1989)

### 2.3.1 Renumeração de nós

A redução da largura de banda ou perfil é recomendada para a redução do espaço de armazenamento e do tempo de processamento de matrizes de ordem elevada. Essa redução pode ser obtida por meio de um processo eficiente de renumeração de nós.

Nesse trabalho é implementado o algoritmo para a redução do perfil de matrizes desenvolvido por SLOAN (1989), que demonstra sua eficiência por meio de uma análise comparativa.

Como o desenvolvimento do algoritmo está baseado na teoria dos grafos, inicialmente são apresentadas algumas definições utilizadas na citada teoria, detalhando-se o algoritmo posteriormente.

### 2.3.2 Definições da teoria dos grafos

Um grafo é um par  $(V, A)$  em que  $V$  é um conjunto arbitrário e  $A$  é um subconjunto de pares ordenados de  $V$ . Os elementos de  $V$  são chamados vértices ou nós, e os elementos de  $A$  são chamados arestas ou arcos (FEOFILOFF *et al.*, 2005).

Cada aresta está associada a dois vértices: o primeiro é a ponta inicial da aresta e o segundo é a ponta final. Uma aresta com ponta inicial  $v$  e ponta final  $w$  pode ser denotado por  $(v,w)$  ou por  $v-w$  ou ainda por  $vw$ . Desta forma as arestas, como os vetores, apresentam direção e sentido, e o grafo é denominado grafo dirigido.

A Figura 2.4 representa um exemplo de grafo dirigido  $(V, A)$ , onde  $V$  é o conjunto das cinco primeiras letras do alfabeto, e  $A$  é o conjunto dos arranjos de  $V$  que formam sílabas terminadas em vogais.

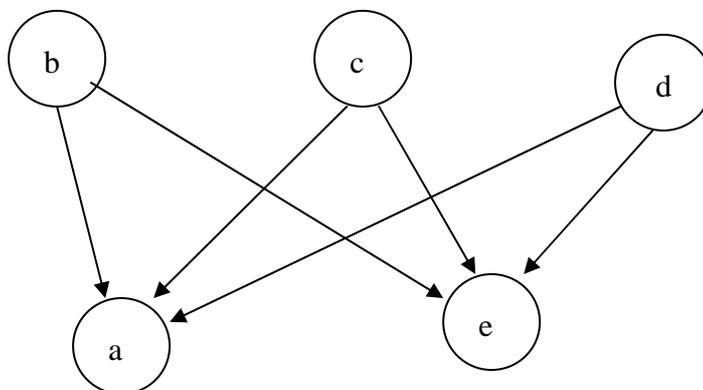


Figura 2.4 – Exemplo de grafo dirigido.

Duas arestas são adjacentes quando têm um vértice comum (PIMENTEL e OLIVEIRA, 1996).

Um vértice  $w$  é adjacente a (ou vizinho de) um vértice  $v$  se existe uma aresta da forma  $(v, w)$ , ou seja, se existe uma aresta com ponta inicial  $v$  e ponta final  $w$ . A relação de adjacência entre vértices pode não ser simétrica:  $w$  pode ser adjacente a  $v$  sem que  $v$  seja adjacente a  $w$ .

Um grafo é simétrico se para cada aresta da forma  $vw$  existe uma aresta da forma  $wv$ . Um grafo não-dirigido é um grafo simétrico em que as arestas estão geminadas, isto é, cada arco  $a$  tem um gêmeo  $b$  tal que o gêmeo de  $b$  é  $a$ , a ponta inicial de  $b$  coincide com a ponta final de  $a$ , e a ponta final de  $b$  coincide com a ponta inicial de  $a$ . Os grafos não-dirigidos podem ser representados por matrizes e vice-versa.

Na Figura 2.5 tem-se um exemplo de grafo não-dirigido  $(V, B)$ , onde  $V$  é o mesmo conjunto do grafo da Figura 2.4, e  $B$  é o conjunto de pares de  $V$  que são vizinhos na listagem alfabética.

O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes.

Um caminho é uma seqüência qualquer de arestas adjacentes que ligam dois vértices.

A distância entre dois nós é o menor número de arestas de um caminho entre estes nós.

A matriz de adjacências  $M$  de um grafo tem linhas e colunas indexadas pelos vértices, onde o elemento  $M_{vw}$  vale 1 se existe algum arco de  $v$  a  $w$  e vale 0 em caso contrário.

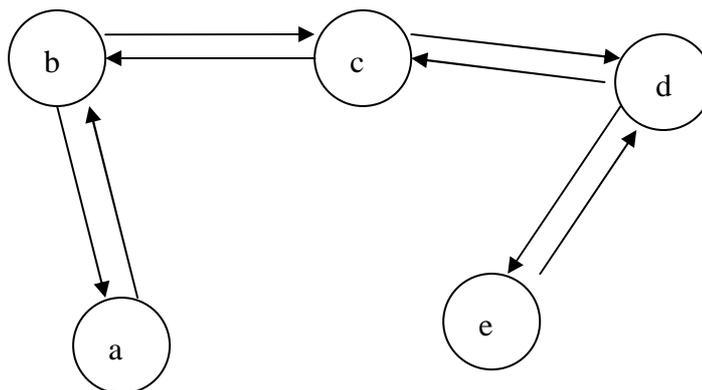


Figura 2.5 – Exemplo de grafo simétrico.

### 2.3.3 Algoritmo de Sloan

O procedimento proposto por SLOAN (1989) para redução de perfil de matrizes apresenta como ponto central: renumerar seqüencialmente os nós que apresentam os maiores

valores da função escalar denominada prioridade. Essa função é uma soma ponderada da distância do nó até o nó da extremidade do grafo e do grau de cada nó.

A medida que um nó é renumerado a prioridade dos nós adjacentes é alterada. O nó que tem a maior prioridade atualizada é renumerado. Prossegue-se com a mesma lógica até o término da renumeração.

A seguir são apresentadas as três etapas sequenciais do algoritmo:

- a) montagem da matriz de adjacências;
- b) determinação de nós pseudoperiféricos;
- c) renumeração de nós.

### 2.3.3.1 Montagem da Matriz de Adjacências

O processo de renumeração de nós principia com a definição da matriz de adjacência relativa à malha de elementos finitos utilizada. Para cada nó determinam-se os demais nós com os quais ele tem vínculo na formulação da matriz de rigidez dos elementos de que faz parte.

Tome-se, por exemplo, uma malha de nós de uma estrutura representada na Figura 2.6 em que os nós foram numerados aleatoriamente.

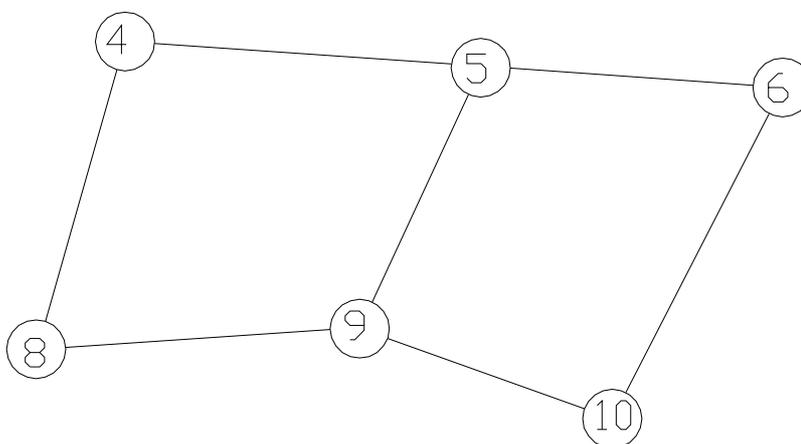


Figura 2.6 – Malha de nós de uma estrutura.

Se os elementos da estrutura forem barras com nós nas extremidades, em cada elemento os nós se relacionam um a um. Cada nó só terá mais de um nó adjacente quando for um nó comum a mais de um elemento. A Tabela 2.2 apresenta a matriz de adjacência para esse caso.

Tabela 2.2 – Matriz de adjacência para a estrutura da Figura 2.6 composta de barras.

Nó	4	5	6	8	9	10
4		1		1		
5	1		1		1	
6		1				1
8	1				1	
9		1		1		1
10			1		1	

No entanto, caso a Figura 2.6 represente dois elementos quadrangulares com um lado comum, a quantidade de nós adjacentes de cada nó aumenta, pois o nó 4, por exemplo, pertencente ao elemento quadrangular 4-5-9-8, está vinculado aos nós 5, 8 e 9 na montagem da matriz de rigidez. A matriz de adjacência dessa nova situação é apresentada na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Matriz de adjacência para a estrutura da Figura 2.6 composta de elementos quadrangulares.

Nó	4	5	6	8	9	10
4		1		1	1	
5	1		1	1	1	1
6		1			1	1
8	1	1			1	
9	1	1	1	1		1
10		1	1		1	

Caso a estrutura seja composta apenas por barras, o grafo tem a mesma aparência das ligações da estrutura (Figura 2.6), mas no caso de elementos quadrangulares o grafo tem mais ligações conforme mostra a Figura 2.7.

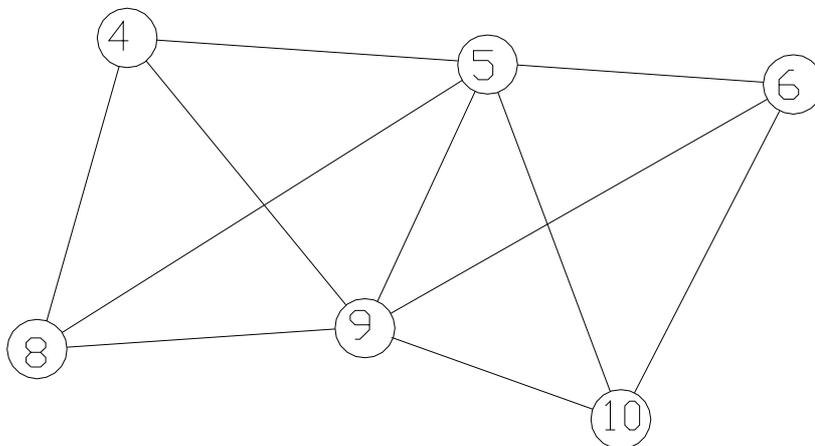


Figura 2.7 – Grafo para a estrutura da Figura 2.6 composta de elementos quadrangulares.

### 2.3.3.2 Determinação de Nós Pseudoperiféricos

Após a montagem da matriz de adjacências determinam-se os nós pseudoperiféricos, que são o nó inicial e nó final do grafo renumerado. Em determinadas situações pode-se ter mais de um nó adequado para ser nó pseudoperiférico inicial ou final. Nessa situação escolhe-se aleatoriamente um dos nós e continua-se o procedimento.

Para se determinar os nós pseudoperiféricos calcula-se o grau de cada nó. Na Figura 2.8 o número sublinhado indica o grau de cada nó.

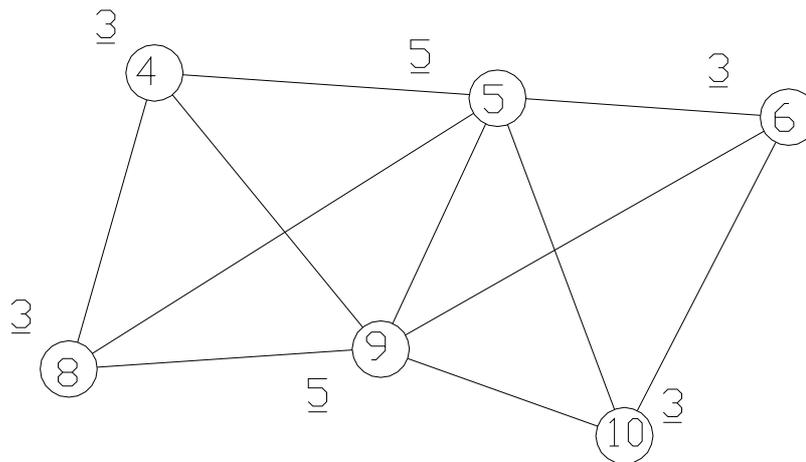


Figura 2.8 – Graus dos nós.

Seleciona-se um nó dentre os de menor grau para ser o nó inicial e monta-se a estrutura deste nó “inicial”. A estrutura de um nó é formada por subconjuntos dos demais nós situados a uma mesma distância do nó referência. Os nós adjacentes ao nó inicial são estabelecidos como nós de nível 2. Os nós adjacentes aos nós de nível 2 são estabelecidos como nós de nível 3 e assim por diante. A Figura 2.9 apresenta a estrutura do nó 4 como nó inicial e o nível de cada um dos demais nós expresso pelo número sublinhado.

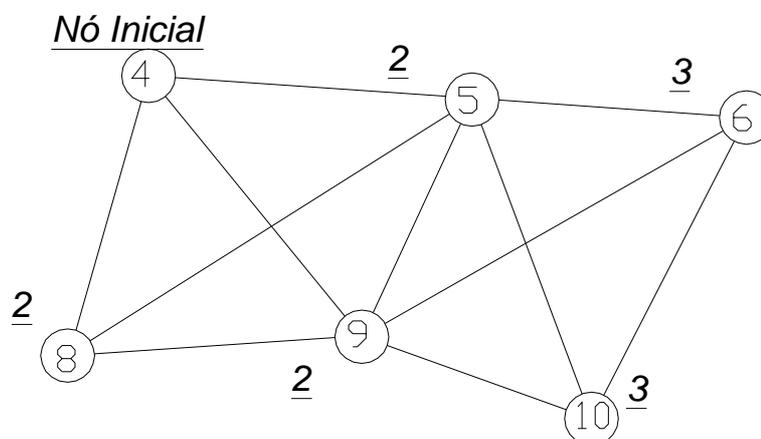


Figura 2.9 – Estrutura de nó inicial.

Os nós do maior nível da estrutura do nó inicial são candidatos a nó final. Para seleccionar o nó final dentre estes nós, monta-se a estrutura de cada um destes nós conforme anteriormente feito para o nó inicial. A Figura 2.10 ilustra a estrutura do nó 6 como nó final.

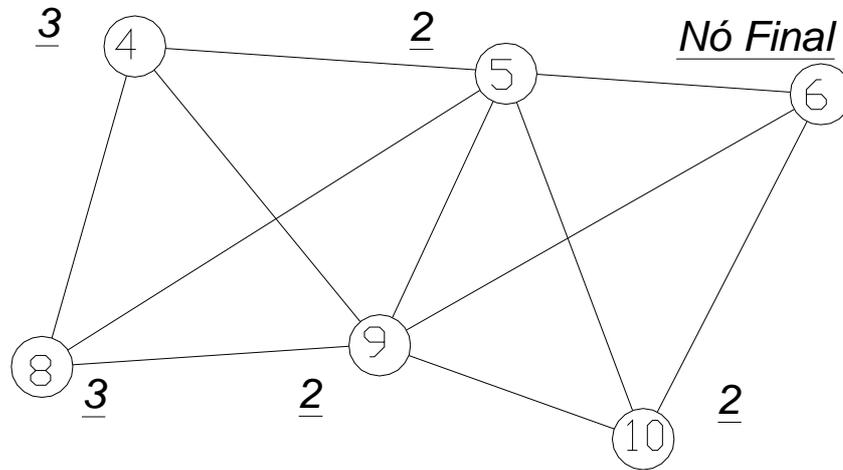


Figura 2.10 – Estrutura de nó final.

Quando o último nível da estrutura do nó em análise é menor que o último nível da estrutura do nó inicial, este nó é descartado para ser nó final e a estrutura de outro nó é analisada.

Caso se obtenha uma estrutura de maior nível que a estrutura do nó inicial, o nó inicial deve ser trocado por outro nó do último nível dessa estrutura e o procedimento é reiniciado.

Esse procedimento é repetido até que se tenha um nó inicial cuja estrutura tenha o mesmo número de níveis que a estrutura do nó final.

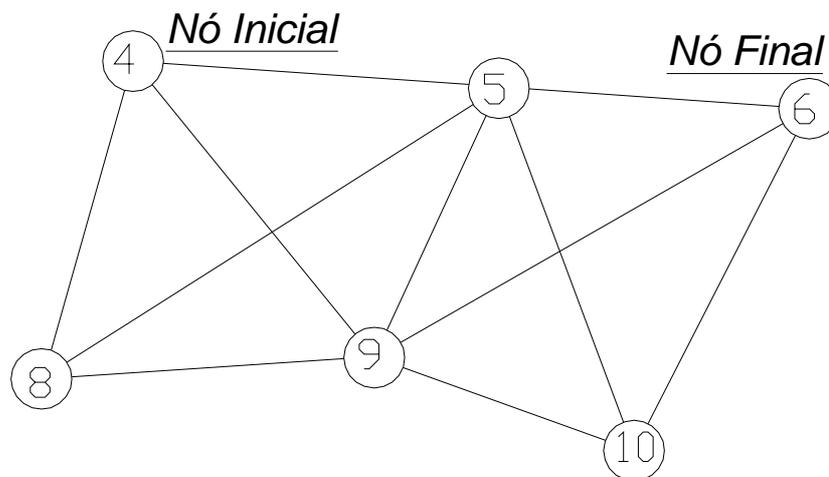


Figura 2.11 – Nó inicial e nó final.

Após terem sido determinados o nó inicial e o nó final, executa-se o procedimento de renumeração.

### 2.3.3.3 Renumeração de nós

Para controle da renumeração são adotados os seguintes indicadores numéricos de situação de nós:

- a) **3** – para nó renumerado;
- b) **2** – para nó adjacente a um nó renumerado (elegível para renumeração);
- c) **1** – para nó adjacente a um nó de situação 2 que não tenha sido renumerado (elegível para renumeração);
- d) **0** – para os demais nós ( não elegíveis para renumeração).

Esta etapa consiste na execução dos seguintes passos:

- 1) calcula-se a distância de cada nó ao nó final em função da estrutura do nó final, conforme ilustra o grafo da Figura 2.12;

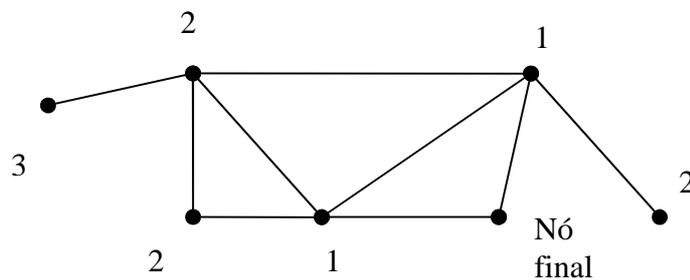


Figura 2.12 – Distância de cada nó até o nó final

- 2) calcula-se a prioridade inicial de cada nó  $i$  por meio da seguinte expressão:

$$p_i = W_1 \cdot d_i - W_2 \cdot (n_i + 1) \quad (2.57)$$

onde  $i$  é o número do nó,  $p_i$  é a prioridade do nó  $i$ ,  $W_1 = 1$  e  $W_2 = 2$  são parâmetros ajustados experimentalmente por SLOAN (1989),  $d_i$  é a distância de cada nó  $i$  ao nó final e  $n_i$  é o grau do nó; a Figura 2.13 apresenta as prioridades dos nós do grafo;

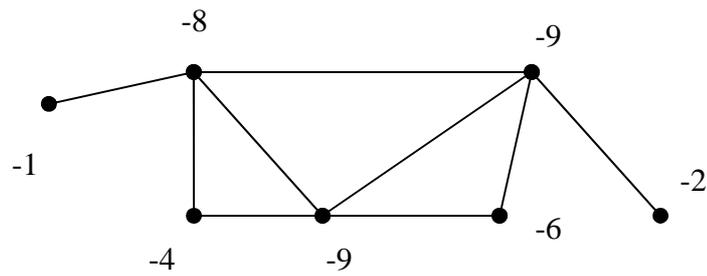


Figura 2.13 – Prioridade de nós.

- 3) define-se a situação inicial de cada nó como **0**;
- 4) define-se a situação do nó inicial como **1** e coloca-se o nó numa fila de prioridades;
- 5) seleciona-se o nó ***i*** que tiver a maior prioridade na fila de prioridades e retira-se esse nó da fila;
- 6) se a situação do nó ***i*** selecionado for **1**:
  - a. examina-se cada nó ***j*** adjacente ao nó ***i*** e aumenta-se sua prioridade para

$$p_i = p_i + W_2 \quad (2.58)$$

- b. se a situação do nó ***j*** for **0** altera-se sua prioridade para **1** e insere-se o nó na fila de prioridades

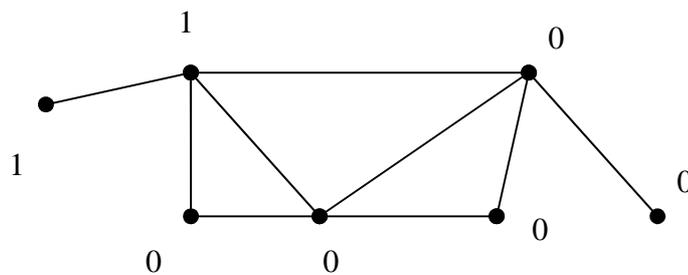


Figura 2.14 – Indicação de situação dos nós.

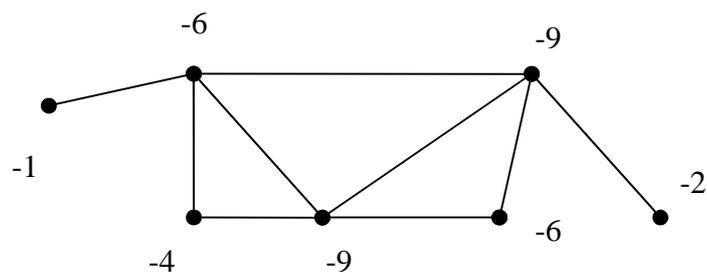


Figura 2.15 – Atualização de prioridades.

- 7) renombra-se o nó  $i$  com a numeração sequencial de nós e coloca-se o nó numa lista de nós renumerados. Altera-se a situação do nó  $i$  para **3**;
- 8) examina-se cada nó  $j$  adjacente ao nó  $i$ . Se a situação do nó adjacente  $j$  for **1** altera-se sua situação para **2** e aumenta-se sua prioridade para  $p_j = p_j + W_2$ ;
- 9) examina-se cada nó  $k$  adjacente a cada nó adjacente  $j$ ; se a situação do nó adjacente  $k$  for diferente de **3**, aumenta-se sua prioridade para  $p_k = p_k + W_2$ ; caso a situação do nó  $k$  seja **0**, altera-se sua situação para **1** e o nó  $k$  é acrescentado na fila de prioridades; as Figuras 2.16 e 2.17 apresentam a situação e a prioridade de cada nó após a execução dos passos 7, 8 e 9;
- 10) caso a fila de prioridades não esteja vazia, retorna-se ao passo 5. caso contrário a renumeração é encerrada.

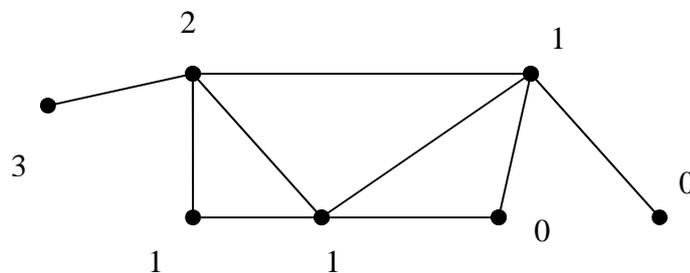


Figura 2.16 – Atualização de situação após renumeração do nó inicial.

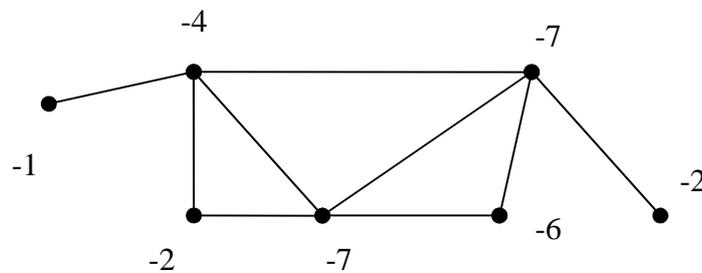


Figura 2.17 – Atualização de prioridades após renumeração do nó inicial.

## 2.4 PROBLEMA DE AUTOVALOR

Nesse item inicialmente é feita uma revisão histórica do desenvolvimento das soluções para o problema de autovalor. A seguir apresenta-se a formulação matemática dos algoritmos implementados nesse trabalho: Jacobi, QR e Lanczos.

### 2.4.1 Revisão histórica

O problema padrão de autovalor é apresentado na forma

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \chi \boldsymbol{\varphi} \quad (2.59)$$

onde  $\mathbf{K}$  é uma matriz quadrada,  $\boldsymbol{\varphi}$  é um autovetor e  $\chi$  é o autovalor correspondente.

A solução do problema pode ser obtida por meio da determinação das raízes do polinômio característico da matriz determinado por

$$\det(\mathbf{K} - \chi \mathbf{I}) = 0 \quad (2.60)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade de ordem compatível com a matriz  $\mathbf{K}$ .

A determinação dos coeficientes do polinômio característico de matrizes de ordem elevada exige grande esforço de computação. Além disso, mesmo que sejam calculados os coeficientes do polinômio característico, o teorema de Abel-Ruffini demonstra que não há método analítico para obter as raízes de polinômios de grau superior a quatro (GOLUB, 2000, p.38). Dessa forma uma solução analítica para problema de autovalor fica descartada quando se tem matriz de ordem superior a quatro, devendo ser utilizados métodos numéricos apropriados.

Em 1846 Jacobi propõe o primeiro método numérico conhecido para solucionar o problema de autovalor, entretanto esse método só recebe maior atenção a partir de 1950 com o desenvolvimento dos computadores (GOLUB, 2000, p.42).

O método de Jacobi é aplicável somente a matrizes simétricas e consiste em utilizar sucessivas transformações ortogonais visando diagonalizar a matriz. Esse método apresenta resultados mais precisos do que outros métodos. Todavia, em problemas de ordem elevada, em que soluções aproximadas são consideradas aceitáveis, o método não é considerado competitivo (GOLUB, 2000, p.43).

O método da potência é um método numérico cuja aplicação pode ser considerada mais simples. Householder atribui a primeira aplicação desse método a Muntz (1913), enquanto Bodewig atribui o método a von Mises. O procedimento consiste em multiplicar repetidamente a matriz por um mesmo vetor inicial, devidamente escolhido, de forma que o vetor na direção do autovetor com maior valor seja ressaltado em relação aos outros componentes (GOLUB, 2000, p.43). Este método apresenta o inconveniente da velocidade de convergência depender do valor absoluto da razão entre os dois maiores autovalores do problema.

Segundo GOLUB (2000, p.42), atualmente o método da potência na sua forma pura não é um método competitivo, mesmo para a computação de poucos autovalores. No entanto sua importância é destacada por implícita ou explicitamente, fazer parte de métodos mais modernos como o método QR, o método de Lanczos e o método de Arnoldi.

A coleção de vetores gerados pelo método da potência define subespaços de Krylov. Isto motivou Krylov em 1931 a tentar determinar o polinômio característico de uma matriz por meio da inspeção da dependência do conjunto dos vetores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{Ax}$ ,  $\mathbf{A}^2\mathbf{x}$ , ..., gerados pelo método da potência.

Krylov não obteve sucesso, pois os arredondamentos destroem a precisão dos coeficientes e estas perturbações, mesmo quando são pequenas, causam grandes variações no cálculo das raízes do polinômio.

Outra razão para a falha do método de Krylov em aritmética finita é que os vetores gerados tendem a convergir na direção dos autovetores associados aos autovalores dominantes, tornando muito difícil verificar a dependência mútua dos vetores (GOLUB, 2000, p.45).

Em 1950 Lanzos propôs a ortogonalização de cada novo vetor em relação ao anterior para superar esse inconveniente do método de Krylov (GOLUB, 2000, p.46).

Em 1954 Givens verificou que matrizes podem ser reduzidas a uma forma que permite efetuar os cálculos de autovalores de forma mais eficiente. Utilizando transformações ortogonais, denominadas “rotações de Givens”, obteve a tridiagonalização de matrizes em um número finito de passos.

Em 1958 Householder apresentou um processo mais eficiente do que o de Givens por meio das “reflexões de Householder”.

Em 1951 Arnoldi propôs um algoritmo semelhante ao de Lanczos para matrizes assimétricas. Embora o método de Arnoldi seja mais estável, dependendo da ortogonalização executada, computacionalmente ele é menos eficiente do que o método de redução proposto por Householder.

No período de 1960 a 1980 a referência para problemas de autovalores é o livro de Wilkinson (“The Algebraic Eigenvalue Problem”).

Wilkinson mostra que o algoritmo de Lanczos é muito instável devido a erros de arredondamento. Mostra também que o único método para estabilizar o processo é a reortogonalização dos vetores gerados. No entanto, a estabilização torna o algoritmo de Lanczos semelhante aos métodos de Householder ou Givens, que são computacionalmente mais econômicos.

Em 1961 Francis usa o método QR para resolver o problema de autovalor com matriz simétrica. O interesse de Wilkinson por esse método contribui para que o método QR venha a se tornar um dos métodos mais populares para problemas de autovalor (GOLUB, 2000, p.44)

Por volta de 1970 a solução do problema padrão de autovalor para matrizes densas e de ordem moderada atinge alto grau de desenvolvimento, e as pesquisas passam a focar o problema de autovalor generalizado  $\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \chi\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}$ .

Em 1971 Paige mostra que o método de Lanczos pode ser usado de forma iterativa para obter os autovalores corretos. O ponto principal de sua análise é a observação de que a perda de convergência assinala a convergência de um autovalor, e resulta da reintrodução do correspondente autovetor na matriz tridiagonal. Dessa forma ocorre a duplicação do autovalor e um retardo na obtenção dos demais autovalores.

Em função dessa observação são feitos aprimoramentos no método de Lanczos e, a partir de 1980, esse método se torna o método preferido para solucionar problemas de autovalor com grandes matrizes simétricas e esparsas (GOLUB, 2000, p.49).

GOLUB (2000, p.59) concluiu que:

“Para matrizes simétricas, o problema de autovalor é relativamente simples, devido à existência de um conjunto completo e ortogonal de autovetores e devido ao fato dos autovalores serem reais. Estas propriedades são exploradas na maioria dos métodos numéricos eficientes e o problema de autovalor pode ser considerado resolvido: para pequenas matrizes  $n < 25$  temos o método QR, uma das mais elegantes técnicas numéricas produzidas no campo da análise numérica, [...]. Para as matrizes maiores [ $n >$  algumas centenas], há o método de Lanczos, que em sua forma pura é extremamente simples, mas que esconde muitas propriedades sutis e atraentes.”

#### 2.4.2 Método de Jacobi

Para uma matriz  $\mathbf{K}$  simétrica qualquer demonstra-se que existe uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$  que atende a relação:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{D} \quad (2.61)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal.

Pode-se comparar a equação (2.61) com a equação (2.59) do problema padrão de autovalor e estabelecer que

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{X} \quad (2.62)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é a matriz dos autovetores  $\boldsymbol{\varphi}_i$  e  $\mathbf{X}$  é a matriz diagonal dos correspondentes autovalores  $\chi_i$ .

No método de Jacobi busca-se obter a matriz  $\mathbf{X}$  por processo iterativo. Os elementos fora da diagonal são zerados por meio de transformações com matrizes ortogonais  $\mathbf{P}_i$ . Com  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$  estabelece-se o processo iterativo:

$$\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{P}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{P}_i \quad (2.63)$$

onde  $\mathbf{K}_{i+1} \rightarrow \mathbf{X}$  e  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \cdots \mathbf{P}_{i+1} \rightarrow \Phi$ .

Para zerar o elemento  $k_{ij}$  utiliza-se a seguinte matriz de rotação  $\mathbf{P}_i$ :

$$\mathbf{P}_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{coluna } i & \text{coluna } j \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ & \dots \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \\ & \dots \\ & & \dots \\ & & & 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \text{linha } i \\ \\ \text{linha } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (2.64)$$

onde o ângulo de rotação  $\theta$  é calculado pela expressão

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2k_{ij}}{k_{ii} - k_{jj}}\right) \quad (2.65)$$

Deve-se ressaltar que, embora a transformação pela matriz  $\mathbf{P}_i$  anule os elementos  $k_{ij}$  e  $k_{ji}$ , estes elementos podem deixar de ser nulos na próxima transformação.

Na implementação computacional do método utiliza-se um algoritmo que executa uma varredura seqüencial apenas dos elementos da metade inferior ou superior da matriz e obtém-se a transformação correlata ao elemento. Este processo é repetido até que se obtenha a convergência desejada para o método.

BATHE (1996, p.914) propôs que sejam verificados dois critérios de convergência após o término de cada varredura para uma dada tolerância  $s$

$$\frac{|k_{ii}^{(l+1)} - k_{ii}^{(l)}|}{k_{ii}^{(l+1)}} \leq 10^{-s} \quad (2.66)$$

$$\left[ \frac{(k_{ij}^{(l+1)})^2}{k_{ii}^{(l+1)} k_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}, \quad \forall i, j | i < j \quad (2.67)$$

onde  $i = 1, \dots, n$  e  $l$  é a última iteração da varredura

A convergência do problema é satisfeita quando os dois critérios são atendidos.

Este método não pode ser aplicado diretamente nos problemas de flambagem, pois nesses tem-se um problema generalizado de autovalor. No entanto pode-se usar a seguinte formulação para se recair no problema padrão:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \chi \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \chi \boldsymbol{\varphi} \quad (2.69)$$

Esta transformação pode ser inadequada se a matriz  $\mathbf{M}$  for mal condicionada. Uma solução mais conveniente é obtida pelo método generalizado de Jacobi, que opera simultaneamente as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  visando diagonalizar a matriz  $\mathbf{K}$  e tornar a matriz  $\mathbf{M}$  uma matriz identidade.

BATHE (1996, p.919) apresenta a seguinte forma para a matriz  $\mathbf{P}_i$  utilizada no método generalizado de Jacobi

$$\mathbf{P}_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \text{coluna } i \quad \text{coluna } j \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \alpha \\ & & & \dots \\ & \gamma & & 1 \\ & & & & \dots \\ & & & & & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{linha } i \\ \\ \text{linha } j \end{array} \end{array} \end{array} \quad (2.70)$$

onde os termos  $\alpha$  e  $\gamma$  são obtidos das expressões:

$$\gamma = \frac{\bar{k}_{ii}^{(i)}}{x} \quad (2.71)$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(i)}}{x} \quad (2.72)$$

$$x = \frac{\bar{k}^{(i)}}{2} + \frac{\bar{k}^{(i)}}{|\bar{k}^{(i)}|} \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(i)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(i)} \bar{k}_{jj}^{(i)}} \quad (2.73)$$

$$\begin{cases} \bar{k}_{ii}^{(i)} = k_{ii}^{(i)} m_{ij}^{(i)} - m_{ii}^{(i)} k_{ij}^{(i)} \\ \bar{k}_{jj}^{(i)} = k_{jj}^{(i)} m_{ij}^{(i)} - m_{jj}^{(i)} k_{ij}^{(i)} \\ \bar{k}^{(i)} = k_{ii}^{(i)} m_{jj}^{(i)} - m_{ii}^{(i)} k_{jj}^{(i)} \end{cases} \quad (2.74)$$

Os autovalores do método generalizado são estimados por:

$$\lambda_i^{(l)} = \frac{k_{ii}^{(l)}}{m_{ii}^{(l)}} \quad (2.75)$$

BATHE (1996, p.922) propôs que a convergência do método generalizado de Jacobi, para uma tolerância  $s$ , seja verificada por meio das seguintes condições:

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq 10^{-s} \quad (2.76)$$

$$\left[ \frac{(k_{ij}^{(l+1)})^2}{k_{ii}^{(l+1)} k_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s} \quad (2.77)$$

$$\left[ \frac{(m_{ij}^{(l+1)})^2}{m_{ii}^{(l+1)} m_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}, \quad \forall i, j \mid i < j \quad (2.78)$$

onde  $i = 1, \dots, n$  e  $l$  é a última iteração da varredura.

### 2.4.3 Método QR

O nome deste método se deve à notação utilizada no algoritmo que decompõe a matriz  $\mathbf{K}$  na forma:

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (2.79)$$

onde a matriz  $\mathbf{Q}$  é ortonormal e a matriz  $\mathbf{R}$  é triangular superior.

Com a expressão (2.79) obtém-se a seguinte transformação da matriz  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{R} \mathbf{Q} \quad (2.80)$$

Adotando-se  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$  e utilizando-se as expressões (2.79) e (2.80) define-se o seguinte algoritmo iterativo:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i \quad (2.81)$$

$$\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i \quad (2.82)$$

Numa iteração  $l$  tem-se

$$\mathbf{Q}_1^T \dots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{K} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_l = \mathbf{R}_l \mathbf{Q}_l = \mathbf{K}_{l+1} \quad (2.83)$$

Comparando-se a expressão (2.83) com o problema padrão de autovalor dado pela expressão (2.62) obtém-se

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{X} \quad (2.62)$$

Verifica-se que quando  $l \rightarrow \infty$  encontra-se:

$$\mathbf{K}_{l+1} \rightarrow \mathbf{X} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \dots \mathbf{Q}_l \rightarrow \Phi \quad (2.85)$$

BATHE (1996, p.931) considera que, na prática, é mais eficaz utilizar as matrizes de rotação de Jacobi para se obter a decomposição da matriz  $\mathbf{K}$  nas matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , utilizando-se

$$\mathbf{P}_{n,n-1}^T \dots \mathbf{P}_{3,1}^T \mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K} = \mathbf{R} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{P}_{3,1}^T \dots \mathbf{P}_{n,n-1}^T = \mathbf{Q} \quad (2.87)$$

onde  $\mathbf{P}_{j,i}$  é a matriz de rotação, dada pela expressão (2.64), que anula o termo  $k_{ij}$ .

#### 2.4.4 Método de Lanczos

Para se apresentar o método de Lanczos o problema generalizado de autovalor dado pela expressão (2.68) é reformulado por meio das seguintes expressões:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \quad (2.88)$$

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\varphi} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \quad (2.90)$$

Em seguida define-se a matriz de transformação  $\mathbf{Q}$  com  $m$  colunas e  $n$  linhas, onde  $m \leq n$ , que satisfaz as seguintes relações:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q} = \mathbf{I}_m \quad (2.92)$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q} = \mathbf{T} \quad (2.93)$$

Nas expressões (2.91), (2.92) e (2.93)  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $\mathbf{I}_m$  é uma matriz identidade de ordem  $m$  e  $\mathbf{T}$  é uma matriz tridiagonal de ordem  $m$ .

Substituindo-se a expressão (2.91) na expressão (2.90) e pré-multiplicando por  $\mathbf{Q}^T$  obtém-se

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.94)$$

Substituindo-se as relações (2.92) e (2.93) na expressão (2.94) obtém-se a transformação de Lanczos para o problema de autovalor dado pela expressão (2.68)

$$\mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{\lambda} \bar{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.95)$$

Os autovalores da expressão (2.95) são os inversos dos  $m$  maiores autovalores da expressão (2.68). Estes são obtidos de um problema com matriz de ordem  $n$ , enquanto aqueles



De acordo com GOLUB (2000, p. 49): “a partir de 1980 esse método se torna o método preferido para problemas de autovalor com grandes matrizes simétricas e esparsas”.

### 3 ELEMENTO DE BARRA ESPACIAL

Nesse capítulo é apresentada a formulação não-linear de um elemento finito para a barra espacial, utilizando-se o desenvolvimento elaborado por SCHULZ e ANDO (2007).

Nesta formulação não é incluída a torção por empenamento, pois se considera que sua implementação extrapola o escopo deste trabalho. Um estudo de empenamento em elemento finito pode ser encontrado no trabalho de SILVA (2001).

#### 3.1 CINEMÁTICA

Na Figura 3.1 é apresentado o sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  adotado. Denominam-se  $u$ ,  $v$  e  $w$  os deslocamentos de um ponto qualquer, respectivamente, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Denominam-se  $\zeta$ ,  $\xi$  e  $\eta$  os deslocamentos da origem de uma seção transversal ( $y=0$  e  $z=0$ ). Nas expressões seguintes, o apóstrofe denota a derivada em relação ao eixo longitudinal  $x$  ( $f' = \partial f / \partial x$ ).

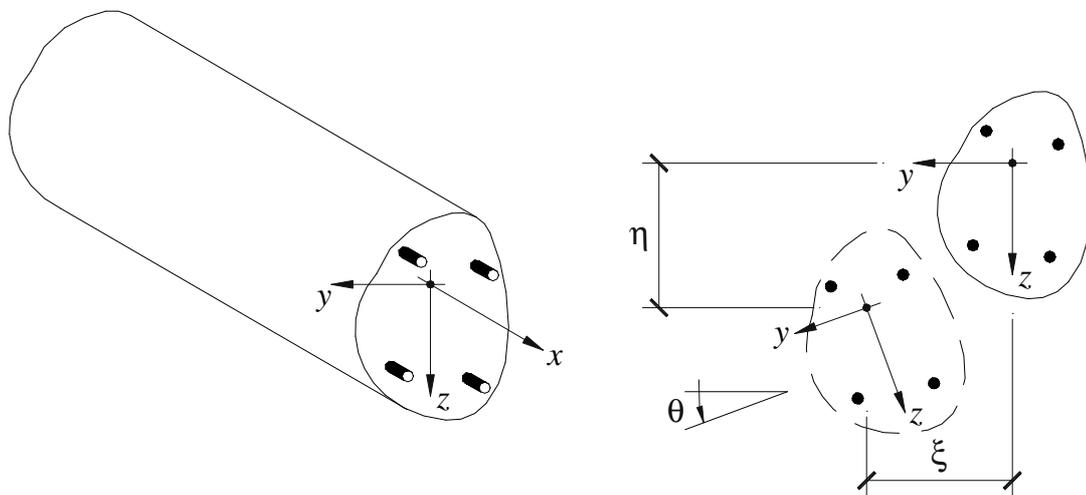


Figura 3.1 – Seção transversal de elemento de barra.

Para o desenvolvimento do elemento em análise são adotadas as seguintes hipóteses cinemáticas simplificadoras:

- l) considera-se aceitável a hipótese da indeformabilidade da seção transversal no próprio plano e denomina-se  $\theta$  a rotação da seção transversal em torno do eixo  $x$ ;
- m) admite-se o campo das pequenas rotações;
- n) as deformações de cisalhamento  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{xz}$ , a derivada da rotação  $\theta'$  e os produtos de segunda ordem, que envolvem as derivadas dos deslocamentos longitudinais  $u'$ , não são considerados relevantes para a determinação da deformação longitudinal  $\epsilon_x$ .

Considerando-se essas hipóteses, adotam-se as seguintes aproximações para os deslocamentos  $v$  e  $w$  de um ponto da seção:

$$\begin{aligned} v &= \xi - z \theta \\ w &= \eta + y \theta \end{aligned} \quad (3.104)$$

Das expressões (3.104) obtêm-se as seguintes relações para as derivadas em relação a  $y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial w}{\partial y} &= \theta \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\theta & \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

Derivando-se as expressões (3.104) em relação a  $x$ , e desprezando-se  $\theta'$  tem-se

$$\begin{aligned} v' &= \epsilon' \\ w' &= \eta' \end{aligned} \quad (3.106)$$

Considerando-se os termos relativos à não linearidade geométrica, as deformações de cisalhamento  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{xz}$  são dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Reordenando-se as expressões (3.107) tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} (1 + u') + v' \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w' \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} (1 + u') + w' \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v' \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.108)$$

Aplicando-se as hipóteses de que as deformações de cisalhamento  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{xz}$  e os produtos, que envolvem as derivadas dos deslocamentos  $u'$ , são desprezíveis, seguem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} + v' + w' \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + w' + v' \frac{\partial v}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (3.109)$$

Substituindo-se as expressões (3.105) e (3.106) na expressão (3.109) obtém-se as expressões

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\xi' - \eta' \theta \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\eta' + \xi' \theta\end{aligned}\quad (3.110)$$

que fornecem a seguinte aproximação para o deslocamento  $u$ :

$$u = \zeta - (y - z \theta) \xi' - (z + y \theta) \eta' \quad (3.111)$$

Desprezando-se os termos não lineares associados à derivada do deslocamento  $u$  na direção axial tem-se a seguinte expressão para a deformação longitudinal:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}(v')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 \quad (3.112)$$

Substituindo-se as expressões (3.106) e (3.111) na expressão (3.112) da deformação  $\varepsilon_x$  obtém-se

$$\varepsilon_x = \zeta' + \frac{\xi'^2}{2} + \frac{\eta'^2}{2} - (y - z \theta) \xi'' - (z + y \theta) \eta'' \quad (3.113)$$

### 3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA

Utilizando-se a expressão (3.113), a variação da deformação  $\varepsilon_x$  é determinada por:

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_x &= \delta(\zeta') + \xi' \delta(\xi') + \eta' \delta(\eta') \\ &\quad - y \delta(\xi'') - z \delta(\eta'') + z \delta(\theta \xi'') - y \delta(\theta \eta'')\end{aligned}\quad (3.114)$$

Na expressão (3.114) observa-se que a variação das deformações longitudinais  $\delta \varepsilon_x$  pode ser decomposta em duas parcelas, uma linear e outra não linear, dadas por

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_{x1} + \delta \varepsilon_{x2} \quad (3.115)$$

e definidas por

$$\delta \varepsilon_{x1} = \delta(\zeta') - y \delta(\xi'') - z \delta(\eta'') \quad (3.116)$$

$$\delta\epsilon_{x2} = \delta(\xi') \xi' + \delta(\eta') \eta' - [\delta(\theta) \eta'' + \delta(\eta'') \theta] y + [\delta(\theta) \xi'' + \delta(\xi'') \theta] z \quad (3.117)$$

Define-se o vetor de posição  $\mathbf{p}$  de um ponto na seção transversal como:

$$\mathbf{p} = [1 \quad y \quad z] \quad (3.118)$$

No contexto de uma solução por meio do método dos elementos finitos define-se o vetor de interpolação  $\mathbf{N}_\alpha$  de uma grandeza geométrica qualquer  $\alpha$  por meio de:

$$\alpha = \mathbf{N}_\alpha \mathbf{u} \quad (3.119)$$

onde  $\mathbf{u}$  são os deslocamentos nodais do elemento.

A componente linear  $\delta\epsilon_{x1}$  é interpolada por meio da expressão:

$$\delta\epsilon_{x1} = \mathbf{p} \mathbf{b}_1^T \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}_1 \mathbf{p}^T \quad (3.120)$$

onde a matriz de interpolação  $\mathbf{b}_1$  é

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{N}_{\xi'} \quad -\mathbf{N}_{\xi''} \quad -\mathbf{N}_{\eta''}] \quad (3.121)$$

A componente não linear  $\delta\epsilon_{x2}$  é obtida pela interpolação:

$$\delta\epsilon_{x2} = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{B}_2 \delta\mathbf{u} \quad (3.122)$$

onde  $\mathbf{B}_2$  é uma matriz simétrica ( $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2^T$ ) definida por

$$\mathbf{B}_2 = \sum \mathbf{B}_{2,k} p_k \quad (3.123)$$

Na expressão (3.123),  $\mathbf{B}_{2,k}$  são matrizes também simétricas associadas a componente  $p_k$  do vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{p}$ . Estas são determinadas por meio de

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2,1} &= \mathbf{N}_{\xi'} \mathbf{N}_{\xi'}^T + \mathbf{N}_{\eta'} \mathbf{N}_{\eta'}^T \\ \mathbf{B}_{2,2} &= -\mathbf{N}_{\eta'} \mathbf{N}_{\theta}^T - \mathbf{N}_{\theta} \mathbf{N}_{\eta'}^T \\ \mathbf{B}_{2,3} &= \mathbf{N}_{\xi''} \mathbf{N}_{\theta}^T + \mathbf{N}_{\theta} \mathbf{N}_{\xi''}^T \end{aligned} \quad (3.124)$$

Definem-se os vetores  $\mathbf{b}_{2,k}$ , que constituem os termos da matriz  $\mathbf{b}_2$ , por:

$$\mathbf{b}_{2,k} = \mathbf{B}_{2,k} \mathbf{u} \quad (3.125)$$

A componente não linear  $\delta\epsilon_{x2}$  é reescrita na forma

$$\delta\epsilon_{x2} = \delta\mathbf{u}^T \left( \sum \mathbf{B}_{2,k} p_k \right) \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^T \left( \sum \mathbf{B}_{2,k} \mathbf{u} p_k \right) = \delta\mathbf{u}^T \left( \sum \mathbf{b}_{2,k} p_k \right) \quad (3.126)$$

ou ainda

$$\delta\epsilon_{x2} = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{b}_2^T \delta\mathbf{u} \quad (3.127)$$

$$\delta\epsilon_{x2} = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{b}_2^T \delta\mathbf{U} \quad (3.128)$$

Define-se a matriz  $\mathbf{b}$  como

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \quad (3.129)$$

A variação das deformações longitudinais  $\delta\epsilon_x$  é portanto igual a

$$\delta\epsilon_x = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathbf{p} = \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{p} \quad (3.130)$$

onde  $\delta\boldsymbol{\epsilon}$  é o vetor da variação das deformações generalizadas.

Considerando-se além das deformações longitudinais, as deformações de cisalhamento associadas à torção de Saint-Venant, o princípio dos trabalhos virtuais conduz à equação de equilíbrio, onde, por simplicidade, são omitidos os termos relativos às forças de volume:

$$\int_V \delta\epsilon_x \sigma_x dV + \int_L \delta\theta' T_{sv} dL = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (3.131)$$

Na expressão (3.131),  $T_{sv}$  é o momento de torção de Saint-Venant,  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais do elemento,  $V$  representa o volume do elemento e  $L$  o seu comprimento.

O vetor dos esforços internos generalizados  $\mathbf{S}$  da seção transversal é definido por

$$\mathbf{S} = \int_A \mathbf{p} \sigma dA = \begin{bmatrix} N_x & -M_z & M_y \end{bmatrix}^T \quad (3.132)$$

onde  $\sigma$  é a tensão normal,  $N_x$  é a força normal,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores e  $dA$  representa o elemento de área da seção transversal.

As expressões (3.130), (3.131) e (3.132) fornecem a equação de equilíbrio do problema:

$$\int_L \mathbf{b} \mathbf{S} dL + \int_L \mathbf{N}_{\theta'} T_{sv} dL = \mathbf{F} \quad (3.133)$$

### 3.3 EQUAÇÃO INCREMENTAL

No processo numérico de resolução, além de verificar a equação de equilíbrio, necessita-se, também, avaliar uma nova aproximação para os deslocamentos por meio de uma equação linear incremental. As relações constitutivas incrementais são definidas pelas expressões

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S} &= \mathbf{E} \delta\epsilon_x = \mathbf{E} (\mathbf{p}^T \mathbf{b}^T \delta\mathbf{u}) \\ \delta T_{sv} &= G J_{sv} \delta\theta' = G J_{sv} \mathbf{N}_{\theta'} \delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.134)$$

A matriz constitutiva  $\mathbf{E}$  é dada por

$$\mathbf{E} = \int_A \mathbf{p} E \mathbf{p}^T dA \quad (3.135)$$

Nas expressões acima,  $E$  é o módulo de elasticidade tangente do aço em cada ponto e  $GJ_{SV}$  é o módulo de rigidez tangente à torção de Saint-Venant. De forma expandida, a matriz  $\mathbf{E}$  é igual a

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{1y} & E_{1z} \\ E_{y1} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{z1} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

onde os termos  $E_{ab}$  são determinados por meio da expressão:

$$E_{ab} = \int_A a b E dA \quad (3.137)$$

Como a variação da matriz  $\mathbf{b}$  não é nula, a partir da equação de equilíbrio (3.133) tem-se:

$$\int_L \delta \mathbf{b} \mathbf{S} dL + \int_L \mathbf{b} \delta \mathbf{S} dL + \int_L \mathbf{N}_{\theta'} \delta T_{SV} dL = \delta \mathbf{F} \quad (3.138)$$

Observa-se, a partir das expressões (3.121), (3.125) e (3.129), que

$$\delta \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_x = 0 \quad (3.139)$$

$$\delta \mathbf{b} \mathbf{S} = \delta \mathbf{b}_2 \mathbf{S} = \sum \delta \mathbf{b}_{2,k} S_k = \sum S_k \mathbf{B}_{2,k} \delta \mathbf{u} \quad (3.140)$$

Substituindo-se as expressões (3.134) e (3.140) na expressão (3.138) obtém-se a equação linear incremental

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{F} \quad (3.141)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez tangente do problema, definida por

$$\mathbf{K} = \int_L \left( \sum S_k \mathbf{B}_{2,k} \right) dL + \int_L \mathbf{b} \mathbf{E} \mathbf{b}^T dL + \int_L \mathbf{N}_{\theta'} GJ_{SV} \mathbf{N}_{\theta'}^T dL \quad (3.142)$$

### 3.4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

As integrais são obtidas numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre.

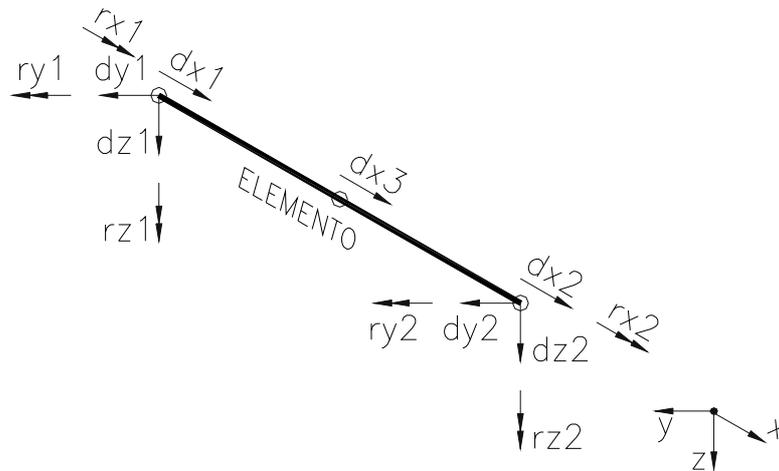


Figura 3.2 – Elemento finito de barra.

O elemento implementado é apresentado na Figura 3.2. Ele é constituído de dois nós, com seis graus de liberdade por nó (três deslocamentos e três rotações).

As funções de interpolação  $\mathbf{N}_\xi$  e  $\mathbf{N}_\eta$  são polinômios de terceiro grau. É usual adotar uma função de interpolação linear  $\mathbf{N}_\zeta$  entre os nós inicial e final do elemento.

Um deslocamento nodal adicional  $d_{x_3}$  na direção  $x$  é introduzido no meio da viga. Como demonstrado por CHAN (1982), este grau de liberdade adicional permite uma melhor interpolação em um elemento cuja posição do centro de gravidade varia em função do comportamento não linear físico.

O grau de liberdade adicional  $\Delta d_{x_3}$  é eliminado posteriormente por meio da técnica da condensação estática. A matriz de rigidez com 13 graus de liberdade é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta d_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

A expressão (3.143) fornece  $\Delta d_{x_3} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \Delta \mathbf{u}$ . A matriz de rigidez  $\hat{\mathbf{K}}$  condensada 12x12 é

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{21}^T \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \quad (3.144)$$

### 3.5 VARIAÇÃO ANALÍTICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

A matriz de rigidez tangente é expressa por

$$\mathbf{K} = \int_L \mathbf{b} \mathbf{E} \mathbf{b}^T dL + \int_L \mathbf{N}_{\theta'} GJ_{sv} \mathbf{N}_{\theta'}^T dL + \int_L \left( \sum S_k \mathbf{B}_{2,k} \right) dL \quad (3.145)$$

Um incremento na matriz  $\mathbf{K}$  pode ser expressa por

$$\Delta\mathbf{K} = \int_L \Delta\mathbf{b} \mathbf{E} \mathbf{b}^T dL + \int_L \mathbf{b} \mathbf{E} \Delta\mathbf{b}^T dL + \int_L \left( \sum \Delta S_k \mathbf{B}_{2,k} \right) dL \quad (3.146)$$

Os incrementos na expressão (3.146) podem ser expressos por

$$\Delta\mathbf{b} = \Delta\mathbf{b}_2 = \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{B}_2 \quad (3.147)$$

$$\Delta\mathbf{S} = \mathbf{E} \mathbf{b}^T \Delta\mathbf{u} \quad (3.148)$$

Considerando que a análise da estabilidade é feita ao longo do caminho de equilíbrio tem-se em um passo  $i$

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{F} \quad (3.149)$$

Dessa forma o incremento de deslocamentos pode ser expresso por

$$\Delta\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i) = (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F} \quad (3.150)$$

Define-se

$$\mathbf{u}_{F_i} = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F} \quad (3.151)$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \lambda_{i+1} - \lambda_i \quad (3.152)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \chi \mathbf{u}_{F_i} \quad (3.153)$$

Substituindo-se as expressões (3.147), (3.148) e (3.153) na expressão (3.146) obtém-se

$$\Delta\mathbf{K}_i = \chi \left[ \int_L \mathbf{u}_{F_i}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{E} \mathbf{b}^T dL + \int_L \mathbf{b} \mathbf{E} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{F_i} dL + \int_L \left( \mathbf{E} \mathbf{b}^T \mathbf{u}_{F_i} \mathbf{B}_2 \right) dL \right] \quad (3.154)$$

Supondo-se que o ponto crítico ocorra após o passo  $i$ , tem-se

$$(\mathbf{K}_i + \Delta\mathbf{K}_i) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.155)$$

Substituindo-se a expressão (3.154) na expressão (3.155) tem-se o problema de autovalor

$$(\mathbf{K}_i + \chi \bar{\mathbf{K}}_i) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.156)$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \int_L \mathbf{u}_{F_i}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{E} \mathbf{b}^T dL + \int_L \mathbf{b} \mathbf{E} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{F_i} dL + \int_L \left( \mathbf{E} \mathbf{b}^T \mathbf{u}_{F_i} \mathbf{B}_2 \right) dL \quad (3.157)$$

A força crítica  $\mathbf{F}_{cr}$  correspondente é expressa por

$$\mathbf{F}_{cr} = (\lambda_i + \chi) \mathbf{F} \quad (3.158)$$

## 4 DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTO DE CASCA PLANA

Neste capítulo é apresentada a formulação Lagrangeana Total de um elemento finito de casca plana baseado nas seguintes hipóteses da teoria de Kirchhoff para placas planas:

- a) as seções transversais ao plano médio permanecem planas durante o processo de deformação;
- b) as deformações transversais ao plano médio da casca são pequenas e podem ser desprezadas (COOK, 1989, p. 315 e ZIENKIEWICZ, 1991, p. 3).

A formulação tem como base o elemento finito de placa fina triangular de Kirchhoff conhecido pela sigla DKT (Discrete Kirchhoff Triangle). Dessa forma considera-se que o elemento não é adequado para modelar estruturas com paredes espessas. A formulação de um elemento finito de casca com parede espessa é proposta como tema de futuros trabalhos.

Adota-se que a configuração inicial o elemento é plana, isto é, o elemento não apresenta curvatura. Desta forma, apesar do elemento apresentar comportamento de membrana, a representação de estruturas com paredes curvas com este elemento pode implicar em resultados menos precisos ou exigir uma maior discretização. Considera-se que o desenvolvimento de um elemento finito de casca com curvatura está acima do escopo deste trabalho, e consta como proposta de futuros trabalhos.

### 4.1 CINEMÁTICA

Na Figura 4.1 observa-se que os deslocamentos  $u$  e  $v$ , respectivamente nas direções  $x$  e  $y$ , para um ponto numa lamela transversal ao plano médio são dados por

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z r_y(x, y) \quad (4.159)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z r_x(x, y) \quad (4.160)$$

onde  $u_0$  e  $v_0$  são os deslocamentos lineares nas direções  $x$  e  $y$  e  $r_x$  e  $r_y$  são os deslocamentos angulares em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

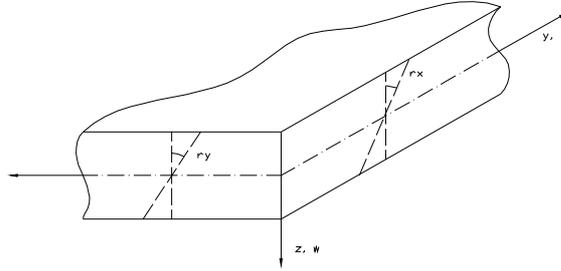


Figura 4.1 – Deslocamentos em elemento de casca plana.

O deslocamento  $w$  na direção  $z$  é considerado constante ao longo da espessura da lamela.

A seguinte notação é adotada para as derivadas de uma função  $f$  qualquer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} \quad (4.161)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{,xx} \quad (4.162)$$

Conforme mostra WASHIZU (1975, p.55), considerando-se os efeitos de segunda ordem, as deformações específicas podem ser calculadas pelas expressões:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x})^2 + \frac{1}{2}(v_{,x})^2 + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \quad (4.163)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y})^2 + \frac{1}{2}(v_{,y})^2 + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \quad (4.164)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \quad (4.165)$$

onde  $u_{,x}$ ,  $v_{,x}$  e  $w_{,x}$  representam as derivadas dos deslocamentos em relação a  $x$  e  $u_{,y}$ ,  $v_{,y}$  e  $w_{,y}$  representam as derivadas dos deslocamentos em relação a  $y$  conforme a notação definida pela expressão (4.161).

Desprezando-se os termos não-lineares, que não estão relacionados com a flexão, as expressões (4.163), (4.164) e (4.165) são simplificadas para

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \quad (4.166)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \quad (4.167)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \quad (4.168)$$

Derivando as expressões (4.159) e (4.160) obtém-se

$$u_{,x} = u_{0,x} + r_{y,x} z \quad (4.169)$$

$$u_{,y} = u_{0,y} + r_{y,y} z \quad (4.170)$$

$$v_{,x} = v_{0,x} - r_{x,x} z \quad (4.171)$$

$$v_{,y} = v_{0,y} - r_{x,y} z \quad (4.172)$$

Considerando-se a hipótese de pequenas rotações pode-se adotar

$$w_{,x} = -r_y \quad (4.173)$$

$$w_{,y} = r_x \quad (4.174)$$

Substituindo-se as expressões (4.169) a (4.174) nas expressões (4.166), (4.167) e (4.168), obtém-se as seguintes expressões para as deformações específicas:

$$\varepsilon_x = u_{0,x} + r_{y,x} z + \frac{1}{2} (r_y)^2 \quad (4.175)$$

$$\varepsilon_y = v_{0,y} - r_{x,y} z + \frac{1}{2} (r_x)^2 \quad (4.176)$$

$$\gamma_{xy} = u_{0,y} + v_{0,x} + (r_{y,y} - r_{x,x}) z - r_y r_x \quad (4.177)$$

## 4.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

Utilizando-se o cálculo variacional, a partir das expressões (4.175), (4.176) e (4.177), obtém-se as variações das deformações específicas dadas pelas seguintes expressões:

$$\delta\varepsilon_x = \delta u_{0,x} + z \delta r_{y,x} + r_y \delta r_y \quad (4.178)$$

$$\delta\varepsilon_y = \delta v_{0,y} - z \delta r_{x,y} + r_x \delta r_x \quad (4.179)$$

$$\delta\gamma_{xy} = \delta u_{0,y} + \delta v_{0,x} + z(\delta r_{y,y} - \delta r_{x,x}) - (r_x \delta r_y + r_y \delta r_x) \quad (4.180)$$

As expressões (4.178), (4.179) e (4.180) podem ser reformuladas como a soma de uma parcela linear e uma parcela não linear

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_{xL} + \delta\varepsilon_{xNL} \quad (4.181)$$

$$\delta\varepsilon_y = \delta\varepsilon_{yL} + \delta\varepsilon_{yNL} \quad (4.182)$$

$$\delta\gamma_{xy} = \delta\gamma_{xyL} + \delta\gamma_{xyNL} \quad (4.183)$$

onde as parcelas lineares são

$$\delta\varepsilon_{xL} = \delta u_{0,x} + z \delta r_{y,x} \quad (4.184)$$

$$\delta\epsilon_{yL} = \delta v_{0,y} - z \delta r_{x,y} \quad (4.185)$$

$$\delta\gamma_{xyL} = \delta u_{0,y} + \delta v_{0,x} + z(\delta r_{y,y} - \delta r_{x,x}) \quad (4.186)$$

e as parcelas não-lineares são

$$\delta\epsilon_{xNL} = r_y \delta r_y \quad (4.187)$$

$$\delta\epsilon_{yNL} = r_x \delta r_x \quad (4.188)$$

$$\delta\gamma_{xyNL} = -r_x \delta r_y - r_y \delta r_x \quad (4.189)$$

Na abordagem do método de elementos finitos isoparamétricos uma grandeza geométrica qualquer  $\alpha$  é obtida por

$$\alpha = \mathbf{N}_\alpha \mathbf{u} \quad (4.190)$$

onde  $\mathbf{N}_\alpha$  é um vetor de funções de interpolação e  $\mathbf{u}$  é um vetor de deslocamentos nodais.

Utilizando-se a expressão (4.190), os deslocamentos lineares e angulares são dados por

$$u_0 = \mathbf{N}_u \mathbf{u} \quad (4.191)$$

$$v_0 = \mathbf{N}_v \mathbf{u} \quad (4.192)$$

$$r_x = \mathbf{N}_{r_x} \mathbf{u} \quad (4.193)$$

$$r_y = \mathbf{N}_{r_y} \mathbf{u} \quad (4.194)$$

As derivadas dos deslocamentos são obtidas pela derivação das funções de forma e definidas por

$$u_{0,x} = \mathbf{N}_{u_x} \mathbf{u} \quad u_{0,y} = \mathbf{N}_{u_y} \mathbf{u} \quad (4.195)$$

$$v_{0,x} = \mathbf{N}_{v_x} \mathbf{u} \quad v_{0,y} = \mathbf{N}_{v_y} \mathbf{u} \quad (4.196)$$

$$r_{x,x} = \mathbf{N}_{r_{x,x}} \mathbf{u} \quad r_{x,y} = \mathbf{N}_{r_{x,y}} \mathbf{u} \quad (4.197)$$

$$r_{y,x} = \mathbf{N}_{r_{y,x}} \mathbf{u} \quad r_{y,y} = \mathbf{N}_{r_{y,y}} \mathbf{u} \quad (4.198)$$

Utilizando-se as expressões (4.191) a (4.198), as parcelas lineares das deformações específicas, dadas pelas expressões (4.184), (4.185) e (4.186), podem ser reescritas como

$$\delta\epsilon_{xL} = (\mathbf{N}_{u_x} + z \mathbf{N}_{r_{y,x}}) \delta \mathbf{u} \quad (4.199)$$

$$\delta\epsilon_{yL} = (\mathbf{N}_{v_y} - z \mathbf{N}_{r_{x,y}}) \delta \mathbf{u} \quad (4.200)$$

$$\delta\gamma_{xyL} = [(\mathbf{N}_{u_y} + \mathbf{N}_{v_x}) + z(\mathbf{N}_{r_{y,y}} - \mathbf{N}_{r_{x,x}})] \delta \mathbf{u} \quad (4.201)$$

Definindo-se o vetor de posição  $\mathbf{p}$  de um ponto na seção transversal por meio de

$$\mathbf{p} = [1 \quad z] \quad (4.202)$$

as parcelas lineares das deformações específicas, dadas pelas expressões (4.199), (4.200) e (4.201), apresentam a seguinte formulação:

$$\delta\mathcal{E}_{x_L} = \mathbf{p} \mathbf{b}_{x_L}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.203)$$

$$\delta\mathcal{E}_{y_L} = \mathbf{p} \mathbf{b}_{y_L}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.204)$$

$$\delta\gamma_{xy_L} = \mathbf{p} \mathbf{b}_{xy_L}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.205)$$

onde

$$\mathbf{b}_{x_L} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x} & \mathbf{N}_{r_{y,x}} \end{bmatrix} \quad (4.206)$$

$$\mathbf{b}_{y_L} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{v,y} & -\mathbf{N}_{r_{x,y}} \end{bmatrix} \quad (4.207)$$

$$\mathbf{b}_{xy_L} = \begin{bmatrix} (\mathbf{N}_{u,y} + \mathbf{N}_{v,x}) & (\mathbf{N}_{r_{y,y}} - \mathbf{N}_{r_{x,x}}) \end{bmatrix} \quad (4.208)$$

Procedendo-se da mesma forma, obtém-se para as parcelas não lineares, dadas pelas expressões (4.187), (4.188) e (4.189), as seguintes expressões:

$$\delta\mathcal{E}_{x_{NL}} = \mathbf{u}^T \mathbf{N}_{r_y}^T \mathbf{N}_{r_y} \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{B}_{x_{NL}} \delta\mathbf{u} \quad (4.209)$$

$$\delta\mathcal{E}_{y_{NL}} = \mathbf{u}^T \mathbf{N}_{r_x}^T \mathbf{N}_{r_x} \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{B}_{y_{NL}} \delta\mathbf{u} \quad (4.210)$$

$$\delta\gamma_{xy_{NL}} = \mathbf{u}^T (-\mathbf{N}_{r_y}^T \mathbf{N}_{r_x} - \mathbf{N}_{r_x}^T \mathbf{N}_{r_y}) \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{B}_{xy_{NL}} \delta\mathbf{u} \quad (4.211)$$

Essas parcelas não lineares podem ser reescritas num formato semelhante ao das parcelas lineares nas expressões (4.45) a (4.47) por meio das relações

$$\delta\mathcal{E}_{x_{NL}} = \mathbf{p} \mathbf{b}_{x_{NL}}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.212)$$

$$\delta\mathcal{E}_{y_{NL}} = \mathbf{p} \mathbf{b}_{y_{NL}}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.213)$$

$$\delta\gamma_{xy_{NL}} = \mathbf{p} \mathbf{b}_{xy_{NL}}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.214)$$

onde

$$\mathbf{b}_{x_{NL}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{x_{NL}} \mathbf{u}) & (\mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

$$\mathbf{b}_{y_{NL}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{y_{NL}} \mathbf{u}) & (\mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (4.216)$$

$$\mathbf{b}_{xy_{NL}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{xy_{NL}} \mathbf{u}) & (\mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

A matriz de posição  $\mathbf{P}$  é definida por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

As expressões (4.206), (4.207) e (4.208) podem ser combinadas no vetor de interpolação linear  $\mathbf{b}_L$  dado por

$$\mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{x_L} & \mathbf{b}_{y_L} & \mathbf{b}_{xy_L} \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

De forma semelhante, as expressões (4.215), (4.216) e (4.217) constituem os termos do vetor de interpolação não-linear  $\mathbf{b}_{NL}$  dado por

$$\mathbf{b}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{x_{NL}} & \mathbf{b}_{y_{NL}} & \mathbf{b}_{xy_{NL}} \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

O vetor de interpolação  $\mathbf{b}$  resulta da seguinte soma dos vetores (4.219) e (4.220):

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_L + \mathbf{b}_{NL} \quad (4.221)$$

Utilizando-se as expressões (4.209) a (4.214) e as definições (4.218) e (4.221), pode-se condensar as expressões (4.181) a (4.183) na seguinte notação matricial:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} \quad (4.222)$$

### 4.3 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

WASHIZU (1975, p.64) apresenta o princípio dos trabalhos virtuais na teoria de deslocamentos finitos por meio da expressão:

$$\iiint_V (\sigma^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} - \bar{P}^\lambda \delta u^\lambda) dV - \iint_{S_1} \bar{F}^\lambda \delta u^\lambda dA = 0 \quad (4.223)$$

onde  $\lambda, \mu = x, y, z$ ,  $\bar{P}$  representa as forças de volume e  $\bar{F}$  representa as forças externas por unidade de área.

Desconsiderando-se, por simplicidade, as forças de volume e adotando-se uma notação matricial a expressão (4.223) pode ser reescrita como

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (4.224)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor das forças externas,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor de tensões,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de deformações específicas e  $dV$  é um elemento infinitesimal de volume.

Substituindo-se a expressão (4.222) na expressão (4.224) obtém-se

$$\int_V \mathbf{b} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{F} \quad (4.225)$$

Separando-se a integral de volume em uma integral ao longo da seção e outra integral ao longo da espessura  $z$  da casca plana, tem-se

$$\int_A \mathbf{b} \int \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} dz dA = \mathbf{F} \quad (4.226)$$

Define-se o vetor de esforços internos  $\mathbf{S}$  por meio de

$$\mathbf{S} = \int \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} dz = \int \begin{bmatrix} p & (0) & (0) \\ (0) & p & (0) \\ (0) & (0) & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = [N_x \quad M_x \quad N_y \quad M_y \quad N_{xy} \quad M_{xy}]^T \quad (4.227)$$

Utilizando-se a expressão (4.227) na expressão (4.226) obtém-se a equação de equilíbrio

$$\int_A \mathbf{b} \mathbf{S} dA = \mathbf{F} \quad (4.228)$$

#### 4.4 DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTO DE CASCA PLANA

O desenvolvimento do elemento finito de casca plana parte da formulação isoparamétrica de um elemento plano quadrangular cuja seção média tem 1 nó em cada vértice e 2 nós intermediários em cada lado, totalizando 12 nós.

A Figura 4.2 apresenta a numeração adotada para os nós do elemento plano quadrangular.

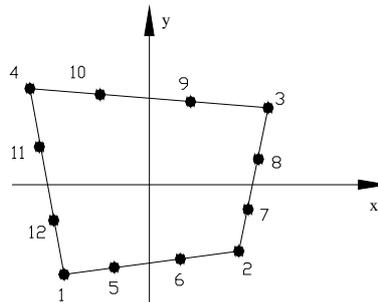


Figura 4.2 – Numeração dos nós do elemento de casca plana.

Adotando-se a proposta de ZIENKIEWICZ (1998, p.122), a função de interpolação para cada nó do vértice  $i$  deste elemento é dada por

$$N_{vert_i} = \frac{1}{32} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)] \quad (4.229)$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  são as coordenadas naturais,  $\xi_0 = \xi\xi_i$  e  $\eta_0 = \eta\eta_i$ .

Em cada nó intermediário tem-se para  $\xi_i = \pm 1$  e  $\eta_i = \pm \frac{1}{3}$

$$N_{\text{int}_i} = \frac{9}{32}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0) \quad (4.230)$$

Quando  $\xi_i = \pm \frac{1}{3}$  e  $\eta_i = \pm 1$  tem-se

$$N_{\text{int}_i} = \frac{9}{32}(1 + \eta_0)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0) \quad (4.231)$$

A grandeza geométrica qualquer  $\alpha$ , dada pela expressão (4.190), pode ser apresentada na notação matricial

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\text{vert}} \\ \mathbf{N}_{\text{int}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{vert}} \\ \mathbf{u}_{\text{int}} \end{bmatrix} \quad (4.232)$$

onde  $\mathbf{u}_{\text{inter}}$  é o vetor de deslocamentos nós intermediários e  $\mathbf{u}_{\text{vert}}$  é o vetor de deslocamentos dos nós dos vértices.

Pode-se reduzir o tamanho das matrizes utilizando-se um processo de condensação composto de duas etapas: uma relacionando os deslocamentos associados ao plano da casca e outra relacionando a flexão da chapa e rotações correlatas.

A Figura 4.3 apresenta os eixos ortogonais  $s$  e  $n$  considerados para a borda 1-2 de comprimento  $L$  entre os vértices 1 e 2.

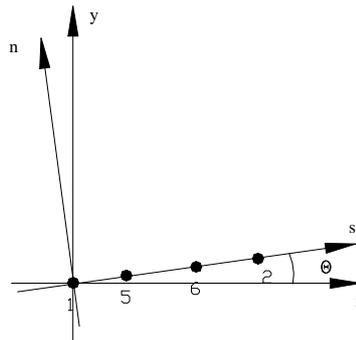


Figura 4.3 – Eixos da borda 1-2 do elemento de casca plana.

Para a primeira etapa assumem-se as seguintes hipóteses ao longo de cada borda do elemento:

- o deslocamento  $u_s$  na direção  $s$  tem variação linear;
- o deslocamento  $u_n$  na direção  $n$  tem uma variação dada por uma curva do terceiro grau;
- a rotação  $r_z$  é uma derivada do deslocamento  $u_n(s)$  em torno do eixo  $z$ .

Aplicando-se a primeira hipótese na borda 1-2 tem-se:

$$u_{s_5} = \frac{2}{3}u_{s_1} + \frac{1}{3}u_{s_2} \quad (4.233)$$

$$u_{s_6} = \frac{1}{3}u_{s_1} + \frac{2}{3}u_{s_2} \quad (4.234)$$

Agrupando-se as expressões (4.233) e (4.234), tem-se o produto matricial

$$\begin{bmatrix} u_{s_5} \\ u_{s_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ u_{s_2} \end{bmatrix} \quad (4.235)$$

Ao longo da direção  $n$ , os deslocamentos  $u_n$  são interpolados por uma equação do terceiro grau definida por

$$u_n(s) = as^3 + bs^2 + cs + d \quad (4.236)$$

Com as condições de contorno

$$u_n(0) = u_{n_1} \quad (4.237)$$

$$u_n(L) = u_{n_2} \quad (4.238)$$

$$\frac{du_n}{ds}(0) = r_{z_1} \quad (4.239)$$

$$\frac{du_n}{ds}(L) = r_{z_2} \quad (4.240)$$

determinam-se as seguintes relações para os nós 5 e 6:

$$\begin{bmatrix} u_{n_5} \\ r_{z_5} \\ u_{n_6} \\ r_{z_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{27} & \frac{4L}{27} & \frac{7}{27} & -\frac{2L}{27} \\ -\frac{4}{3L} & 0 & \frac{4}{3L} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{27} & \frac{2L}{27} & \frac{20}{27} & -\frac{4L}{27} \\ -\frac{4}{3L} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n_1} \\ r_{z_1} \\ u_{n_2} \\ r_{z_2} \end{bmatrix} \quad (4.241)$$

Agrupando-se as expressões (4.235) e (4.241) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} u_{s_5} \\ u_{n_5} \\ r_{z_5} \\ u_{s_6} \\ u_{n_6} \\ r_{z_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{27} & \frac{4L}{27} & 0 & \frac{7}{27} & -\frac{2L}{27} \\ 0 & -\frac{4}{3L} & 0 & 0 & \frac{4}{3L} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{27} & \frac{2L}{27} & 0 & \frac{20}{27} & -\frac{4L}{27} \\ 0 & -\frac{4}{3L} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ u_{n_1} \\ r_{z_1} \\ u_{s_2} \\ u_{n_2} \\ r_{z_2} \end{bmatrix} \quad (4.242)$$

As seguintes hipóteses são adotadas na segunda etapa da condensação:

- a) os deslocamentos verticais  $u_z$  variam ao longo das bordas, na direção  $s$ , de acordo com uma variação polinomial de terceiro ;
- b) a rotação  $r_s$  tem uma variação linear em torno do eixo  $s$ ;
- c) a rotação  $r_n$  é uma derivada do deslocamento  $u_z(s)$  ao longo do eixo  $s$ .

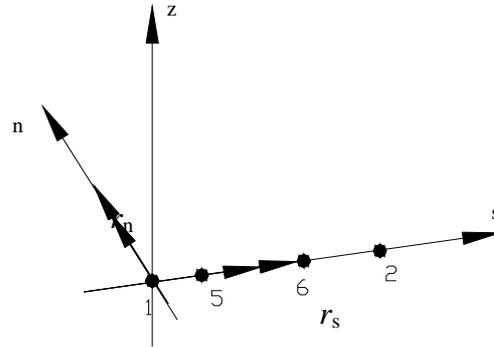


Figura 4.4 – Rotações no elemento de casca plana.

Com a convenção adotada para o sentido positivo das rotações na Figura 4.4 verifique-se que

$$r_n = -\frac{du_z}{ds} \quad (4.243)$$

Aplicando-se as condições de contorno

$$r_s(0) = r_{s_1} \quad (4.244)$$

$$r_s(L) = r_{s_2} \quad (4.245)$$

$$u_z(0) = u_{z_1} \quad (4.246)$$

$$u_z(L) = u_{z_2} \quad (4.247)$$

$$\frac{du_z}{ds}(0) = -r_{n_1} \quad (4.248)$$

$$\frac{du_z}{ds}(L) = -r_{n_2} \quad (4.249)$$

obtém-se as relações

$$\begin{bmatrix} u_{z_5} \\ r_{s_5} \\ r_{n_5} \\ u_{z_6} \\ r_{s_6} \\ r_{n_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{27} & 0 & -\frac{4L}{27} & \frac{7}{27} & 0 & \frac{2L}{27} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3L} & 0 & 0 & -\frac{4}{3L} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{27} & 0 & -\frac{2L}{27} & \frac{20}{27} & 0 & \frac{4L}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3L} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{z_1} \\ r_{s_1} \\ r_{n_1} \\ u_{z_2} \\ r_{s_2} \\ r_{n_2} \end{bmatrix} \quad (4.250)$$





$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\text{vert}} \\ \mathbf{N}_{\text{int}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{vert}} \\ \mathbf{T} \mathbf{u}_{\text{vert}} \end{bmatrix} = (\mathbf{N}_{\text{vert}}^T + \mathbf{N}_{\text{int}}^T \mathbf{T}) \mathbf{u}_{\text{vert}} \quad (4.263)$$

ou

$$\alpha = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{u}_{\text{vert}} \quad (4.264)$$

onde a função de forma modificada  $\tilde{\mathbf{N}}$  é obtida por

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_{\text{vert}} + \mathbf{N}_{\text{int}} \mathbf{T}^T \quad (4.265)$$

#### 4.5 EQUAÇÃO INCREMENTAL

A equação incremental necessária no processo de solução não-linear é determinada mediante a variação da expressão (4.228)

$$\delta \left( \int_A \mathbf{b} \mathbf{S} dA \right) = \delta \mathbf{F} \quad (4.266)$$

Dessa forma obtém-se

$$\int_A \delta \mathbf{b} \mathbf{S} dA + \int_A \mathbf{b} \delta \mathbf{S} dA = \delta \mathbf{F} \quad (4.267)$$

A expressão (4.221) da matriz  $\mathbf{b}$  fornece a relação

$$\delta \mathbf{b} = \delta \mathbf{b}_L + \delta \mathbf{b}_{NL} \quad (4.268)$$

Como a componente linear  $\mathbf{b}_L$  não apresenta variação tem-se

$$\delta \mathbf{b}_L = \mathbf{0} \quad (4.269)$$

Substituindo-se as expressões (4.215), (4.216), (4.217), (4.220) e (4.269) na expressão (4.268) obtém-se

$$\delta \mathbf{b} = \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u} \quad (4.270)$$

onde

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xNL} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{yNL} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{xyNL} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.271)$$

A segunda parcela da expressão (4.267) é determinada da expressão (4.227), cuja variação resulta em

$$\delta \mathbf{S} = \int \mathbf{P} \delta \boldsymbol{\sigma} dz \quad (4.272)$$

A variação da relação constitutiva do material pode ser expressa por

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.273)$$

onde  $\mathbf{d}$  é a matriz de rigidez do material (COOK, 1989, p. 20) dada por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{11} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.274)$$

Substituindo-se a expressão (4.222) na expressão (4.273) obtém-se a relação

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} \mathbf{P}^T \mathbf{b}^T \delta\mathbf{U} \quad (4.275)$$

que inserida na expressão (4.272) fornece

$$\delta\mathbf{S} = \int \mathbf{P} \mathbf{d} \mathbf{P}^T dz \mathbf{b}^T \delta\mathbf{u} \quad (4.276)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é definida pela seguinte integração:

$$\mathbf{D} = \int \mathbf{P} \mathbf{d} \mathbf{P}^T dz \quad (4.277)$$

A partir das expressões (4.267), (4.270), (4.276) e (4.277) obtém-se a equação incremental

$$\mathbf{K} \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{F} \quad (4.278)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez tangente definida por

$$\mathbf{K} = \int_A (\mathbf{B}_{NL} \mathbf{S} + \mathbf{b} \mathbf{D} \mathbf{b}^T) dA \quad (4.279)$$

$$\mathbf{K} = \int_A \left( \begin{bmatrix} N_x \mathbf{B}_{xNL} & N_y \mathbf{B}_{yNL} & N_{xy} \mathbf{B}_{xyNL} \end{bmatrix} + \mathbf{b} \mathbf{D} \mathbf{b}^T \right) dA \quad (4.280)$$

Utilizando-se a expressão (4.221), a expressão (4.279) da matriz de rigidez pode ser decomposta na soma

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} \quad (4.281)$$

A parcela  $\mathbf{K}_L$  é a matriz de rigidez elástica linear e é dada por

$$\mathbf{K}_L = \int_A \mathbf{b}_L \mathbf{D} \mathbf{b}_L^T dA \quad (4.282)$$

O termo  $\mathbf{K}_{NL}$  representa a parcela não-linear que resulta da expressão

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_A (\mathbf{B}_{NL} \mathbf{S} + \mathbf{b}_{NL} \mathbf{D} \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \mathbf{D} \mathbf{b}_{NL}^T) dA \quad (4.283)$$

Verifica-se que o primeiro termo da integral na expressão (4.283) depende apenas da geometria da estrutura e das cargas aplicadas, correspondendo à “matriz de rigidez geométrica” (BAZANT, 2003, p.76). Os demais termos de  $\mathbf{K}_{NL}$  apresentam a influência dos deslocamentos nodais na variação da rigidez da estrutura.

#### 4.6 VARIACÃO ANALÍTICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Um incremento na matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  pode ser expresso por

$$\Delta\mathbf{K} = \int_A \left( \mathbf{B}_{NL} \Delta\mathbf{S} + \Delta\mathbf{b} \mathbf{D} \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \mathbf{D} \Delta\mathbf{b}^T \right) dA \quad (4.284)$$

Os incrementos na expressão (3.146) podem ser expressos por

$$\Delta\mathbf{b} = \Delta\mathbf{b}_{NL} = \mathbf{B}_{NL} \Delta\mathbf{u} \quad (4.285)$$

$$\Delta\mathbf{S} = \mathbf{D} \mathbf{b}^T \Delta\mathbf{u} \quad (4.286)$$

Considerando que, em cada passo  $i$  da determinação do caminho de equilíbrio tem-se

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{F} \quad (4.287)$$

o incremento de deslocamentos pode ser expresso por

$$\Delta\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i) = (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F} \quad (4.288)$$

Define-se

$$\mathbf{u}_{F_i} = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F} \quad (4.289)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \chi \mathbf{u}_{F_i} \quad (4.290)$$

Substituindo-se as expressões (3.147), (3.148) e (3.153) na expressão (3.146) obtém-se

$$\Delta\mathbf{K}_i = \chi \int_A \left( \mathbf{B}_{NL} \mathbf{D} \mathbf{b}^T \mathbf{u}_{F_i} + \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_{F_i} \mathbf{D} \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \mathbf{D} (\mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_{F_i})^T \right) dA \quad (4.291)$$

Supondo-se que o ponto crítico ocorre após o passo  $i$  do caminho de equilíbrio tem-se

$$(\mathbf{K}_i + \Delta\mathbf{K}_i) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.292)$$

Substituindo-se a expressão (3.154) na expressão (3.155) tem-se o problema de autovalor

$$(\mathbf{K}_i + \chi \bar{\mathbf{K}}_i) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.293)$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \int_A \left( \mathbf{B}_{NL} \mathbf{D} \mathbf{b}^T \mathbf{u}_{F_i} + \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_{F_i} \mathbf{D} \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \mathbf{D} (\mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_{F_i})^T \right) dA \quad (4.294)$$

A força crítica  $\mathbf{F}_{cr}$  correspondente é calculada pela expressão

$$\mathbf{F}_{cr} = (\lambda_i + \chi) \mathbf{F} \quad (4.295)$$

## **5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE INSTABILIDADE**

### **5.1 O PROBLEMA DE INSTABILIDADE**

Neste capítulo são apresentados aspectos do problema de instabilidade para uma estrutura modelada por elementos finitos, e é feita uma formulação variacional que resulta num problema de autovalor.

GONÇALVES e CAMOTIM (2004, p.1473) citam que tem ocorrido um aumento na utilização de aço inoxidável e alumínio em estruturas. Esse aumento ocorre em função de distintos aspectos desses materiais, como a alta relação resistência/peso, resistência à corrosão, aspectos estéticos, facilidade de manutenção e versatilidade de fabricação.

De acordo com esses autores a busca de menores custos aliada a exigências estéticas leva a projetos estruturais com elementos esbeltos e de parede fina. Como esses elementos são muito susceptíveis a flambagem local e global, esses projetos devem analisar os fenômenos de instabilidade que possam ocorrer nessas estruturas.

### **5.2 CAMINHO DE EQUILÍBRIO**

Segundo FELLIPA (2001, p.2.9), a análise não-linear de estruturas tem como objetivo obter a resposta de estruturas não-lineares por simulação, que envolve uma combinação de modelagem matemática, métodos de discretização e técnicas numéricas.

FALZON e HITCHINGS (2006, p.1) argumentam que, na maioria dos casos práticos de estruturas, o analista quer conhecer, além do limite de carga aplicável, a progressão do comportamento da estrutura. Dessa forma, a análise é feita com carregamentos incrementais, a fim de se obter uma seqüência de pontos que representam possíveis configurações ou estados da estrutura em equilíbrio estático.

Esse comportamento estático é caracterizado por uma relação força-deslocamento que pode ser visualizada na forma de um diagrama, sendo denominado caminho de equilíbrio.

O caminho de equilíbrio tem início num estado de referência que pode ser escolhido arbitrariamente. A Figura 5.1 apresenta um caminho de equilíbrio numa estrutura com apenas um grau de liberdade.

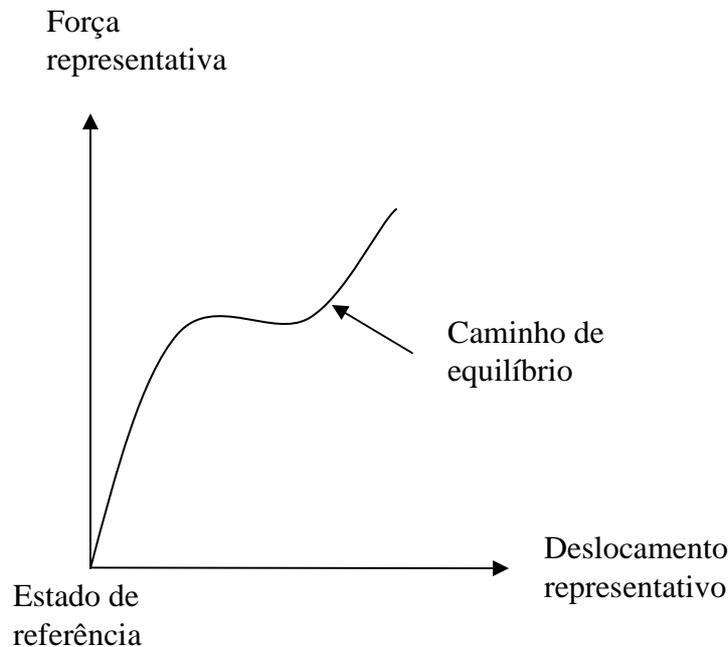


Figura 5.1 – Caminho de equilíbrio.

Os seguintes pontos do caminho de equilíbrio apresentam interesse especial:

- pontos de falha – em que o caminho é interrompido devido a falha física;
- pontos de inflexão – em que a tangente ao caminho é vertical;
- pontos críticos – em que a tangente ao caminho é paralela ao eixo dos deslocamentos.

GEERS (1999) salienta que a análise não linear de estruturas é frequentemente afetada pela presença de pontos de estabilidade crítica ou caminhos de equilíbrio instáveis, e que a pesquisa desse tema nas últimas décadas resultou numa variedade de soluções técnicas. Uma das maiores dificuldades na obtenção do caminho de equilíbrio em problemas não lineares é a passagem por pontos críticos.

Segundo MEMON e SU (2004), a utilização do método de Newton-Raphson com controle de força foi um dos primeiros métodos utilizados para encontrar soluções no caminho de equilíbrio, mas o método falha próximo ao ponto crítico.

Muitos métodos têm sido propostos para lidar com o problema inerente de pontos críticos. Um dos métodos mais diretos é a supressão de iterações de equilíbrio próximo a pontos limites. Bergan (*apud* GEERS, 1999) desenvolve esse método utilizando a rigidez para detectar a necessidade de supressão.

O método de molas artificiais proposto por Wright e Gaylord (*apud* GEERS, 1999) retorna a matriz de rigidez tangente a sua condição positiva definida adicionando molas artificiais, que é efetivo apenas para problemas de “snap-through”.

Outro método freqüentemente utilizado é o controle direto do deslocamento. Nesse método um único componente de deslocamento é tomado como parâmetro de controle definido e a correspondente carga é a incógnita. Argyris (*apud* GEERS, 1999) desenvolve inicialmente esse método, que é aprimorado por Batoz e Dhett (*apud* GEERS, 1999) para preservar a simetria da matriz de rigidez. Esse método falha quando existe um “snap back” no caminho de carregamento.

Uma importante classe de métodos é conhecida como método do comprimento de arco constante. Riks e Wemper (*apud* GEERS, 1999) são os primeiros a propor a inclusão de uma equação de restrição no procedimento iterativo de Newton-Raphson. Essa equação de restrição geralmente é formulada em função da norma do incremento do vetor de deslocamentos nodais e uma grandeza adimensional de fator de força.

A proposta inicial de Riks é aperfeiçoada por muitos pesquisadores e CRISFIELD (1997) é o primeiro a propor uma equação quadrática de restrição que interage numa esfera (método do comprimento de arco com raio constante) ou num cilindro (método do comprimento de arco cilíndrico). Como os métodos apresentam duas soluções, CRISFIELD (1997) propõe critérios para selecionar a raiz adequada.

Admite-se que a estrutura seja carregada proporcionalmente pelo vetor de forças  $\lambda \mathbf{F}$  e em uma iteração  $i$  o vetor de forças resistentes é  $\mathbf{F}_i$ . O método iterativo de Newton-Raphson fornece a equação

$$(0.296)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i^{-1}(\lambda_i \mathbf{F} - \mathbf{F}_i) = \lambda_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F} - \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F}_i = \lambda_i \Delta \mathbf{u}_F - \Delta \mathbf{u}_{F_i} \quad (0.297)$$

Define-se o comprimento de arco  $l$  com o objetivo de controlar o módulo do incremento de deslocamento  $\Delta \mathbf{u}_i$  por meio de

$$\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_i = l^2 \quad (0.298)$$

Com as expressões (0.297) e (0.298) encontra-se

$$\lambda_i^2 \Delta \mathbf{u}_F^T \Delta \mathbf{u}_F - 2\lambda_i \Delta \mathbf{u}_F^T \Delta \mathbf{u}_{F_i} + \Delta \mathbf{u}_{F_i}^T \Delta \mathbf{u}_{F_i} - l^2 = 0 \quad (0.299)$$

A equação do segundo grau dada pela expressão (0.299) pode fornecer duas soluções válidas para o valor do coeficiente  $\lambda$ . É necessário testar as duas soluções, pois o processo

numérico pode retornar ao longo de sua própria trilha, e é possível também encontrar um ponto de bifurcação. Procura-se adotar um método simples e suficientemente adequado para o problema em análise. Para cada uma das soluções determina-se o produto escalar do incremento de deslocamento nesta iteração com o incremento de deslocamento da iteração anterior, e adota-se o valor do coeficiente  $\lambda_i$  que corresponde ao produto escalar máximo, e ao incremento dos deslocamentos com direção e sentido mais próximo do incremento anterior.

Se for utilizado um processo de correção, como o método de Newton-Raphson, pode-se considerar que o ponto esteja exatamente sobre o caminho de equilíbrio. Dessa forma a seguinte expressão é válida:

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i^{-1} (\lambda_{i+1} \mathbf{F} - \lambda_i \mathbf{F}) = \Delta \lambda_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F} = \Delta \lambda_i \mathbf{u}_F \quad (0.300)$$

Substituindo-se a expressão (0.300) na equação (0.298) obtém-se as expressões simplificadas

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i &= \pm \frac{l}{\sqrt{\mathbf{u}_F^T \mathbf{u}_F}} \\ \Delta \mathbf{u}_i &= \pm \frac{l}{\sqrt{\mathbf{u}_F^T \mathbf{u}_F}} \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (0.301)$$

### 5.3 ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS

O estudo da estabilidade, *per se*, é um assunto vasto que não se restringe à Mecânica de Estruturas, mas que pode ser observado em outros campos da ciência como a Biologia e a Economia. Uma definição matemática de estabilidade, em sua forma geral, é atribuída a Liapunov em 1892 e pode ser encontrada na obra de BAZANT e CEDOLIN (2003, p.175).

A estabilidade de uma estrutura está relacionada a suas características dinâmicas. Essa relação é observada na definição feita por Dirichlet em 1853 (*apud* FELIPPA, p.26-3):

“O equilíbrio [de um sistema mecânico] é estável se, ao se deslocar os pontos do sistema de suas posições de equilíbrio de um valor infinitesimal e se for dada a cada ponto uma pequena velocidade inicial, os deslocamentos dos diferentes pontos do sistema se mantêm contidos dentro de pequenos limites prescritos durante todo o movimento.”

De maneira semelhante, BAZANT e CEDOLIN (2003) definem que uma estrutura é estável se uma pequena mudança nas condições iniciais da estrutura implica numa pequena mudança na resposta da estrutura. FELLIPPA (2001, p.24-3) diz que uma estrutura elástica é

estável numa posição de equilíbrio se essa retorna à mesma posição após ser perturbada por uma ação qualquer.

Dessa forma a abordagem dinâmica é a escolha natural para o estudo da estabilidade de uma estrutura. Contudo, BAZANT e CEDOLIN (2003, p.178) e FALZON e HITCHINGS (2006) argumentam que a análise dinâmica de sistemas pode ser substituída pela análise estática dos estados de equilíbrio em diversos casos da prática. Essa alternativa permite uma verificação qualitativa da estabilidade com a vantagem de uma maior simplicidade e menor dispêndio de recursos.

REIS e CAMOTIM (2001) apresentam didaticamente o método do equilíbrio adjacente e o método energético, que são métodos estáticos de ampla utilização na verificação de estabilidade de sistemas conservativos.

O método do equilíbrio adjacente investiga a existência de uma configuração de equilíbrio adjacente à configuração fundamental para o mesmo nível de carga considerada. TIMOSHENKO (1953) cita que a determinação da carga crítica de uma coluna submetida a um carregamento axial, conforme estabelecida por Euler em 1757, pode ser considerada um exemplo de aplicação desse método.

O método energético consiste em comparar a energia potencial entre o estado de equilíbrio e estados adjacentes. Se todos os estados adjacentes têm maior energia o equilíbrio é estável. Esse método também é apresentado por BAZANT (2003, p.178) como teorema Lagrange-Dirichlet: considerando que a energia total é contínua, o equilíbrio de um sistema, que contenha apenas forças conservativas e dissipativas, é estável se a energia potencial do sistema apresenta um mínimo estrito.

Esse teorema só é aplicável a sistemas em que as forças dissipativas não afetam a função de energia potencial da qual as forças conservativas são obtidas por diferenciação. Desta forma com esta metodologia não se pode analisar com precisão a estabilidade de estruturas em que ocorra comportamento inelástico, como a viscoelasticidade, a viscoplasticidade, a plasticidade e a fratura.

Da mesma forma a metodologia não permite considerar a presença de tensões residuais na análise da estabilidade. Essas tensões normalmente resultam do processo de fabricação de perfis e chapas metálicas ou das técnicas construtivas empregadas, como a solda. A norma NBR 8800 recomenda considerar a influência das tensões residuais na estabilidade ao se fazer o cálculo do parâmetro de esbeltez.

Julga-se que esses temas são importantes para o estudo da estabilidade e devem ser propostos para trabalhos futuros.

#### 5.4 ENERGIA POTENCIAL EM SISTEMAS DISCRETOS

A energia potencial  $P$  é definida pela expressão:

$$P = U - W \quad (0.302)$$

onde  $U$  é a energia interna de deformação e  $W$  é o trabalho das forças externas.

Pode-se considerar que a energia potencial num sistema mecânico é função do vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  e de um parâmetro de controle  $\lambda$  das forças externas, de forma que se tem

$$P = P(\mathbf{u}, \lambda) \quad (0.303)$$

A variação da energia potencial na vizinhança de um ponto  $\mathbf{u}$  pode ser expressa por

$$\Delta P = P(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \lambda) - P(\mathbf{u}, \lambda) \quad (0.304)$$

onde  $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n]^T$  (0.305)

Expandindo-se a expressão (0.304) em série de Taylor tem-se

$$\Delta P = \frac{1}{1!} \delta P + \frac{1}{2!} \delta^2 P + \frac{1}{3!} \delta^3 P + \dots \quad (0.306)$$

onde

$$\delta P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial u_i} \delta u_i \quad (0.307)$$

$$\delta^2 P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j \quad (0.308)$$

$$\delta^3 P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 P}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \delta u_i \delta u_j \delta u_k \quad (0.309)$$

O método energético estabelece que, para o ponto  $\mathbf{u}$  ser estável, deve ser satisfeita a relação

$$\Delta P > 0 \text{ para quaisquer } \delta u_i, \delta u_j, \delta u_k, \dots \quad (0.310)$$

Segundo LANCZOS (1970, p.113), a função Lagrangiano  $L$  é o elemento fundamental na análise matemática de problemas mecânicos. O parâmetro  $L$  representa o excesso de energia cinética  $K$  em relação a energia potencial  $P$  de um sistema, e é definido pela expressão

$$L = K - P \quad (0.311)$$

A ação  $A$  é o objeto matemático definido como a integral do Lagrangiano entre dois instantes  $t_0$  e  $t_1$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (0.312)$$

O princípio de Hamilton, ou princípio da menor ação estabelece que o sistema descreve uma trajetória que torna o valor da ação  $A$  estacionário, isto é:

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (0.313)$$

O princípio de Hamilton representa uma formulação variacional unificada, a partir da qual o princípio de D' Alembert e o princípio dos trabalhos virtuais podem ser obtidos.

Especificamente, no caso de um sistema estático tem-se

$$L = -P \quad (0.314)$$

Substituindo-se a expressão (0.314) na expressão (0.313) tem-se

$$\delta P = 0 \quad \text{para qualquer } \delta u_i \quad (0.315)$$

ou

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = 0 \quad \text{para qualquer } i \quad (0.316)$$

Substituindo-se a expressão (0.302) na expressão (0.316) obtém-se as condições de equilíbrio

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = \frac{\partial U}{\partial u_i} - \frac{\partial W}{\partial u_i} = 0 \quad (0.317)$$

Da definição de trabalho de forças externas tem-se

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \lambda F_i \quad (0.318)$$

onde  $F_i$  são as forças externas aplicadas.

As forças externas são equilibradas por forças internas  $F_r$  que podem ser calculadas pela expressão

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_r \quad (0.319)$$

Substituindo-se as expressões (0.318) e (0.319) na expressão (0.317) tem-se a expressão matricial de equilíbrio

$$\mathbf{F}_r = \lambda \mathbf{F} \quad (0.320)$$

onde  $\mathbf{F}_r$  e  $\mathbf{F}$  são os vetores de forças internas e externas respectivamente.

Como a variação de energia potencial é positiva no equilíbrio estável, substituindo-se a expressão (0.315) na expressão (0.306) obtém-se a condição do teorema de Lagrange-Dirichlet

$$\delta^2 P > 0 \quad \text{para quaisquer } \delta u_i, \delta u_j \quad (0.321)$$

Com a expressão (0.302) tem-se

$$\delta^2 P = \delta^2 U - \delta^2 W \quad (0.322)$$

e com a expressão (0.318) obtém-se

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = 0 \quad (0.323)$$

Substituindo-se a expressão (0.323) na expressão (0.322) obtém-se

$$\delta^2 P = \delta^2 U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j \quad (0.324)$$

A derivada segunda da energia interna pode ser expressa por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial F_{i_j}}{\partial u_j} = K_{ij} \quad (0.325)$$

onde  $K_{ij}$  é um termo da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ .

Utilizando-se a expressão (0.325), a expressão (0.324) pode ser expressa na seguinte notação matricial

$$\delta^2 P = \delta^2 U = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{u} > 0 \quad (0.326)$$

A expressão matricial (0.326) representa uma forma quadrática da matriz  $\mathbf{K}$  e indica que a estrutura apresenta equilíbrio estável se a matriz de rigidez tangente for positiva definida (JENNINGS, 1993, p.30). Como toda matriz positiva definida tem determinante positivo, a estabilidade da estrutura pode ser analisada a partir do determinante de  $\mathbf{K}$ . A condição de estabilidade dada pela expressão (0.326) pode ser substituída por

$$\det \mathbf{K} > 0 \quad (0.327)$$

No entanto, a utilização direta dessa condição matemática só é vantajosa para problemas com poucos graus de liberdade, pois o cálculo de determinante de  $\mathbf{K}$  com muitos graus de liberdade é muito demorado e dispendioso.

Para contornar essa dificuldade, primeiro, utiliza-se a seguinte relação matemática existente entre os  $n$  autovalores  $\chi_i$  de  $\mathbf{K}$ :

$$\det \mathbf{K} = \prod_{i=1}^n \chi_i \quad (0.328)$$

A seguir faz-se uso de propriedades da matriz de rigidez. Como  $\mathbf{K}$  é real e simétrica, todos os seus autovalores são reais. Dessa forma os seguintes critérios de estabilidade podem ser estabelecidos (FELIPPA, 2001, p.24-5):

- (a) se  $\chi_i > 0$  para qualquer  $i$ , a estrutura é estável na posição de equilíbrio;
- (b) se  $\chi_i \geq 0$  para qualquer  $i$ , a estrutura tem estabilidade neutra na posição de equilíbrio;
- (c) se  $\chi_i < 0$  para algum  $i$ , a estrutura é instável.

Considerando-se que a matriz  $\mathbf{K}$  varia continuamente com o parâmetro de controle  $\lambda$ , uma estrutura estável deve passar pela condição (b) antes de se tornar instável. Como consequência na condição limite de estabilidade tem-se

$$\lambda = \lambda_{cr} \quad (0.329)$$

$$\det \mathbf{K}(\lambda_{cr}) = 0 \quad (0.330)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr}) \Phi = 0 \quad (0.331)$$

onde  $\Phi$  é um autovetor não nulo.

As equações (0.330) e (0.331) estabelecem testes para localizar os limites do equilíbrio estático denominados pontos críticos.

Como os autovalores  $\chi_i$  de  $\mathbf{K}$  são reais, pode-se estabelecer a ordenação

$$\chi_1 \leq \chi_2 \leq \chi_3 \leq \dots \leq \chi_n \quad (0.332)$$

Dessa forma basta calcular o menor autovalor  $\chi_1$  de  $\mathbf{K}$  para se avaliar a estabilidade da estrutura e num ponto crítico tem-se

$$\chi_1 = 0 \quad (0.333)$$

## 5.5 LOCALIZAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Considerando-se a ocorrência da flambagem ocorra no instante  $\tau$ , BATHE (1996; p.631) propõe linearizações entre os instantes  $t-\Delta t$  e  $t$ , resultando em

$${}^\tau \mathbf{K} = {}^{t-\Delta t} \mathbf{K} + \lambda({}^t \mathbf{K} - {}^{t-\Delta t} \mathbf{K}) \quad (0.334)$$

$${}^\tau \mathbf{F} = {}^{t-\Delta t} \mathbf{F} + \lambda({}^t \mathbf{F} - {}^{t-\Delta t} \mathbf{F}) \quad (0.335)$$

onde  $\lambda$  é o fator de escala.

No instante da flambagem  $\tau$  tem-se da expressão (0.331)

$${}^\tau \mathbf{K} \Phi = \mathbf{0} \quad (0.336)$$

Substituindo-se a expressão (0.334) na expressão (0.336) tem-se

$${}^t \mathbf{K} \Phi = \frac{\lambda - 1}{\lambda} {}^{t-\Delta t} \mathbf{K} \Phi \quad (0.337)$$

A expressão (0.337) representa o seguinte problema de autovalor

$${}^t \mathbf{K} \Phi = \gamma {}^{t-\Delta t} \mathbf{K} \Phi \quad (0.338)$$

onde

$$\gamma = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad (0.339)$$

Os valores calculados  $\lambda$  permitem determinar as correspondentes cargas de flambagem e os autovalores  $\Phi$  correlatos indicam os correspondentes modos de flambagem.

Observa-se que no problema da expressão (0.338) necessita-se a determinação de um ponto de equilíbrio antes do ponto crítico e de outro ponto de equilíbrio após o ponto crítico. Considera-se que essa necessidade pode onerar o processo, pois a obtenção de ponto pós-flambagem é uma das dificuldades para o traçado de caminho de equilíbrio.

Considera-se também que a interpolação numérica proposta pode prejudicar a precisão e a convergência, uma vez que, à medida que as matrizes utilizadas se aproximam do ponto crítico, elas se aproximam da condição de singularidade.

Neste trabalho propõe-se expandir a matriz tangente  $\mathbf{K}$  em série de Taylor, obtendo-se

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}}\right)(\Delta \mathbf{U}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} (\Delta \mathbf{U})^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^3} (\Delta \mathbf{U})^3 + \dots \quad (0.340)$$

Em seguida, desprezando-se os termos de ordem quadrática e superiores, tem-se

$$\mathbf{K}' \approx \mathbf{K} + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}}\right)(\Delta \mathbf{U}) \quad (0.341)$$

Considerando-se que o ponto de equilíbrio está próximo de um ponto crítico e fixando um vetor  $\Delta \mathbf{u}$ , pode-se fazer a seguinte aproximação para o instante da flambagem  $\tau$

$$\mathbf{K}^\tau = \mathbf{K} + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}}\right)(\chi \Delta \mathbf{u}) \quad (0.342)$$

Substituindo-se a expressão (0.342) na expressão (0.336) tem-se um novo problema de autovalor

$$\left[ \mathbf{K} + \chi \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}\right) \right] \Phi = 0 \quad (0.343)$$

O problema de autovalor dado pela expressão (0.343) necessita apenas de um ponto de equilíbrio antes do ponto crítico e o incremento na matriz de rigidez na maioria das vezes não é singular. A variação da matriz de rigidez tangente é calculada analiticamente, reduzindo a influência da aproximação adotada.

## 5.6 CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

FELIPPA (2001, p.5-3) apresenta quatro tipos de pontos críticos:

- (a) ponto limite isolado;
- (b) ponto limite múltiplo;

- (c) ponto de bifurcação isolado;
- (d) ponto de bifurcação múltiplo.

Das expressões (0.320) e (0.325) obtém-se

$$\mathbf{K} d\mathbf{u} = \mathbf{F} d\lambda \quad (0.344)$$

Como a matriz  $\mathbf{K}$  é simétrica, num ponto crítico é válida a expressão

$$\Phi^T \mathbf{K} = 0 \quad (0.345)$$

Combinando-se as expressões (0.344) e (0.345) obtém-se

$$(\Phi^T \mathbf{F}) d\lambda = 0 \quad (0.346)$$

A partir da expressão (0.346) podem-se analisar as condições correspondentes a cada tipo de ponto crítico. Se  $\Phi^T \mathbf{F} \neq 0$  tem-se  $d\lambda = 0$  e o caminho de equilíbrio apresenta uma tangente horizontal indicando um ponto limite, que é múltiplo se houver mais de um vetor  $\Phi$  que satisfaça a expressão (0.331). Quando  $\Phi^T \mathbf{F} = 0$ , tem-se um ponto de bifurcação, que é múltiplo se houver mais de um vetor  $\Phi$  que satisfaça essa condição e a expressão (0.331).

Na Figura 5.2 os pontos  $L_1$  e  $L_2$  representam pontos limites e  $B$  é um ponto de bifurcação.

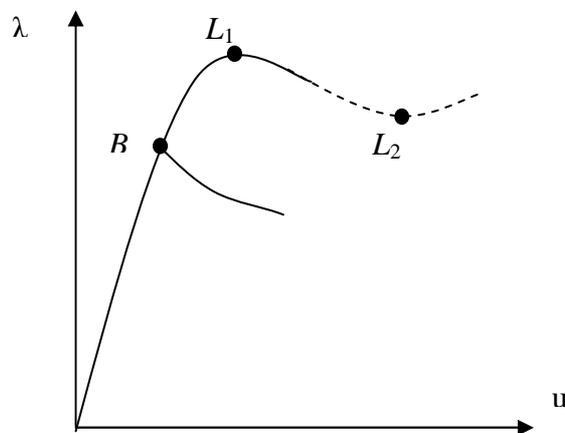


Figura 5.2 – Pontos críticos (adaptado de FELIPPA, 2001, p. 5-4).

Os pontos de bifurcação são classificados em simétricos e assimétricos. Os casos simétricos são subdivididos em estáveis e instáveis.

A flambagem simétrica refere-se à condição em que a estrutura não apresenta uma direção preferencial de deformação a partir do ponto crítico. Quando se tem bifurcação simétrica estável, o caminho principal se torna instável e o caminho secundário é estável (FALZON e HITCHINGS, 2006, p.12).

A Figura 5.3 apresenta o diagrama força-deslocamento central para a flambagem simétrica estável de uma placa simplesmente apoiada em todos os lados submetida a compressão, que é apresentada por FALZON e HITCHINGS (2006, p.14).

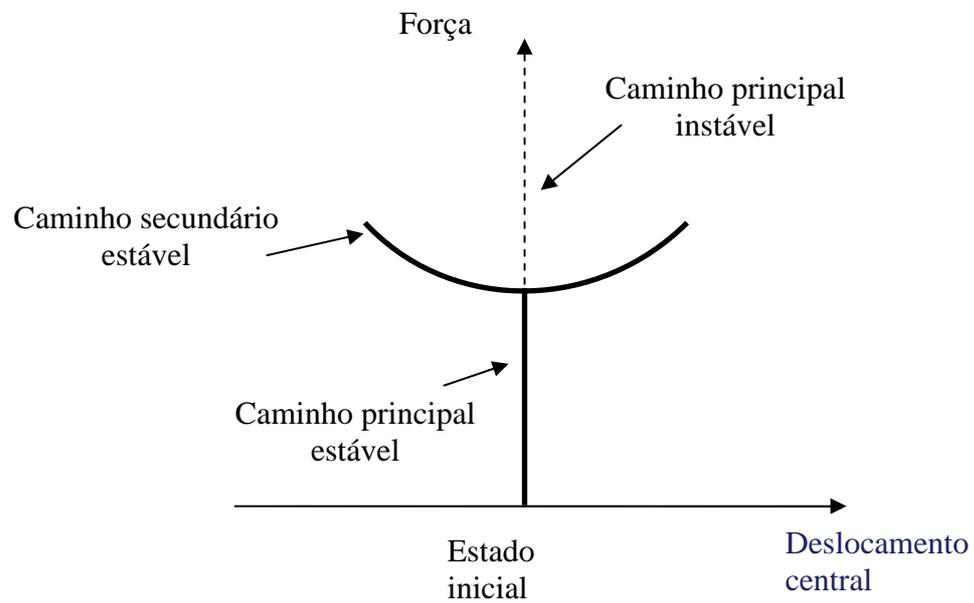


Figura 5.3 – Bifurcação simétrica estável.

A bifurcação simétrica instável caracteriza-se por ter caminho secundário instável. O diagrama força-deslocamento da Figura 5.4 apresenta o comportamento característico da bifurcação simétrica instável para um modelo de casca cilíndrica sem imperfeições, que é apresentado por FALZON e HITCHINGS (2006, p.15).

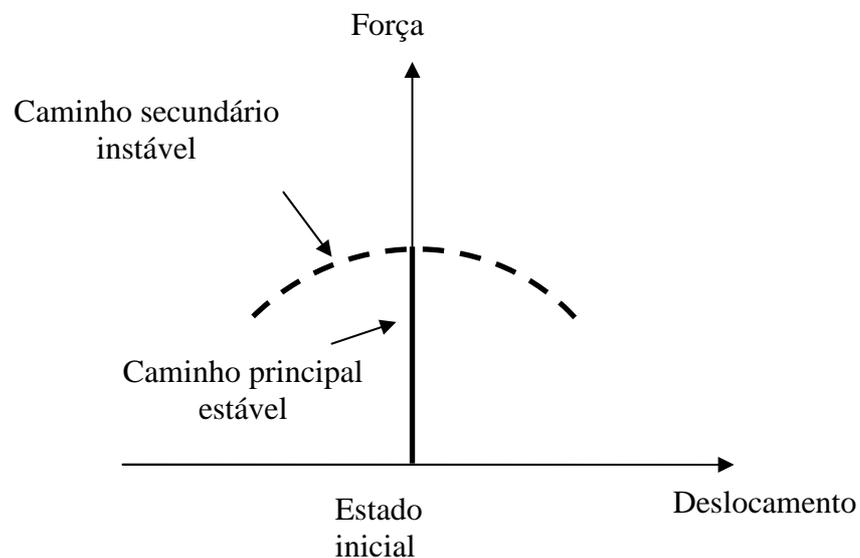


Figura 5.4 – Bifurcação simétrica instável.

A bifurcação assimétrica ocorre devido à assimetria na geometria ou no carregamento. O caminho secundário de equilíbrio pode ser estável ou instável, dependendo dos parâmetros da estrutura. A Figura 5.5 apresenta o caminho de equilíbrio para a bifurcação assimétrica.

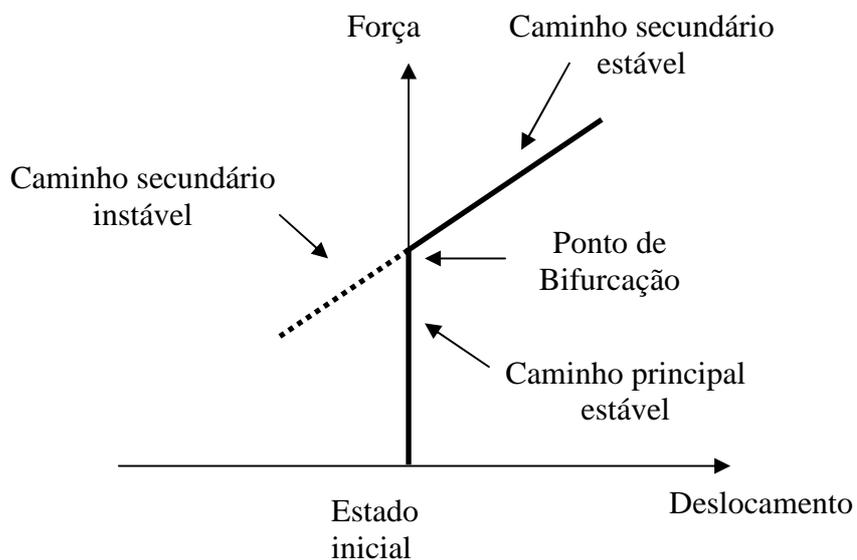


Figura 5.5 – Bifurcação assimétrica (adaptado de FALZON e HITCHINGS, 2006, p.17).

A treliça do trabalho experimental de Koorda (1965, *apud* FALZON e HITCHINGS, 2006, p.17) é um exemplo prático de bifurcação assimétrica. A Figura 5.6 apresenta o desenho esquemático da treliça e os modos de flambagem da estrutura variando com a posição do carregamento.

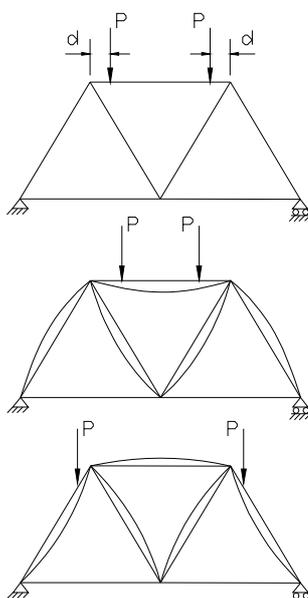


Figura 5.6 –Treliça de Roorda (*apud* FALZON e HITCHINGS, 2006, p.17).

BAZANT e CEDOLIN (2003, p.238) apresentam exemplos teóricos dos tipos de bifurcação. CROLL e WALKER (1975) também ilustram detalhadamente os casos de bifurcação nos capítulos 4, 5 e 6 de seu trabalho. Utilizando modelos teóricos, mostram que a bifurcação simétrica estável é pouco afetada por imperfeições ao contrário da bifurcação simétrica instável e da bifurcação assimétrica.

Koiter (1967, *apud* FALZON e HITCHINGS, 2006, p.17) mostra que imperfeições iniciais reduzem a força crítica e que essa redução é mais sensível na bifurcação assimétrica do que na bifurcação simétrica instável.

## 5.7 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PONTO CRÍTICO USANDO DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Como num ponto singular tem-se um autovetor de deslocamentos  $\Phi$  em que

$$\mathbf{K} \Phi = 0 \quad (0.347)$$

resulta que, na direção de  $\Phi$ , tem-se com a expressão (0.326)

$$\delta^2 P = \delta^2 U = 0 \quad (0.348)$$

A partir das expressões (0.315) e (0.348) verifica-se que a análise da estabilidade de um ponto singular requer a avaliação de derivadas de ordem superior na expressão (0.306).

A equação de equilíbrio dada pela expressão (0.317) pode ser redefinida pela equação matricial

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{f}_r(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f} = 0 \quad (0.349)$$

onde  $\mathbf{f}_r$  e  $\mathbf{f}$  são os vetores de forças internas e externas respectivamente.

O comprimento do caminho de equilíbrio  $s$  pode ser definido pela função

$$\begin{aligned} s = s(\mathbf{u}, \lambda) &= \int ds \\ \text{onde} \quad ds &= \sqrt{d\mathbf{u}^T d\mathbf{u} + d\lambda^2 \psi^2 \mathbf{f}^T \mathbf{f}} \end{aligned} \quad (0.350)$$

e  $\psi$  é um parâmetro de escala entre deslocamentos e forças.

Combinando-se as expressões (0.350) e (0.349) tem-se

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}_r(\mathbf{u}(s)) - \lambda(s) \mathbf{f} = 0 \quad (0.351)$$

Para simplificar a notação os termos derivados em relação a um deslocamento infinitesimal  $\partial s$  ao longo do caminho de equilíbrio são apresentadas com um apóstrofo, isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} & \lambda' &= \frac{\partial \lambda}{\partial s} \\ \mathbf{u}'' &= \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} & \lambda'' &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (0.352)$$

Variando-se a expressão (0.349) ao longo do caminho de equilíbrio tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) &= \frac{\partial \mathbf{f}_r}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \mathbf{f} = 0 \\ \mathbf{K} \mathbf{u}' - \lambda' \mathbf{f} &= 0 \end{aligned} \quad (0.353)$$

Derivando-se a expressão (0.353) ao longo do caminho de equilíbrio obtém-se

$$\mathbf{K}' \mathbf{u}' + \mathbf{K} \mathbf{u}'' - \lambda' \mathbf{f}' - \lambda'' \mathbf{f} = 0$$

Para qualquer matriz  $\mathbf{K}$  de ordem  $n$  os autovalores  $\chi_i$  e autovetores unitários  $\Phi_i$  atendem a relação

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \Phi_i &= \chi_i \Phi_i \\ \chi_1 &< \chi_2 < \dots < \chi_n \end{aligned} \quad (0.355)$$

Como os autovetores  $\Phi_i$  constituem uma base de um espaço  $n$ -dimensional, CRISFIELD (1997, vol. II, p.342) propõe definir

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^n A_i \Phi_i \quad (0.356)$$

em que os coeficientes  $A_i$  podem ser determinados por

$$A_i = \Phi_i^T \mathbf{u}' \quad (0.357)$$

Pré-multiplicando as expressões (0.353) e (0.354) por qualquer autovetor  $\Phi_i$  tem-se, respectivamente:

$$\chi_i \Phi_i^T \mathbf{u}' - \lambda' \Phi_i^T \mathbf{f} = 0 \quad (0.358)$$

$$\Phi_i^T \mathbf{K}' \mathbf{u}' + \chi_i \Phi_i^T \mathbf{u}'' - \lambda' \Phi_i^T \mathbf{f}' - \lambda'' \Phi_i^T \mathbf{f} = 0 \quad (0.359)$$

Para o menor autovalor  $\Phi_1$  de um ponto singular as equações (0.358) e (0.359) são simplificadas para

$$\lambda' \Phi_1^T \mathbf{f} = 0 \quad (0.360)$$

$$\Phi_1^T \mathbf{K}' \mathbf{u}' - \lambda' \Phi_1^T \mathbf{f}' - \lambda'' \Phi_1^T \mathbf{f} = 0 \quad (0.361)$$

A derivada da matriz  $\mathbf{K}$  pode ser definida pela expressão

$$\begin{aligned}\mathbf{K}' &= \mathbf{L}\mathbf{u}' + \mathbf{N}\lambda' \\ \mathbf{L} &= \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \\ \mathbf{N} &= \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u} \partial \lambda}\end{aligned}\quad (0.362)$$

De forma semelhante encontra-se

$$\begin{aligned}\mathbf{f}' &= -(\mathbf{N}\mathbf{u}' + \lambda'\mathbf{M}) \\ \mathbf{N} &= \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda \partial \mathbf{u}} \\ \mathbf{M} &= \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda^2}\end{aligned}\quad (0.363)$$

Utilizando-se a equação (0.358), a expressão (0.356) em um ponto singular pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= A_1 \Phi_1 + \lambda' \mathbf{y} \\ \text{onde} \quad \mathbf{y} &= \sum_{i=2}^n \begin{pmatrix} \Phi_i^T \mathbf{f} \\ \chi_i \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (0.364)$$

Substituindo-se as expressões (0.362), (0.363) e (0.364) na expressão (0.361) obtém-se a equação quadrática

$$\begin{aligned}a A_1^2 + b A_1 + c + d &= 0 \quad \text{onde} \\ a &= \Phi_1^T (\mathbf{L} \Phi_1 \Phi_1) \\ b &= \Phi_1^T (\mathbf{L} \Phi_1 \mathbf{y} + \mathbf{L} \mathbf{y} \Phi_1 + 2 \mathbf{N} \Phi_1) \lambda' \\ c &= \Phi_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} \mathbf{y} + 2 \mathbf{N} \mathbf{y} + \mathbf{M}) \lambda'^2 \\ d &= -\Phi_1^T \mathbf{f} \lambda''\end{aligned}\quad (0.365)$$

Em função das expressões (0.315) e (0.348) a variação de energia potencial em torno de um ponto de equilíbrio singular é calculada por

$$\Delta P = \frac{1}{3!} \delta^3 P + \frac{1}{4!} \delta^4 P + \dots \quad (0.366)$$

onde

$$\delta^3 P = \delta^3 U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_k} \delta u_i \delta u_j \delta u_k = \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \quad (0.367)$$

e

$$\delta^4 P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k \partial u_l} \delta u_i \delta u_j \delta u_k \delta u_l \quad (0.368)$$

são calculados com  $\lambda = \lambda_{critico}$ .

Nas proximidades do ponto de singular pode-se utilizar a aproximação

$$\delta \mathbf{u} \approx \mathbf{u}' \Delta s \quad (0.369)$$

Substituindo-se a expressão (0.369) nas expressões (0.367) e (0.368) tem-se

$$\delta^3 P = \delta^3 U = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_k} u'_i u'_j u'_k \right) (\Delta s)^3 \quad (0.370)$$

e

$$\delta^4 P = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial u_k \partial u_l} u'_i u'_j u'_k u'_l \right) (\Delta s)^4 \quad (0.371)$$

### 5.7.1 Análise de Estabilidade de Ponto Limite

Num ponto limite tem-se da expressão (0.360)

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0 \\ \Phi_1^T \mathbf{f} &\neq 0 \end{aligned} \quad (0.372)$$

que substituída na expressão (0.358) resulta em

$$\begin{aligned} \chi_i \Phi_i^T \mathbf{u}' &= \chi_i A_i = 0 \\ A_i &= 0 \text{ para } i > 1 \end{aligned} \quad (0.373)$$

Para  $i=1$  tem-se indeterminação no cálculo de  $A_1$ . Utilizando-se o método do comprimento de arco, esse coeficiente pode ser determinado por

$$\mathbf{u}'^T \mathbf{u}' = l^2 = A_1^2 \quad (0.374)$$

onde  $l$  é o comprimento de arco adotado.

Dessa forma as direções do caminho de equilíbrio são dadas por

$$\mathbf{u}' = \pm l \Phi_1 \quad (0.375)$$

Substituindo-se a expressão (0.375) na expressão (0.370) tem-se da expressão (0.366)

$$\Delta P \approx l^3 \left( \Phi_1^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \Phi_1 \Phi_1 \right) (\Delta s)^3 \quad (0.376)$$

Na expressão (0.376) verifica-se que o sinal da variação de energia depende do sinal de  $\Delta s$ , não atendendo à condição de estabilidade dada pela expressão (0.310). Dessa forma fica demonstrado que qualquer ponto limite é instável.

### 5.7.2 Análise de Estabilidade de Ponto de Bifurcação

Num ponto de bifurcação tem-se

$$\begin{aligned}\lambda' &\neq 0 \\ \Phi_1^T \mathbf{f} &= 0\end{aligned}\quad (0.377)$$

O incremento de deslocamento na bifurcação pode ser calculado por

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= A_1 \Phi_1 + \lambda' \mathbf{y} \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=2}^n \left( \frac{\Phi_i^T \mathbf{f}}{\chi_i} \Phi_i \right)\end{aligned}\quad (0.378)$$

Considerando-se que a força externa  $\mathbf{f}$  é um vetor constante e substituindo-se a expressão (0.377) na expressão (0.365) obtém-se a simplificação

$$\begin{aligned}a A_1^2 + b A_1 + c &= 0 \\ a &= \Phi_1^T (\mathbf{L} \Phi_1 \Phi_1) \\ b &= \Phi_1^T (\mathbf{L} \Phi_1 \mathbf{y} + \mathbf{L} \mathbf{y} \Phi_1) \lambda' \\ c &= \Phi_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} \mathbf{y}) \lambda'^2\end{aligned}\quad (0.379)$$

Se o coeficiente  $a$  na expressão (0.379) não for nulo temos duas raízes  $r_1$  e  $r_2$ , que fornecem as direções do caminho principal e do caminho secundário de bifurcação assimétrica

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_1 &= r_1 \Phi_1 + \mathbf{y} \lambda'_1 \\ \mathbf{u}'_2 &= r_2 \Phi_1 + \mathbf{y} \lambda'_2\end{aligned}\quad (0.380)$$

Com o método do comprimento de arco, pode-se obter  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$  por meio de

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_1{}^T \mathbf{u}'_1 &= l^2 \\ \mathbf{u}'_2{}^T \mathbf{u}'_2 &= l^2\end{aligned}\quad (0.381)$$

Substituindo-se a expressão (0.380) na expressão (0.370) tem-se uma expressão da forma

$$\Delta P \square \left( r_1^3 \Phi_1^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \Phi_1 \Phi_1 + \lambda_1^6 \mathbf{y}^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \mathbf{y} \mathbf{y} + r_1^2 \lambda' \Phi_1^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \Phi_1 \mathbf{y} + \dots \right) (\Delta s)^3 \quad (0.382)$$

Como no caso do ponto limite, verifica-se que o sinal da variação de energia depende do sinal de  $\Delta s$ . Dessa forma pode-se afirmar que um ponto de bifurcação assimétrica é instável.

No entanto, se o coeficiente  $a$  da equação quadrática da expressão (0.379) for nulo, as soluções são

$$\lambda' = 0 \quad (0.383)$$

$$\text{ou} \quad A_1 = - \frac{\Phi_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} \mathbf{y})}{\Phi_1^T (\mathbf{L} \Phi_1 \mathbf{y} + \mathbf{L} \mathbf{y} \Phi_1)} \lambda' \quad (0.384)$$

A solução dada pela expressão (0.383) corresponde ao caminho da bifurcação simétrica, que, substituída na expressão (0.378) resulta na direção a seguir no caminho secundário

$$\mathbf{u}' = A_1 \Phi_1 \quad (0.385)$$

A substituição da expressão (0.385) nas expressões (0.370) e (0.371) resulta em

$$\Delta P \approx A_1^4 \left( \Phi_1^T \frac{\partial^3 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^3} \Phi_1 \Phi_1 \Phi_1 \right) (\Delta s)^4 \quad (0.386)$$

Dessa forma não se pode fazer *a priori* qualquer afirmação sobre a estabilidade de um ponto de bifurcação simétrica, pois a análise de estabilidade exige a avaliação do termo

$$\Phi_1^T \frac{\partial^3 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^3} \Phi_1 \Phi_1 \Phi_1 \quad (0.387)$$

ou termos de ordem superior. Considera-se que esta análise está além do escopo deste trabalho.

## 6 RESOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo descrevem-se aspectos do programa implementado para efetuar a resolução numérica do problema de instabilidade.

Aspectos inerentes ao seu desenvolvimento são apresentados e justifica-se a seleção da linguagem C++ para a implementação do programa.

### 6.1 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

Os capítulos anteriores compõem a base teórica do programa de computação que é desenvolvido nesta tese.

No capítulo 5 é desenvolvido o problema de identificação da flambagem de uma estrutura por meio da análise da sua matriz de rigidez ao longo de um caminho de equilíbrio. Mostra-se que a busca do ponto em que a matriz é singular é realizada por meio da solução de um problema de autovalor. Essa solução é implementada com os métodos numéricos apresentados no capítulo 2.

A cada ponto obtido para o caminho de equilíbrio um problema de autovalor é resolvido. Cada ponto de equilíbrio é a solução de um problema de equilíbrio não linear em que o carregamento foi incrementado de maneira adequada. No programa esse incremento é calculado pelo método do arco cilíndrico, conforme é apresentado no capítulo 5.

A solução do problema de equilíbrio é realizada pelo método de Newton-Raphson. Trata-se de um método iterativo, que implica na atualização da matriz tangente de rigidez da estrutura a cada iteração devido a não linearidade física e geométrica. As matrizes de rigidez tangente para barra e placa são desenvolvidas nos capítulos 3 e 4, respectivamente.

A implementação procura garantir a eficiência numérica do processo, tendo em vista o esforço computacional para resolver um problema de autovalor a cada incremento de força. São utilizados procedimentos clássicos tais como o algoritmo de SLOAN (1989) para

reordenação nodal e otimização do perfil de armazenamento da matriz. A solução do problema de autovalor utiliza alternativamente os algoritmos de Jacobi, QR e Lanczos, escolhidos em função da dimensão do problema.

## 6.2 SELEÇÃO DA LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO

Os programas de manipulação simbólica têm sido muito utilizados para elaborar trabalhos científicos. Esses programas são também denominados “computer algebra systems” (CAS). Algumas de suas versões comerciais são Maple, Mathematica, MathCAD e MuPAD.

Segundo FELLIPA (2004, pág.5-3), “o número e a qualidade de programas de manipulação simbólica tem expandido dramaticamente uma vez que a disponibilidade de estações gráficas e computadores pessoais têm encorajado a programação experimental e interativa”. Nesses programas o usuário utiliza a notação convencional de expressões matemáticas para fazer a implementação de equações numéricas e simbólicas. Dessa forma, em muitas situações o pesquisador não tem a necessidade de aprender uma linguagem de programação como Fortran, Pascal, Basic ou C.

FELLIPA (2004, p.5-3) relata nas notas de seu curso de “Introdução aos elementos finitos” que:

“No entanto, para problemas maiores Mathematica certamente superará uma boa calculadora manual quando o problema for acima de 10 a 20 equações. Para até 500 equações e usando aritmética de ponto flutuante, Mathematica dará a resposta em minutos num PC ou Mac veloz e com suficiente memória, mas começará a falhar com cerca de 1000 equações. Entre 1000 e 10000 equações, Matlab será a melhor indicação considerando o tempo de computação. Acima de 10000 equações um programa em linguagem de baixo nível como C ou Fortran será mais eficiente em termos de tempo de computação”.

A quantidade de equações de problema de elementos finitos está relacionada à discretização adotada para modelar a estrutura, isto é, tipo e quantidade de elementos utilizados. COOK (1989, p. 573) comenta que a modelagem de uma estrutura é uma arte baseada na habilidade de visualizar interações físicas e depende muito da experiência de cada analista. Dessa forma não é possível definir *a priori* a quantidade de equações que estarão envolvidas em cada problema, mas, de maneira geral, considera-se que quanto maior for a quantidade de elementos utilizados para modelar a estrutura melhor serão os resultados.

Em conseqüência, considera-se que o desenvolvimento de um programa em linguagem de baixo nível é mais adequado ao problema em estudo, pois evita o risco de não se obter os resultados esperados por falta de um programa apropriado.

A escolha da linguagem de baixo nível a ser utilizada em programação científica é assunto analisado por CARY *et alli* (1997). Esses autores comentam que a comunidade científica reconhece a necessidade de implementar princípios modernos de programação, especialmente a programação orientada a objeto, e abandonar o Fortran 77. É feita uma comparação entre o C++ e o Fortran 90, que é uma evolução do Fortran para programação orientada a objeto.

Os quatro elementos principais utilizados no modelo de objeto são abstração, encapsulamento, modularidade e hierarquia.

A abstração consiste na conceituação do objeto em código do computador, descrevendo suas propriedades e métodos internos para interagir com dados internos e externos.

O encapsulamento é uma técnica que permite esconder dados e métodos internos do usuário. Dessa forma métodos internos do objeto podem ser alterados sem interferir com o programa que o manipula.

Estabelecendo uma interface fixa entre objetos, consegue-se modularidade e flexibilidade no código. Essas características simplificam a tarefa de se elaborar um programa por estágios ou por meio de equipes.

A hierarquia indica a relação entre objetos. Como as linguagens orientadas a objeto têm uma propriedade denominada “herança”, um objeto pode herdar dados e métodos de seus objetos “paternos”, além de poder ter propriedades adicionais definidas. A herança oferece um grande potencial para reutilizar o código, e é útil na organização dos módulos que compõem uma aplicação particular.

As linguagens orientadas a objeto também permitem o polimorfismo. Trata-se da possibilidade de uma função ter seu comportamento selecionado de acordo com o tipo de objeto que a invoca ou da lista específica dos parâmetros fornecidos. O polimorfismo permite aos programadores evitar a escrita de um código inflexível e de elevada manutenção.

C++ é uma linguagem de programação totalmente orientada a objeto. Suporta as noções de abstração, encapsulamento, modularidade e hierarquia. A linguagem Fortran 90 permite programação orientada a objeto em algum nível. Em Fortran 90 a abstração de um objeto exige o uso de uma combinação de comandos. Dessa forma um código desenvolvido em C++ é mais fácil de ser reutilizado do que um código em Fortran 90.

Certas características, não relacionadas a programação orientada a objeto, existem somente em uma ou outra linguagem. As características adicionais do Fortran 90 podem ser rapidamente incluídas em C++ sem necessitar qualquer extensão da linguagem. No entanto, a inclusão de importantes características exclusivas do C++ requerem alteração na sintaxe da linguagem para serem incluídas no Fortran 90.

C++ é uma linguagem que conta com muito mais adeptos na comunidade de engenharia de programas. Em conseqüência, programas livres e bibliotecas reutilizáveis em C++ são desenvolvidos mais rapidamente e em maior quantidade do que em Fortran 90.

CARY *et alli* (1997) comentam também que “... os desenvolvedores de programa da comunidade científica que esperam ter maior mobilidade ou maior alavancagem com o setor comercial estarão em melhores condições ao aprender C++”.

Em vista do exposto, considera-se que a utilização de C++ na implementação da metodologia proposta é mais vantajosa do que a utilização de programas de linguagem simbólica, Fortran 77 ou Fortran 90.

### 6.3 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA

Os seguintes módulos do programa foram desenvolvidos:

- o) entrada de dados – os dados referentes a nós, elementos, restrições e configuração de cargas da estrutura são lidos de um arquivo tipo TXT com formatação apropriada;
- p) renumeração de nós – o procedimento proposto por SLOAN (1989) foi codificado e implementado para reduzir espaço de armazenamento e tempo de processamento;
- q) matriz de rigidez de elemento de barra linear – um programa foi implementado para calcular a matriz de rigidez de um elemento de barra, sua variação e as forças resistivas, fazendo-se a rotação necessária para o sistema global de coordenadas da estrutura;
- r) matriz de rigidez de elemento de placa não linear – de forma semelhante calcula-se a matriz de rigidez de uma placa, sua variação e as forças resistivas, fazendo-se a rotação necessária para o sistema global de coordenadas da estrutura;
- s) matriz de rigidez da estrutura – o programa monta a matriz de rigidez da estrutura armazenando os dados em forma condensada, combinando os resultados das matrizes de rigidez de cada elemento e considerando a renumeração dos nós;

- t) resolução de sistema de equações lineares – o método de Gauss-Jordan foi implementado para resolver sistemas de equações lineares nos quais a matriz é simétrica e está armazenada em forma condensada;
- u) resolução de caminho de equilíbrio – o método do arco cilíndrico foi implementado para calcular o incremento de força ao longo do caminho de equilíbrio; para a obtenção dos deslocamentos correspondentes a cada carregamento foi implementado o método iterativo de Newton-Raphson.
- v) resolução de problema de autovalor – Os métodos iterativos de Jacobi, QR e Lanczos foram implementados para resolução de autovalor; a seleção do método a ser utilizado é feita automaticamente com base no tamanho da matriz do problema;
- w) saída de dados – além de saída de dados em arquivos tipo TXT, gera-se um arquivo tipo DXF, que, ao ser importado por um programa de CAD permite visualizar as deformações da estrutura;

O fluxograma do programa é apresentado na Figura 6.1.

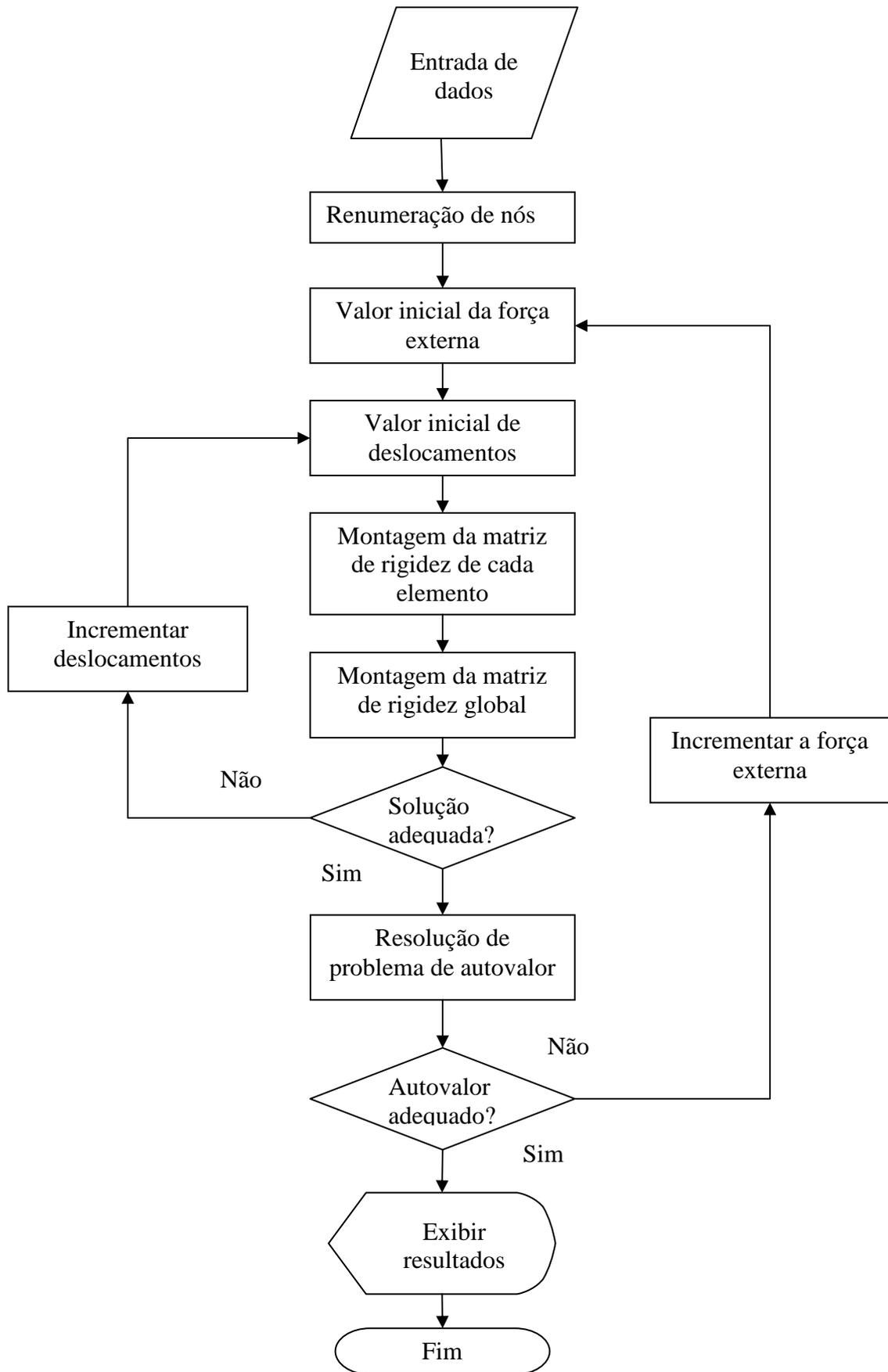


Figura 6.1 – Fluxograma do programa.

## 7 APLICAÇÕES DA METODOLOGIA

Neste capítulo determina-se inicialmente a solução analítica para a flambagem de uma coluna discretizada por elementos finitos. Em seguida a metodologia proposta é aplicada em diversas estruturas, considerando-se tanto a não-linearidade física quanto a não-linearidade geométrica. Os resultados obtidos com a formulação proposta são comparados com valores analíticos e resultados publicados.

### 7.1 DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DE FORÇA DE FLAMBAGEM DE COLUNA

Neste item calcula-se literalmente a força de flambagem para uma coluna bidimensional submetida à força de compressão axial  $P$ . A coluna é discretizada por elementos finitos de viga. Cada elemento apresenta comprimento  $L$ , área da seção constante  $A$ , momento de inércia  $I_y$  e material elástico com módulo de elasticidade  $E$ .

No capítulo 5 mostra-se que a força crítica de uma estrutura discretizada pode ser calculada resolvendo-se a equação polinomial obtida da condição

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad (7.388)$$

Quanto maior é a discretização adotada, maior é o tamanho da matriz  $\mathbf{K}$  na expressão (7.388) e maior é a dificuldade na obtenção dos coeficientes do polinômio associado. Neste item a força crítica é determinada analiticamente em três casos, nos quais a coluna é discretizada em um, dois e três elementos, respectivamente.

Para a montagem da equação polinomial adota-se a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  apresentada por BAZANT (2003, p.76), que é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\varepsilon + \mathbf{K}_\sigma \quad (7.389)$$

A parcela  $\mathbf{K}_\varepsilon$  é a matriz de rigidez linear elástica, que é definida por

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (7.390)$$

A parcela  $\mathbf{K}_\sigma$ , que corresponde à matriz geométrica de rigidez, varia com a força aplicada  $P$ , e é dada por

$$\mathbf{K}_\sigma = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (7.391)$$

Essa parcela corresponde ao primeiro termo da matriz tangente de rigidez do elemento de barra apresentado no capítulo 3.

As condições de restrições nodais são iguais em todas as discretizações. A coluna foi considerada apoiada nas extremidades. A Figura 7.1 apresenta a discretização com três elementos de viga.

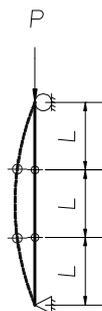


Figura 7.1 – Barra bi-apoiada comprimida.

No caso 1 a coluna é discretizada por apenas um elemento. Este caso serve como referência para avaliar a influência do aumento da discretização no cálculo da força de flambagem.

Eliminando-se os graus de liberdade restringidos, a matriz tangente de rigidez  $\mathbf{K}$  fica reduzida a

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y}{L} + \frac{2PL}{15} & 0 & \frac{2EI_y}{L} - \frac{PL}{30} \\ & \frac{EA}{L} & 0 \\ & & \frac{4EI_y}{L} + \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \quad (7.392)$$

A força  $P_{cr}$  correspondente a flambagem deve satisfazer a condição

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad (7.393)$$

O menor resultado fornecido pela equação (7.393) determina a força crítica  $P_{cr}$ . Comparando-se essa força com a força de Euler, encontra-se

$$P_{cr} = 1,216 P_{Euler} \quad (7.394)$$

Verifica-se que a aproximação obtida com apenas um elemento é limitada.

No caso 2 adota-se a discretização com dois elementos. A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  correspondente é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y}{L} + \frac{2PL}{15} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{2EI_y}{L} - \frac{PL}{30} & 0 & 0 \\ & \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ & & \frac{24EI_y}{L^3} + \frac{12P}{5L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} - \frac{P}{10} \\ & & & \frac{8EI_y}{L} + \frac{4PL}{15} & 0 & \frac{2EI_y}{L} - \frac{PL}{30} \\ & & & & \frac{EA}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_y}{L} + \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \quad (7.395)$$

Relacionando-se a força  $P_{cr}$  relativa à matriz dada pela expressão (7.395) com a força de Euler, obtém-se

$$P_{cr} = 1,0075 P_{Euler} \quad (7.396)$$

Observa-se que com dois elementos o erro obtido em relação ao valor teórico já é inferior a 1%. Aumentando-se a discretização para três elementos a matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y}{L} + \frac{2PL}{15} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{2EI_y}{L} - \frac{PL}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{24EI_y}{L^3} + \frac{12P}{5L} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} - \frac{6P}{5L} & -\frac{6EI_y}{L^2} - \frac{P}{10} & 0 & 0 \\ & & & \frac{8EI_y}{L} + \frac{4PL}{15} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{2EI_y}{L} - \frac{PL}{30} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{24EI_y}{L^3} + \frac{12P}{5L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} - \frac{P}{10} \\ & & & & & & \frac{8EI_y}{L} + \frac{4PL}{15} & 0 & \frac{2EI_y}{L} - \frac{PL}{30} \\ & & & & & & & \frac{EA}{L} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} + \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \quad (7.397)$$

Para a matriz dada pela expressão (7.397) obtém-se a força crítica  $P_{cr}$  dada pela relação

$$P_{cr} = 1,0013 P_{Euler} \quad (7.398)$$

A solução analítica apresentada permite constatar que a modelagem com apenas um elemento deve ser evitada. Constata-se também que a precisão dos resultados tende a aumentar com o aumento da discretização, mas que uma diferença muito pequena já é obtida com a utilização de apenas três elementos.

## 7.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE COLUNA EM COMPRESSÃO AXIAL COM MATERIAL LINEAR

Analisa-se a estabilidade de uma coluna sujeita a compressão axial por meio da aplicação numérica do programa desenvolvido. Com essa análise pretende-se verificar a influência da modelagem desenvolvida para o elemento de barra e a precisão dos processos numéricos propostos.

A coluna apresenta comprimento  $L$ , elementos de barra com seção tubular com diâmetro externo  $D$  e espessura  $t$  conforme ilustra a Figura 7.2. A discretização é realizada com elementos de tubo 10S conforme dados da Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Dados da coluna em compressão axial.

Diâmetro (mm)	Espessura (mm)	Compr. (m)	A ( $10^{-3} \text{ m}^2$ )	I ( $10^{-6} \text{ m}^4$ )	E ( $10^8 \text{ kN/m}^2$ )
168,27	3,4	5,83	1,761	5,986	1,7

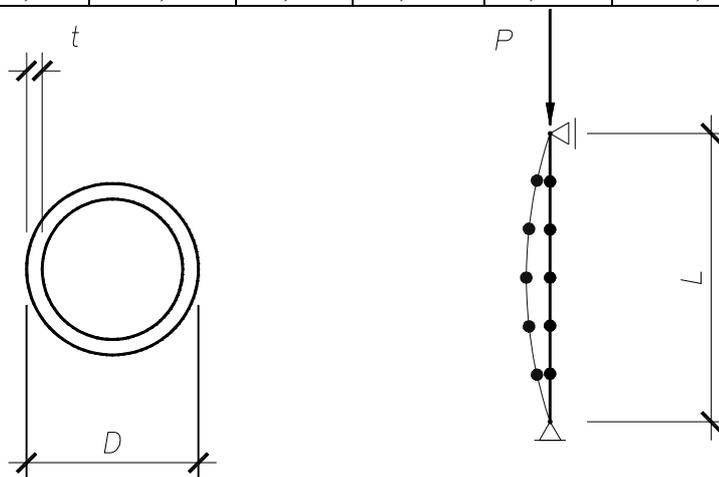


Figura 7.2 – Coluna em compressão axial.

Para os dados da Tabela 7.1, a força de Euler  $P_{Euler}$  correspondente é de 295,5 kN.

Na análise numérica as seções dos elementos são discretizadas em três coroas circulares, e cada coroa circular é subdividida em dezoito setores circulares.

A Tabela 7.2 apresenta os resultados analíticos desenvolvidos no item 7.1, os resultados numéricos utilizando-se o programa desenvolvido e os resultados fornecidos pelo programa comercial SAP 2000.

Não são apresentados os resultados analíticos correspondentes a quatro e seis elementos de discretização, pela dificuldade de cálculo exposta no item 7.1, e por não serem considerados relevantes para a comparação.

Tabela 7.2 – Força crítica de coluna.

Nº de elementos	$P_{cr}/P_{Euler}$		
	<i>Analítico</i>	<i>Programa</i>	<i>SAP 2000</i>
2	1,0075	1,0075	1,0032
3	1,0013	1,0015	0,9999
4	–	1,0004	0,9995
6	–	1,0000	0,9996

Observa-se que os resultados do SAP 2000 são ligeiramente menores que os resultados analíticos e os resultados obtidos no programa elaborado, indicando diferenças entre os modelos matemáticos.

Observa-se que os resultados do programa para dois e três elementos são compatíveis com os resultados da análise literal do item 7.1. Verifica-se também que aumentando-se a discretização o programa fornece grande precisão nos resultados. Dessa forma considera-se que a formulação proposta é adequada para ser utilizada em modelagens de estruturas mais complexas. Os resultados do SAP 2000 podem servir como parâmetro de comparação para exemplos com material elástico linear.

### 7.3 COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO AÇO INOXIDÁVEL

O material com comportamento não-linear físico adotado nos exemplos é um aço inoxidável. A tensão referente à deformação específica de 0,2% é dada por  $R_{p0,2} = 200\text{ kPa}$ . O módulo de elasticidade inicial é  $E = 170\text{ GPa}$ .

A relação tensão-deformação específica adotada é baseada na proposta Z-30.3-6 (DEUTSCHES INSTITUT FÜR BAUTECHNIK, 2003). Essa relação é definida pela expressão:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0,002 \left[ \frac{\sigma}{R_{p0,2}} \right]^n \quad (7.399)$$

onde

$$\begin{aligned} n &= 6 \quad \text{para } \sigma \leq R_{p0,2} \\ n &= 17 \quad \text{para } \sigma > R_{p0,2} \end{aligned} \quad (7.400)$$

A Figura 7.3. apresenta a curva tensão-deformação definida por (7.399) e (7.400).

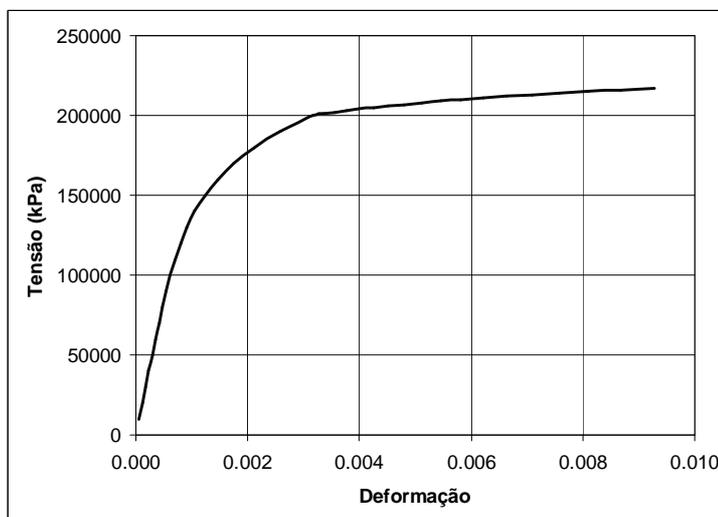


Figura 7.3 – Curva tensão-deformação específica para o aço inoxidável.

#### 7.4 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE COLUNA EM COMPRESSÃO AXIAL COM MATERIAL NÃO-LINEAR

Nesta análise a coluna da Figura 7.2 é modelada usando-se seis elementos de barra com seção tubular. Na Tabela 7.3 são apresentadas as características geométricas adotadas correspondentes aos tubos 5S, 10S e 40S. Adota-se a mesma discretização do exemplo 1 para as seções dos elementos.

São analisados cinco casos, conforme é mostrado na Tabela 7.3. O índice de esbeltez é calculado pela razão  $L/r$ , onde o raio de giração é determinado por  $r = \sqrt{I/A}$ . As alturas dos casos 2a, 2c e 2e são definidas de forma a manter o mesmo índice de esbeltez (igual a 100) para as diferentes seções. Os casos 2b, 2c e 2d apresentam seção 10S e os índices de esbeltez são, respectivamente, iguais a 75, 100 e 150.

O carregamento básico de cada exemplo é definido como a força de flambagem para o módulo de elasticidade na origem. A tensão crítica correspondente  $\sigma_{cr}$  (linear) e a tensão de referência  $R_{p0,2}$  são mostradas na Tabela 7.3 para fins de comparação. O fator do carregamento  $\lambda$  correspondente ao ponto crítico é igual à relação entre as tensões críticas  $\sigma_{cr}$  não linear e linear.

Tabela 7.3 – Resultados obtidos.

Caso	Tubo	D (mm)	t (mm)	L (mm)	L/r	$R_{p0,2}$ (MPa)	$\sigma_{cr}$ (MPa) (linear)	$\lambda$	$\sigma_{cr}$ (MPa) (não-linear)
2a	5S	168,27	2,77	5852	100	200	167,78	0,65754	110,32
2b	10S	168,27	3,4	4373	75	200	298,28	0,44163	131,73
2c	10S	168,27	3,4	5830	100	200	167,78	0,65752	110,32
2d	10S	168,27	3,4	8745	150	200	74,57	0,94704	70,62
2e	40S	168,27	7,11	5703	100	200	167,78	0,65757	110,33

As tensões críticas, determinadas de forma analítica para o comportamento linear, foram avaliadas usando-se o programa e o maior erro verificado é inferior a  $1 \times 10^{-4}$ .

Considerando-se o comportamento não-linear as tensões críticas para os casos 2a, 2c e 2e são numericamente idênticas. Isso confirma que é possível estabelecer fórmulas da tensão crítica relacionando a geometria da seção e o coeficiente de esbeltez.

A Figura 7.4 apresenta os valores do fator de carga  $\lambda$  e os valores do índice de esbeltez  $L/r$  da Tabela 7.3, e o polinômio que melhor correlaciona o intervalo de dados.

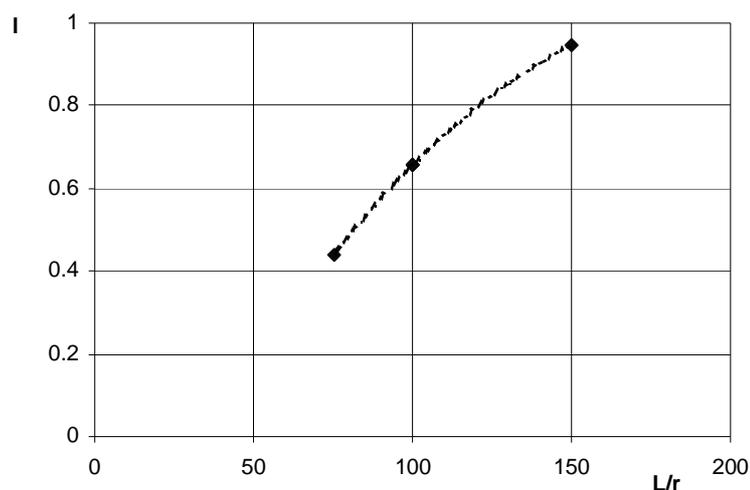


Figura 7.4 – Correlação polinomial entre fator de carga e índice de esbeltez.

Comparando-se os casos 2b, 2c e 2d observa-se que o comportamento não-linear tem maior influência quando o coeficiente de esbeltez é menor. Para o coeficiente de esbeltez  $L/r = 150$  o problema se aproxima da solução linear.

Os dados obtidos no processo de convergência para o exemplo 2c são apresentados na Figura 7.5. Como o carregamento básico corresponde ao carregamento crítico para o módulo de elasticidade na origem, quando o carregamento aplicado e as deformações correspondentes são pequenos, o módulo de elasticidade da estrutura é o próprio valor na origem, e o valor esperado para o fator de força do ponto crítico é igual a 1.

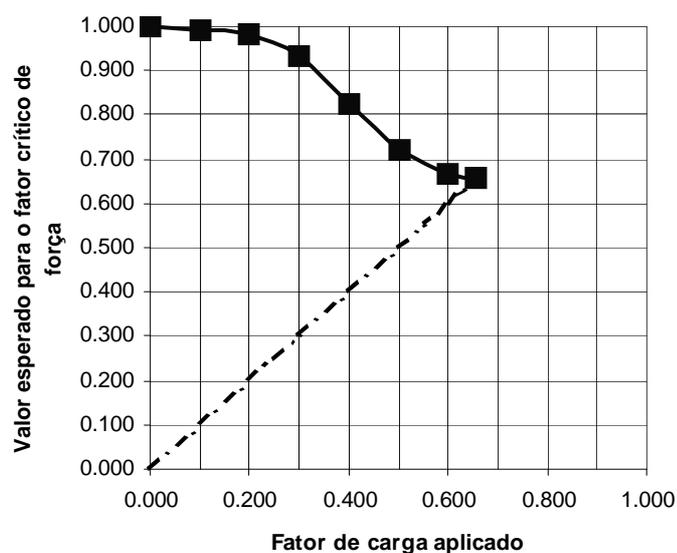


Figura 7.5 – Coluna: convergência do caso 2c.

Aumentando-se o fator de força aplicado, o valor crítico esperado converge para o próprio valor aplicado, identificando um ponto crítico.

Observa-se que a aplicação do método do comprimento de arco registra somente o comportamento não-linear físico e não identifica o ponto crítico de bifurcação, uma vez que o carregamento é ortogonal ao modo de instabilidade.

## 7.5 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE PÓRTICO SUBMETIDO A FORÇAS VERTICAIS

O terceiro exemplo é o pórtico apresentado na Figura 7.6. A estrutura é contraventada na direção transversal. Os elementos apresentam seção transversal do tubo 10S (Tabela 7.3) com a mesma discretização adotada no item 7.4.

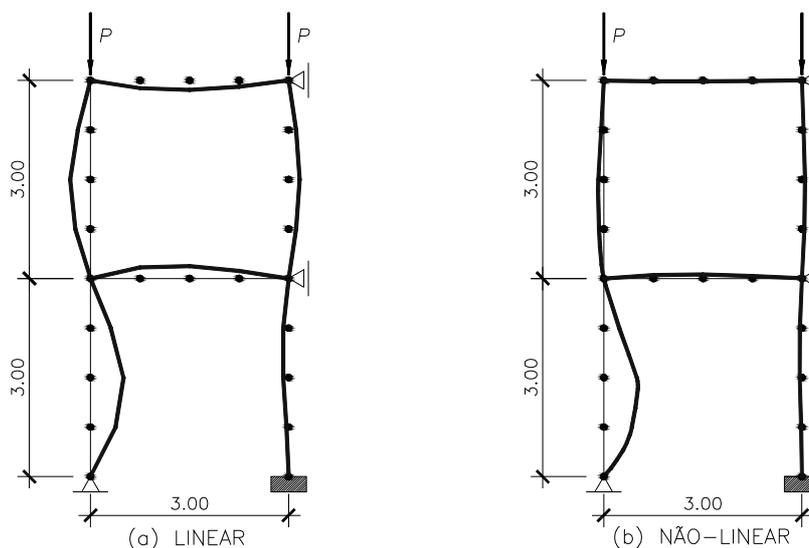


Figura 7.6 – Pórtico contraventado: modos de instabilidade.

Considerando-se material com comportamento linear e módulo de elasticidade na origem a força crítica obtida é  $P_{cr} = 1568kN$ . Ao considerar-se o comportamento não-linear do aço inoxidável do item 7.3 obtém-se o modo de instabilidade apresentado na Figura 7.6(b) e força crítica  $P_{cr} = 313kN$ . A Figura 7.7 apresenta o deslocamento vertical do nó em que a força é aplicada nos dois casos, e mostra a diferença significativa de comportamento com o uso de material não-linear.

Ressalta-se que, apesar de semelhantes, os modos de instabilidade linear e não-linear apresentam diferenças.

Na Figura 7.8 observa-se o processo de convergência do valor esperado para a força crítica para os dois casos.

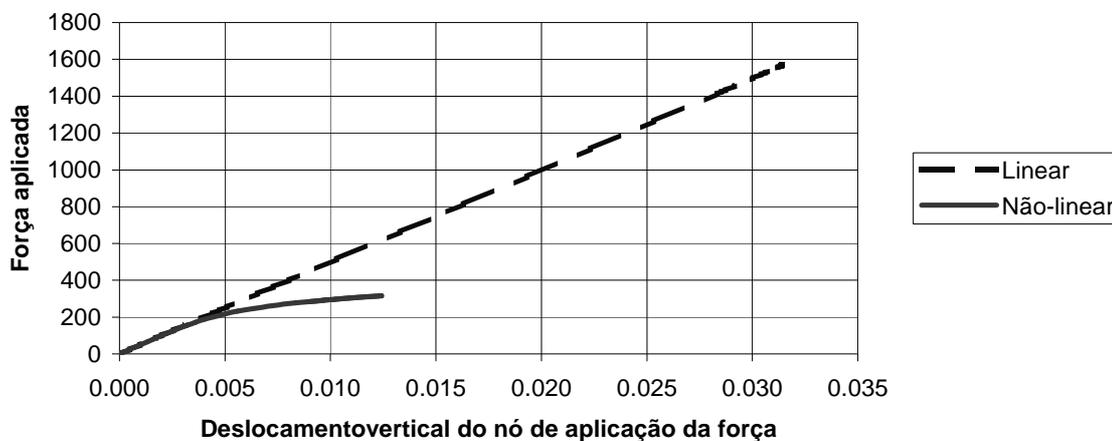


Figura 7.7 – Pórtico: deslocamento vertical do nó de aplicação da força.

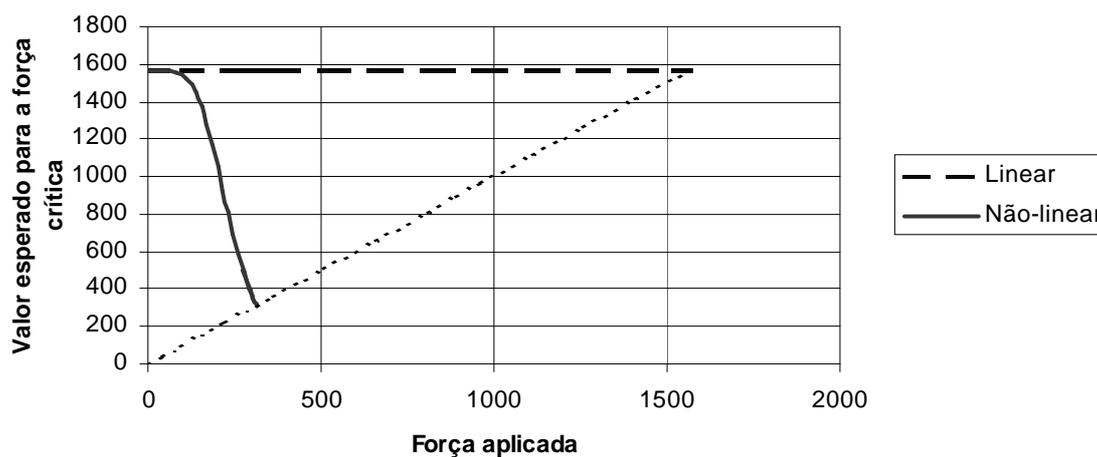


Figura 7.8 – Pórtico: convergência da força crítica.

## 7.6 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE TRELIÇA

A estrutura desta análise é apresentada na Figura 7.9. Trata-se de uma treliça com 3,0 m de altura e vão de 12,0 m. Os elementos apresentam a mesma discretização da seção transversal e o mesmo comportamento não-linear físico adotados na análise do item 7.5.

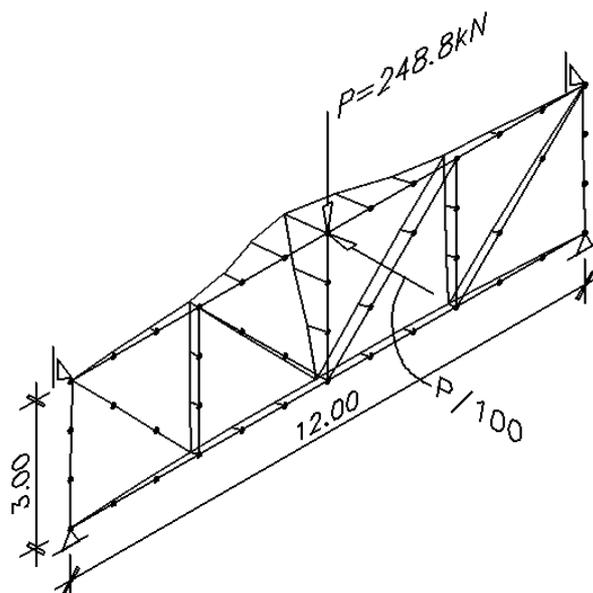


Figura 7.9 – Treliça para primeira condição de restrição nodal

Aplica-se juntamente com a força  $P$  no nó central do banzo superior, uma força horizontal equivalente a  $P/100$ . O modo de instabilidade associado é apresentado na Figura 7.9.

Na Figura 7.10 observa-se o caminho de equilíbrio obtido com o método do comprimento de arco com o ponto crítico limite correspondente à força crítica  $P_{cr} = 248,8\text{ kN}$ , determinada por meio da análise de autovalor.

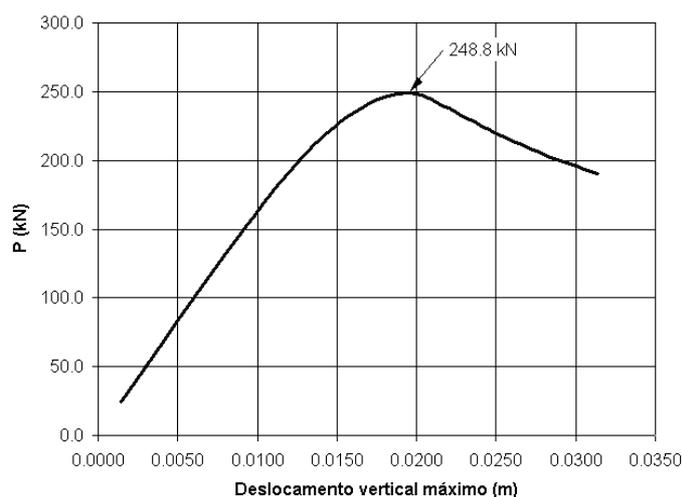


Figura 7.10 – Método do comprimento de arco para primeira condição de restrição nodal.

As condições de restrição nodal da mesma análise são alteradas conforme é mostrado na Figura 7.11, juntamente com os modos de instabilidade não-linear encontrados.

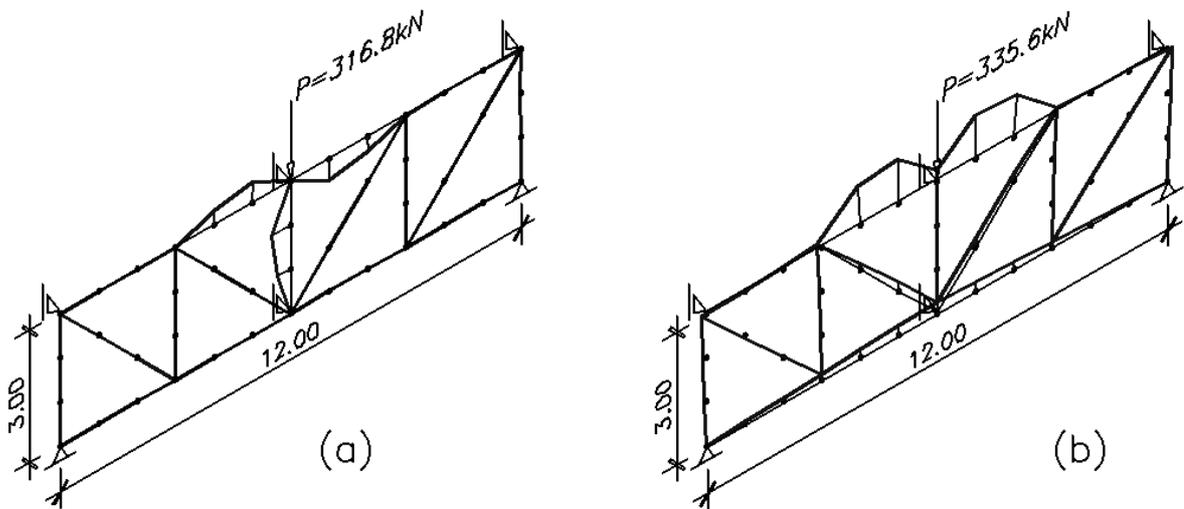


Figura 7.11 – Treliça para segunda condição de restrição nodal.

Observa-se na Figura 7.12 que a implementação do método do comprimento de arco permite identificar o ponto crítico limite correspondente a  $P_{cr} = 335,6 \text{ kN}$ . Entretanto essa formulação não identifica o ponto crítico de bifurcação correspondente a  $P_{cr} = 316,8 \text{ kN}$ , determinado pela metodologia proposta.

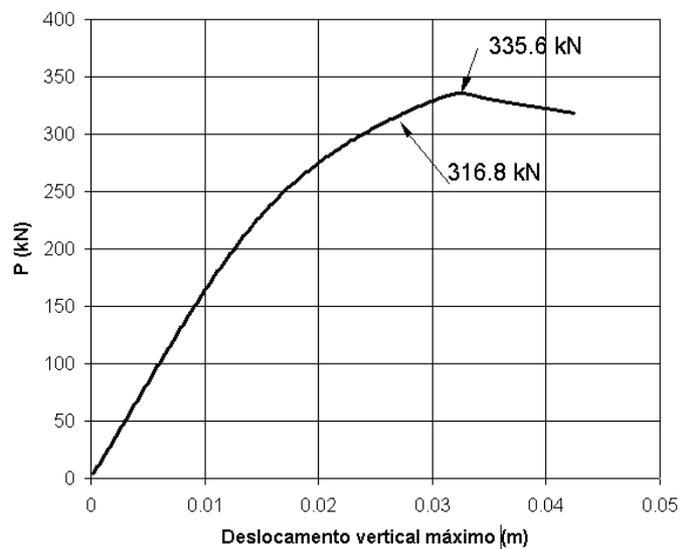


Figura 7.12 – Método do comprimento de arco para segunda condição de restrição nodal.

## 7.7 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ARCO TRELIÇADO

A estrutura desta análise é apresentada na Figura 7.13. A estrutura é um arco circular formado por elementos de barra.. Trata-se de uma adaptação do arco que foi analisado por CRISFIELD (1997, p.407) utilizando-se elementos de treliça e material de comportamento linear.

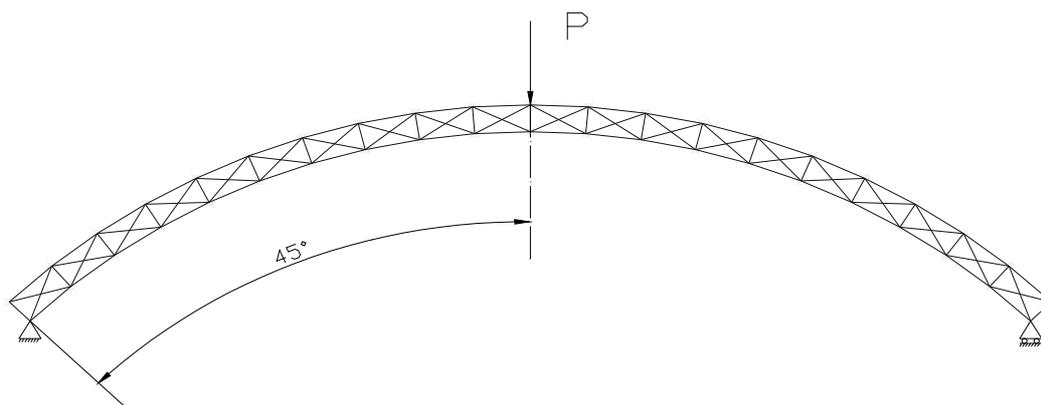


Figura 7.13 – Arco treliçado (adaptado de CRISFIELD, 1997).

Na Tabela 7.4 são apresentados os dados da estrutura e da discretização utilizada.

Tabela 7.4– Dados do arco treliçado.

Total de nós	42
Total de elementos	101
Raio	48 m
Altura	2 m
Tipo de elemento	Barra não linear <ul style="list-style-type: none"> <li>• seção circular</li> <li>• diâmetro – 0,064 m</li> <li>• discretização <ul style="list-style-type: none"> <li>– 8 setores radiais</li> <li>– 8 coroas circulares</li> </ul> </li> </ul>
Força aplicada	$P = 100 \text{ kN}$
Material	Linear elástico $E = 2,0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0,3$

Utilizando-se o programa desenvolvido obteve-se a força crítica  $P_{cr} = 293,8 \text{ kN}$ , enquanto que o SAP 2000 apresentou valor de 288,8 kN.

A Figura 7.14 apresenta o processo de convergência obtido.

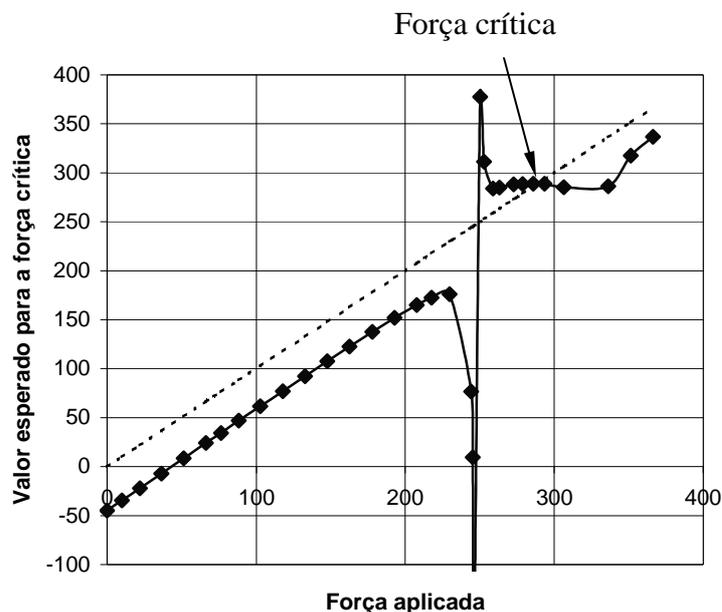


Figura 7.14 – Arco treliçado: convergência da força crítica.

Na Figura 7.15 o modo de instabilidade correspondente ao ponto crítico obtido está sobreposto à estrutura não deformada tracejada.

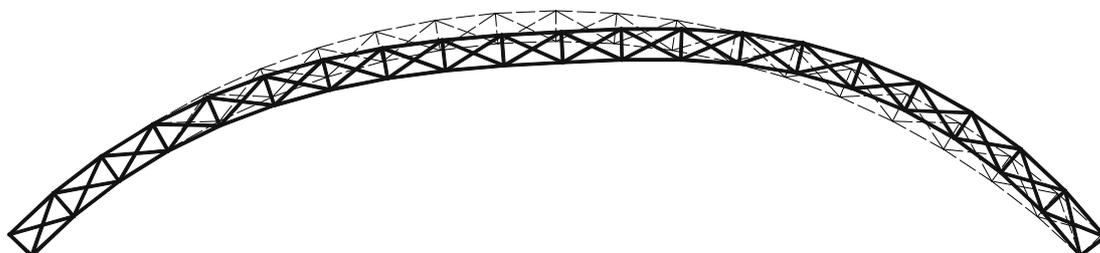


Figura 7.15 – Arco treliçado: modo de instabilidade.

## 7.8 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE DOMO TRIDIMENSIONAL

O objeto desta análise é um domo tridimensional apresentado nas Figuras 7.16 e 7.17. Trata-se de estrutura, que foi analisada por CRISFIELD (1997, p.395), na qual os elementos de treliça foram substituídos por elementos de barra..

O carregamento é de 0,5 N no topo do domo e 1,0 N em cada um dos nós do anel interno, conforme adotado no modelo de referência.

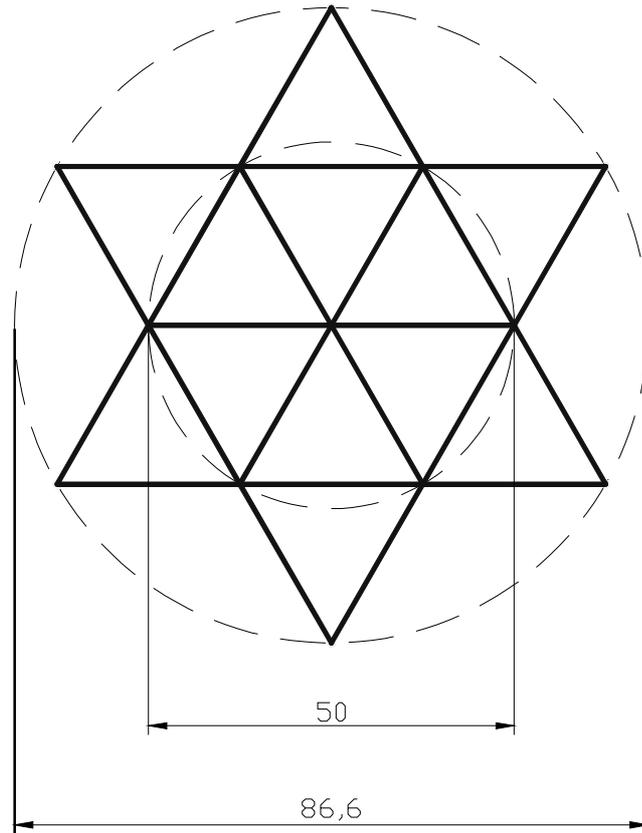


Figura 7.16 – Vista superior de domo tridimensional  
(adaptado de CRISFIELD, 1997).

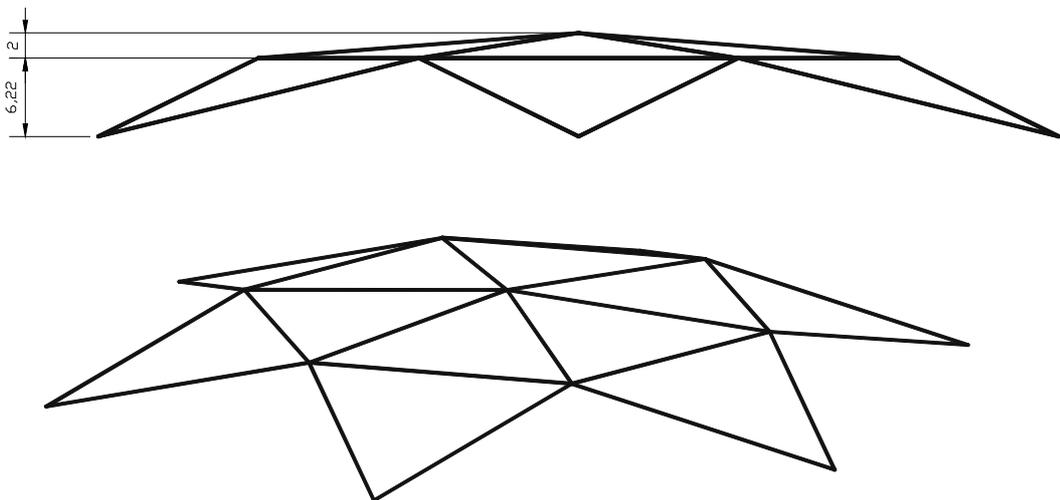


Figura 7.17 – Vista lateral e em perspectiva de domo tridimensional  
(adaptado de CRISFIELD, 1997).

Outros dados referentes ao domo são apresentados na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 – Dados do domo tridimensional.

Total de nós	13
Total de elementos	24
Tipo de elemento	Barra não linear <ul style="list-style-type: none"> <li>• seção circular</li> <li>• diâmetro – 8 mm</li> <li>• discretização <ul style="list-style-type: none"> <li>– 18 setores radiais</li> <li>– 3 coroas circulares</li> </ul> </li> </ul>
Material	Linear elástico $E = 2,0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0,3$

A Figura 7.18 ilustra o processo de convergência do fator de carga crítico. O fator crítico de força obtido com o programa desenvolvido foi de 0,808. O valor obtido é próximo 5% do fator crítico de força igual a 0,855 fornecido pelo programa SAP 2000.

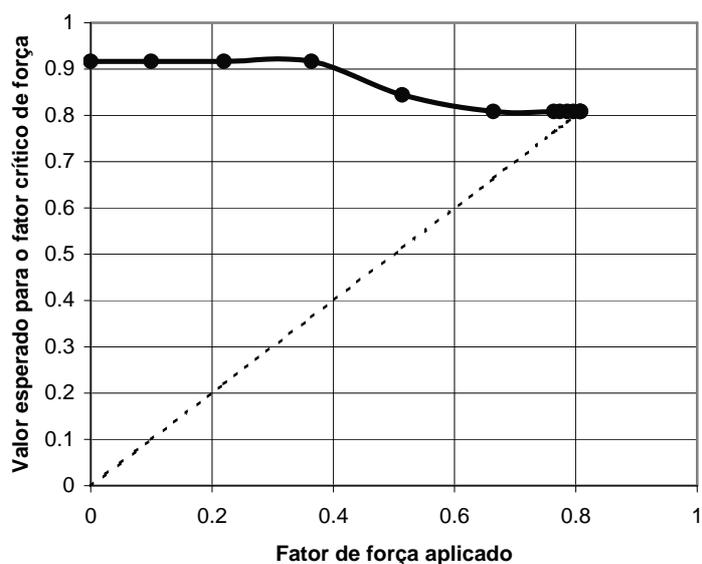


Figura 7.18 – Domo tridimensional: convergência do fator crítico de força.

A Figura 7.19 ilustra o modo de instabilidade correspondente ao fator de carga calculado.

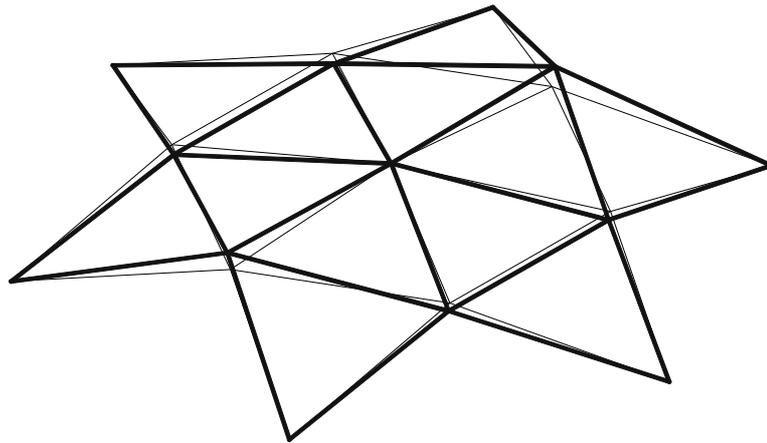
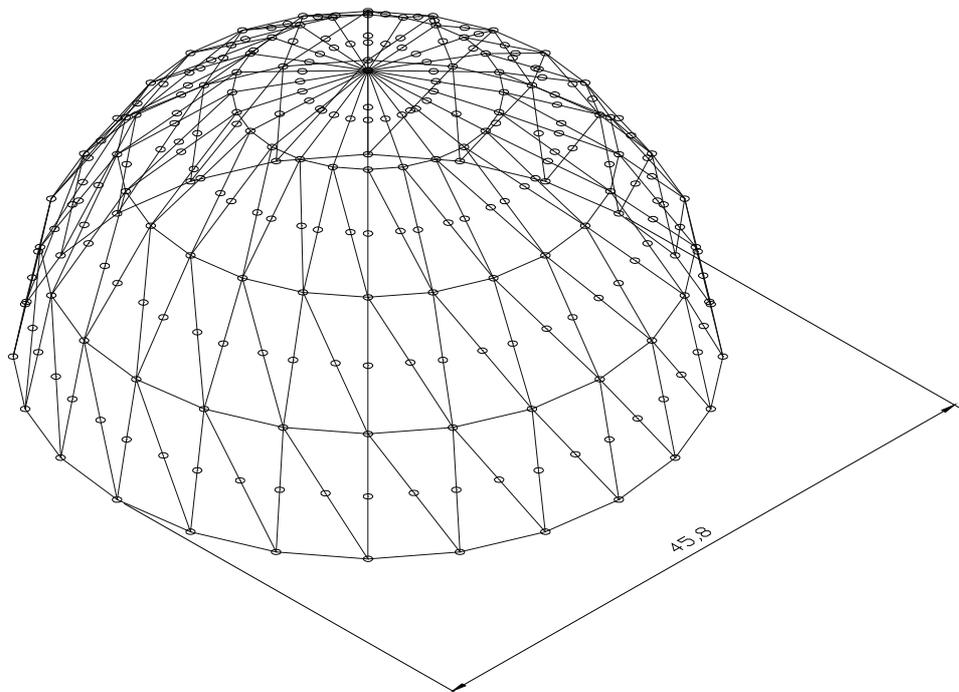


Figura 7.19 – Domo tridimensional: modo de instabilidade.

## 7.9 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE DOMO HEMISFÉRICO SCHWEDLER

Neste item analisa-se a estabilidade de domo hemisférico Schwedler estudado por ALVES (1995, p.229). A Figura 7.20 ilustra a estrutura com a discretização adotada na análise realizada.



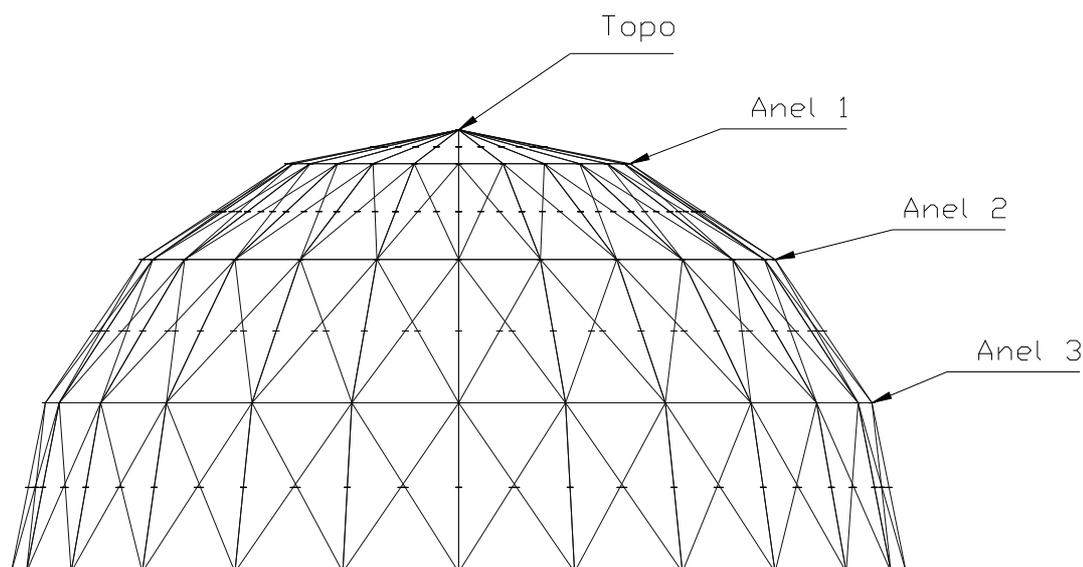


Figura 7.20 – Domo hemisférico Schwedler discretizado por elementos finitos (adaptado de ALVES, 1995).

A Tabela 7.6 apresenta informações sobre os elementos e as forças aplicadas. Adotou-se o carregamento proposto por ALVES (1995, p.229).

Tabela 7.6 – Domo hemisférico Schwedler: dados da discretização.

Total de nós	265
Total de elementos	432
Tipo de elemento	Barra não linear com seção circular
	Diâmetro – 0,064m
	Discretização – 8 setores radiais e 8 coroas circulares
Forças aplicadas	Topo – 80,42 kN
	Anel 1 – 17,63 kN
	Anel 2 – 24,94 kN
	Anel 3 – 17,63 kN
Material dos elementos	Comportamento elástico linear
	$E = 2,0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0,176$

A Figura 7.21 apresenta o processo de convergência obtido para o fator crítico de força ao longo do caminho de equilíbrio.

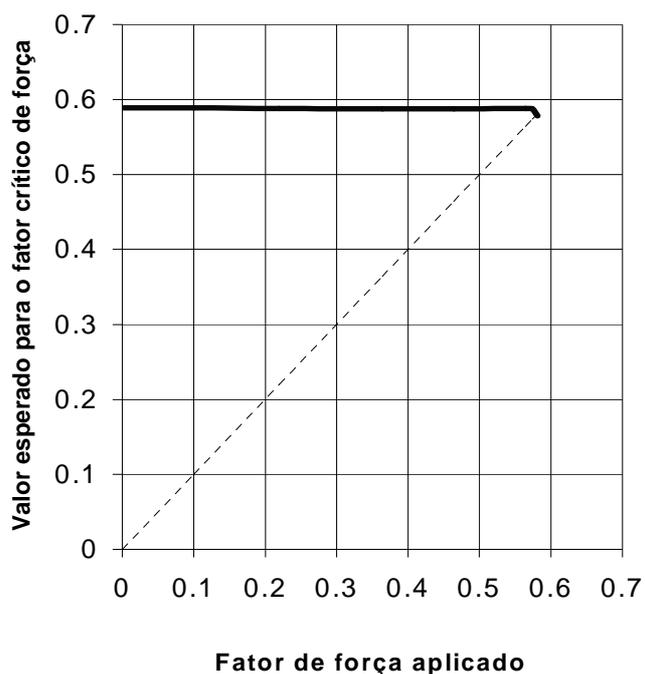


Figura 7.21 – Domo hemisférico Schwedler: convergência do fator crítico de força.

O mesmo modelo foi analisado com o programa SAP 2000. A Tabela 7.7 apresenta a comparação dos dados obtidos. Considera-se que as diferenças são aceitáveis e que ocorrem devido às diferenças existentes entre os modelos adotados em cada metodologia.

Tabela 7.7 – Domo hemisférico Schwedler: comparação de resultados.

	Fator crítico de força	Diferença
Programa	0,587	–
SAP 2000	0,628	7%
ALVES	0,649	10%

A Figura 7.22 ilustra o modo de instabilidade obtido que corresponde ao fator crítico de força calculado.

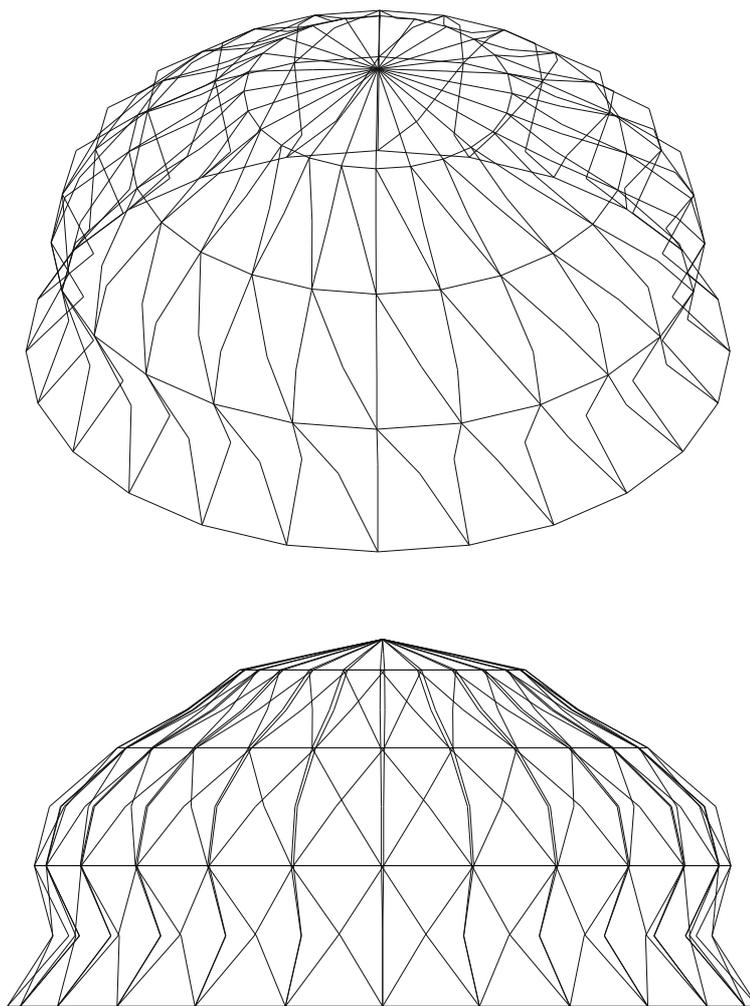


Figura 7.22 – Domo hemisférico Schwedler: modo de instabilidade.

Observou-se grande influência da escolha do incremento de fator de força para a obtenção do traçado do caminho de equilíbrio, necessitando-se de intervenção nos dados de entrada do exemplo.

#### 7.10 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE DOMO HEMISFÉRICO GITTERKUPPEL

A estrutura deste item é um domo hemisférico Gitterkuppel, que também foi analisado por ALVES (1995, p.229). A Figura 7.23 apresenta a forma da estrutura e a discretização adotada. Os dados dos elementos e forças são os mesmos da Tabela 7.6, que foram utilizados na análise do domo Schwedler.

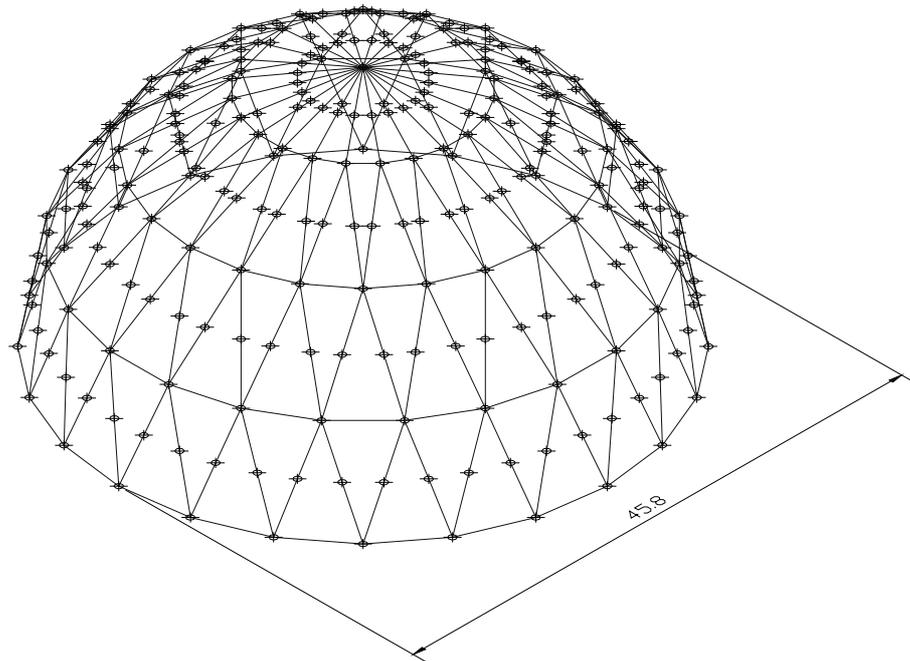


Figura 7.23 – Domo hemisférico Gitterkuppel

(adaptado de ALVES, 1995).

A Figura 7.24 apresenta o processo de convergência obtido para o fator crítico de força ao longo do caminho de equilíbrio.

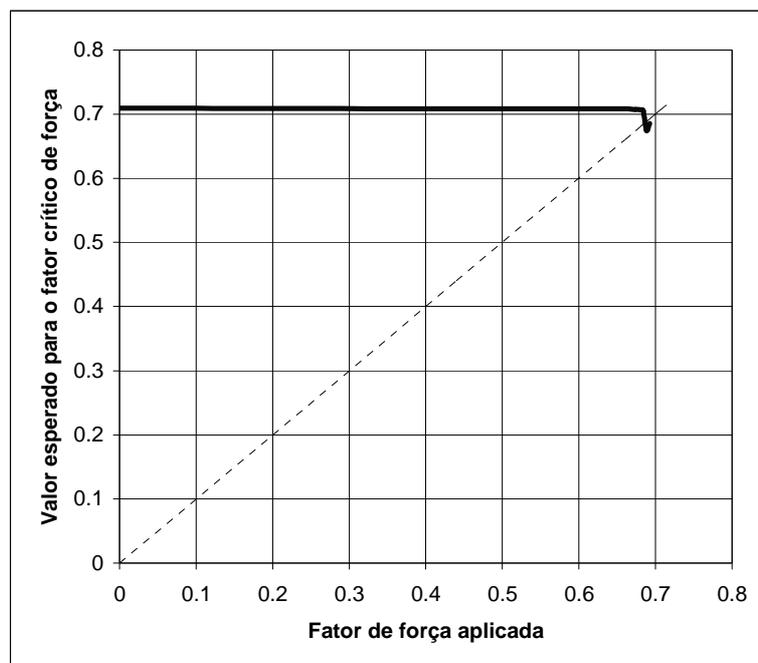


Figura 7.24 – Domo hemisférico Gitterkuppel: convergência do fator crítico de força.

A Figura 7.25 ilustra o modo de instabilidade correspondente ao fator crítico de força calculado.

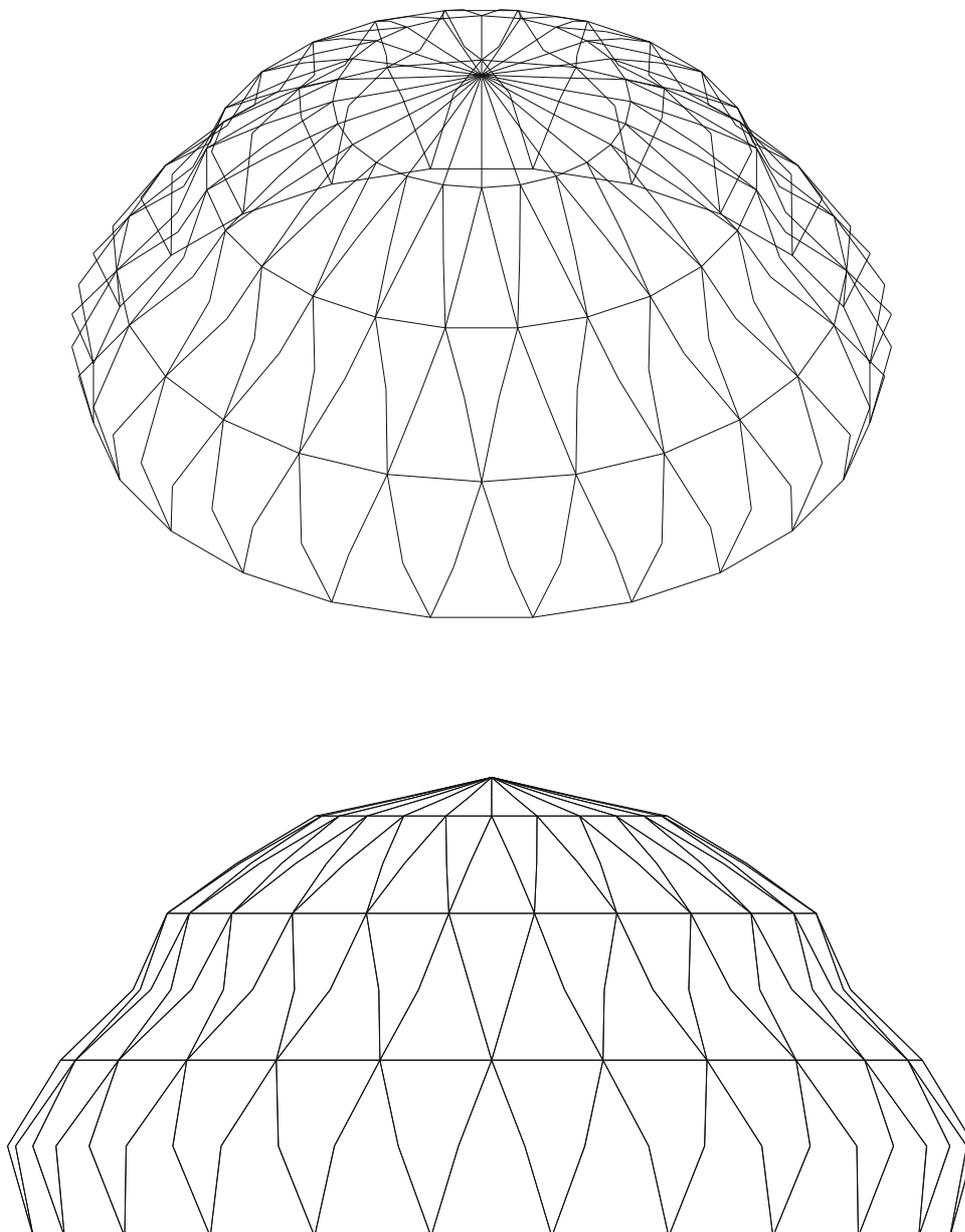


Figura 7.25 – Domo hemisférico Gitterkuppel: modo de instabilidade.

A Tabela 7.8 apresenta a comparação entre os resultados do programa desenvolvido, do SAP 2000 e da tese de ALVES. As diferenças existentes podem ser causadas pela diferença entre os modelos de elementos finitos adotados em cada metodologia, bem como aos diferentes processos numéricos utilizados na obtenção dos autovalores.

Tabela 7.8 - Domo hemisférico Gitterkuppel: comparação de resultados.

	Fator crítico	Diferença
Programa	0,687	–
SAP 2000	0,713	4%
ALVES	0,783	12%

ALVES (1995) mostra que o domo Gitterkuppel apresenta fator crítico de força maior do que o domo Schwedler. A Tabela 7.9 apresenta a comparação do fator crítico de força para os dois domos. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido apresentam valores próximos aos dos outros resultados, mostrando haver coerência entre os resultados dos dois domos.

Tabela 7.9 - Comparação entre domo Gitterkuppel e domo Schwedler.

	Fator crítico de força		
	Gitterkuppel	Schwedler	Gitterkuppel /Schwedler
Programa	0,687	0,587	1,170
SAP 2000	0,713	0,628	1,135
ALVES	0,783	0,649	1,206

## 7.11 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE PLACA QUADRADA EM COMPRESSÃO

Neste item analisa-se uma laje quadrada simplesmente apoiada submetida a força de compressão uniformemente distribuída. As condições de carga e restrições adotadas são apresentadas na Figura 7.26. A placa é discretizada com o elemento finito desenvolvido no capítulo 4.

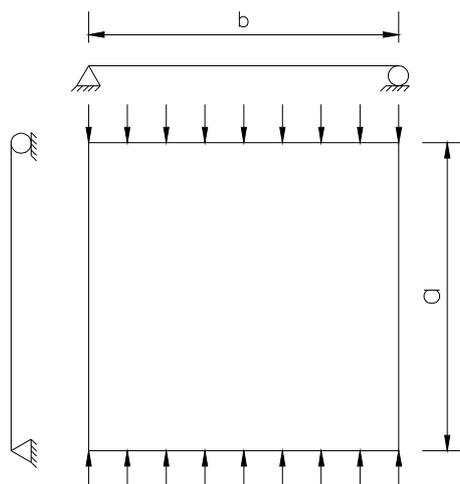


Figura 7.26 – Carregamento e restrições de placa.

A Tabela 7.10 apresenta as dimensões da laje e dados do material utilizado na análise numérica.

Tabela 7.10 – Dados da placa quadrada.

Elemento de discretização	Casca plana não-linear
Largura (m)	1,25
Comprimento (m)	1,25
Espessura (mm)	8
Material	Comportamento elástico linear $E = 1,7 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$
Carga aplicada	Compressão $N = 200 \text{ kN/m}$

A menor força crítica  $N_{cr}$  de uma placa retangular, com comprimento  $a$ , largura  $b$ , espessura  $t$ , simplesmente apoiada e sujeita à força uniformemente distribuída, apresenta solução analítica dada por:

$$N_{cr} = - \frac{p^2 D a^3 m}{b^2 \pi^2 a} + \frac{a \pi^2}{m^2} \quad (7.401)$$

onde  $m$  é um número inteiro e  $a = a/b$  (BAZANT, 2003, p.433).

O termo  $D$  é a rigidez à flexão da placa que é definido pela expressão

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.402)$$

A menor força crítica para a condição  $a = 1$ , isto é,  $a=b$ , ocorre quando  $m=1$ . Dessa forma o fator crítico de força da placa quadrada pode ser calculado por

$$l_{cr} = - \frac{4p^2 D}{a^2 N} \quad (7.403)$$

Adotando-se material com coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , são analisados quatro casos em que seqüencialmente aumenta-se a discretização da placa tanto na largura quanto no comprimento. A Tabela 7.11 apresenta esses casos e os respectivos resultados.

Tabela 7.11 – Resultados para a placa quadrada com  $\nu = 0$ .

Caso	Nº de elementos	Fator crítico de força		
		Resultado Analítico	Resultado do Programa	Diferença
9a	1	0,916320	1,392083	42,9 %
9b	2 x 2	0,916320	0,9728877	6,2 %
9c	3 x 3	0,916320	0,9173775	0,1 %
9d	10 x 10	0,916320	0,9163150	0,0 %

Na Tabela 7.12 os casos de discretização da Tabela 7.11 são mantidos e o coeficiente de Poisson do material é alterado para  $\nu = 0,3$ .

Tabela 7.12 – Resultados para a placa quadrada com  $\nu = 0,3$ .

Caso	Nº de elementos	Fator crítico de força		
		Resultado Analítico	Resultado do Programa	Diferença percentual
9e	1	1,0069455	1,5297617	51,9 %
9f	4	1,0069455	1,0632214	5,6 %
9g	9	1,0069455	1,0005213	-0,6 %
9h	100	1,0069455	1,0060082	-0,1 %

Verifica-se pelos dados das Tabelas 7.11 e 7.12 que a discretização com apenas um elemento não deve ser utilizada. Os resultados obtidos nos casos 9c, 9d, 9g e 9h indicam que se deve adotar uma discretização com mais de dois elementos em cada borda, e que com o elemento de casca plana desenvolvido consegue-se obter resultados próximos dos valores analíticos.

A Figura 7.27 apresenta os dados da diferença percentual dos resultados e do número de elementos de discretização das Tabelas 7.11 e 7.12.

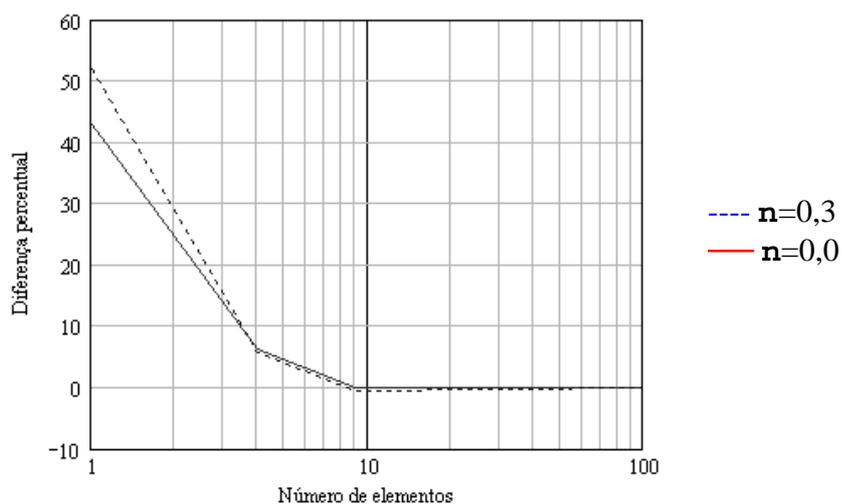


Figura 7.27 – Diferença percentual dos resultados vs. número de elementos de discretização.

Observa-se que a alteração do coeficiente de Poisson não altera a ordem de grandeza da diferença entre a solução analítica e a solução numérica obtida a partir de quatro elementos de discretização. Com mais de nove elementos de discretização o erro percentual é pouco significativo.

O modo de instabilidade correspondente ao caso 9h é apresentado na Figura 7.28.

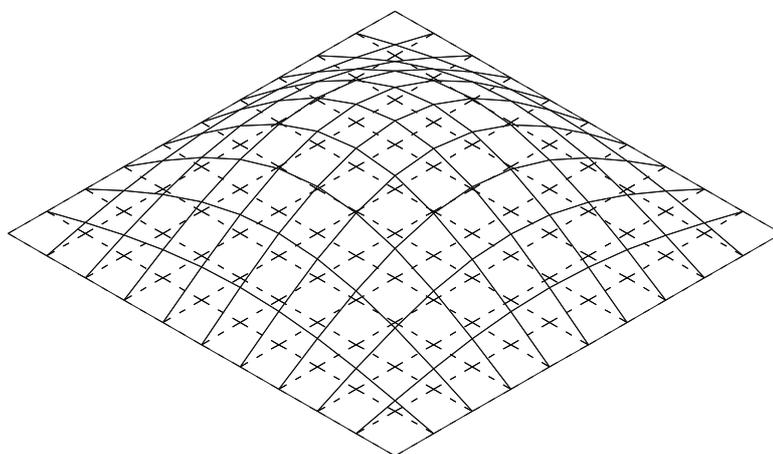


Figura 7.28 – Placa quadrada: modo de instabilidade.

Adotando-se o comportamento do aço inoxidável do item 7.2 para o caso 9.h, o fator crítico de força é alterado para  $l_{cr} = 1,0056799$ , mas o modo de instabilidade permanece o mesmo.

Apesar dos cuidados adotados com a seleção dos métodos numéricos e implementação computacional, observa-se que o caso 9h consome um maior tempo de processamento que os exemplos anteriores.

## 7.12 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE PLACA RETANGULAR EM COMPRESSÃO

Este item apresenta uma placa retangular simplesmente apoiada submetida a carga de compressão uniformemente distribuída. O elemento de placa desenvolvido no capítulo 4 é utilizado para discretizar a estrutura em 5 por 10 elementos.

São adotadas as mesmas condições de força e restrições apresentadas na Figura 7.26.

Tabela 7.13 – Dados da placa retangular.

Discretização	5 x 10 elementos de casca plana não-linear
Largura (m)	1,25
Comprimento (m)	2,50
Espessura (mm)	5
Material	Comportamento elástico linear $E = 1,7 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0,3$
Força aplicada	Compressão $N = 200 \text{ kN/m}$

A solução analítica para a menor força crítica é obtida da expressão (7.401) para  $a = 2$  e  $m = 2$ . A Tabela 7.14 apresenta a comparação dos resultados obtidos.

Tabela 7.14 – Placa retangular: comparação de resultados.

Solução	Força crítica (kN/m)
Programa	201,18
Analítica	201,39
Diferença	0,10 %

A Figura 7.29 apresenta o correspondente modo de instabilidade calculado.

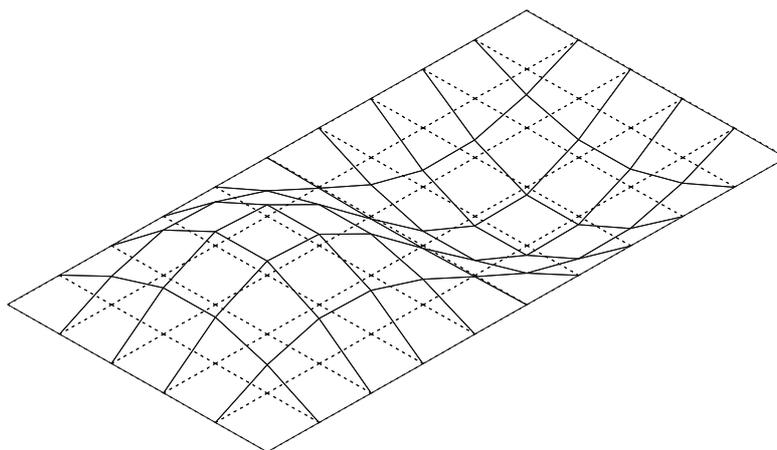


Figura 7.29 – Placa retangular: modo de instabilidade.

Com o comportamento do aço inoxidável do item 7.2, obtém-se o mesmo modo de instabilidade e uma força crítica ligeiramente menor:  $N_{cr} = 201,11$  kN/m.

### 7.13 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ARCO PARABÓLICO

A estrutura deste exemplo é um arco parabólico engastado com 8 m de vão, 2 m de altura, 4 m de largura e 8 mm de espessura. A discretização consiste em 10 elementos de casca plana ao longo da largura e 20 elementos de casca plana ao longo do vão. O material adotado é o aço inoxidável discutido no item 7.2.

Aplica-se uma força vertical uniformemente distribuída de  $1$  kN/m<sup>2</sup>, obtendo-se um fator crítico de força  $l_{cr} = 1,768$ . O modo de instabilidade correspondente é apresentado na Figura 7.30.

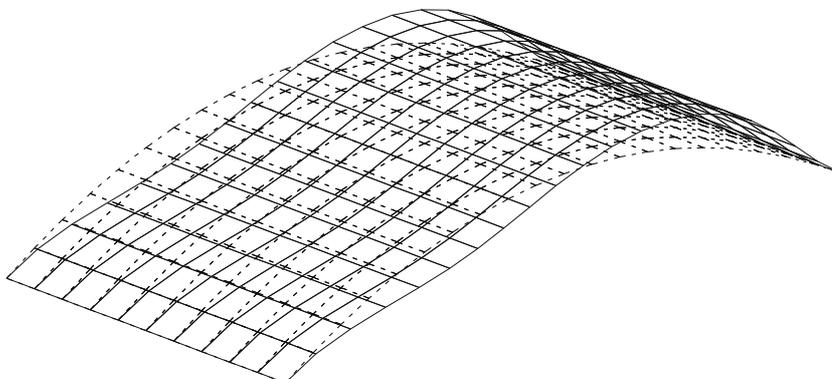


Figura 7.30 – Arco parabólico: modo de instabilidade.

Ressalta-se que devido à maior discretização adotada nesta análise ocorre um aumento significativo no tempo de processamento.

#### 7.14 LAMBAGEM AXISSIMÉTRICA DE TUBO CIRCULAR

Neste item analisa-se um tubo circular sujeito a compressão axial uniforme. O modelo apresenta raio  $R = 0,5$  m e espessura  $t = 5$  mm. O material adotado apresenta comportamento linear elástico com módulo de elasticidade  $E = 1,7 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

O tubo foi dividido em 12 seções circulares iguais ao longo do comprimento. Cada seção circular foi subdividida em 36 elementos de casca plana.

A solução analítica da força crítica  $N_{cr}$  para flambagem axissimétrica de cascas cilíndricas (BAZANT, 2003, p.450) é dada por:

$$N_{cr} = D \frac{1}{a^2} + \frac{Et}{R^2 D} \frac{1}{a^2} \quad (7.404)$$

Nessa expressão o termo  $D$  é a rigidez à flexão da casca plana, definido pela expressão (7.402) e o termo  $a$ , que minimiza a expressão, é dado por

$$a = \frac{L}{\pi} \quad (7.405)$$

onde  $L$  é o meio comprimento de onda de uma solução periódica, que ocorre quando a estrutura é simplesmente apoiada e seu comprimento  $l$  é múltiplo do meio comprimento de onda  $L$ .

O valor mínimo da força de flambagem na expressão (7.404) ocorre para

$$a = \frac{Et}{R^2 D} \quad (7.406)$$

Para o exemplo adotou-se um tubo com cinco comprimentos de onda de comprimento, obtendo-se para o comprimento  $l = 0,864$  m. A Tabela 7.15 apresenta a comparação dos resultados considerando-se uma força aplicada  $N_{xx} = -5000$  kN/m.

A diferença dos resultados pode ser explicada tanto pela discretização adotada para a forma circular, bem como pelas diferenças de formulação entre elementos de casca com e sem curvatura.

Considera-se que com elementos de casca com curvatura a metodologia pode obter um resultado mais preciso com menor discretização. Como o desenvolvimento desse tipo de elemento extrapola o escopo deste trabalho, o tema é proposto para novas pesquisas.

Tabela 7.15 – Flambagem axissimétrica: comparação de resultados.

Solução	Fator crítico
Programa	1,137
Analítica	1,029
Diferença	10,5 %

A Figura 7.31 ilustra o modo de instabilidade correspondente ao fator crítico de força obtido. Observa-se que o modo de instabilidade determinado apresenta formato semelhante à flambagem axissimétrica.

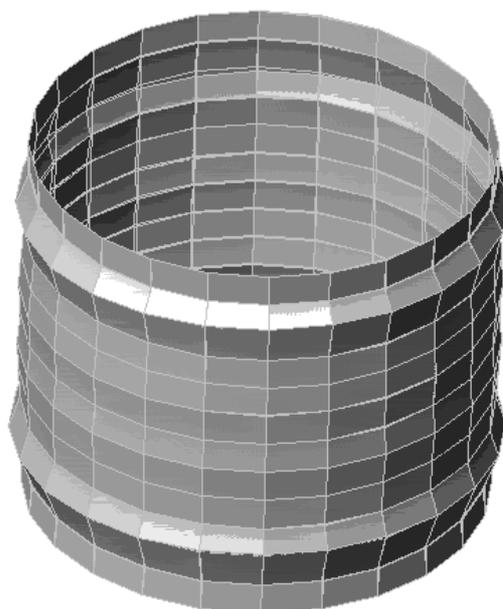


Figura 7.31 – Flambagem axissimétrica de tubo circular.

Como na análise anterior, devido a necessidade de muitos elementos na discretização, o tempo de processamento em cada iteração aumentou bastante, ressaltando-se a necessidade de se preocupar com a otimização do código.

## 7.15 FLAMBAGEM LOCAL DE TUBO QUADRADO

Neste item analisa-se um tubo quadrado sujeito a compressão axial uniforme. O tubo foi dividido em oito seções iguais ao longo do comprimento e cada lado da seção foi subdividida em quatro elementos. O modelo apresenta comprimento  $l=1,2$  m, lado  $b=0,16$  m e

espessura  $t=2,75$  mm. O material adotado apresenta comportamento linear elástico com módulo de elasticidade  $E = 1,7 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup> e módulo de Poisson  $\nu = 0,3$ .

BULSON (1970, p.302) apresenta a seguinte expressão para a tensão crítica de flambagem local:

$$s_{cr} = \frac{K_{1\min} p^2 E}{3(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b^3} \quad (7.407)$$

onde um tubo quadrado com espessura constante apresenta  $K_{1\min} = 4$ .

Para os dados do exemplo tem-se  $s_{cr} = -181,6$  MPa, que corresponde a uma força  $N_{cr} = -499,3$  kN/m. Aplicando-se uma força  $N = -500$  kN/m obtém-se os resultados apresentados na Tabela 7.16

Tabela 7.16 – Flambagem local de tubo quadrado: comparação de resultados.

Solução	Elementos por seção	Seções	Fator crítico	Diferença percentual
Programa - 96 elementos	12	8	0,287	-71 %
Programa - 128 elementos	16	8	0,420	-58 %
Programa - 192 elementos	24	8	0,422	-58 %
Programa - 384 elementos	24	16	0,796	-20 %
Programa - 480 elementos	16	30	0,950	-5 %
Analítica			0,998	

Os dados referentes a diferença percentual e número de elementos de discretização da Tabela 7.16 são apresentados na Figura 7.32. Observa-se na Figura 7.32 que a precisão do resultado melhora com o aumento do nível de discretização. No entanto, aumentando-se a quantidade de elementos, aumenta-se significativamente o tempo de processamento em cada iteração. Desta forma ressalta-se a necessidade de se preocupar com a otimização do código para se obter bons resultados em tempos aceitáveis.

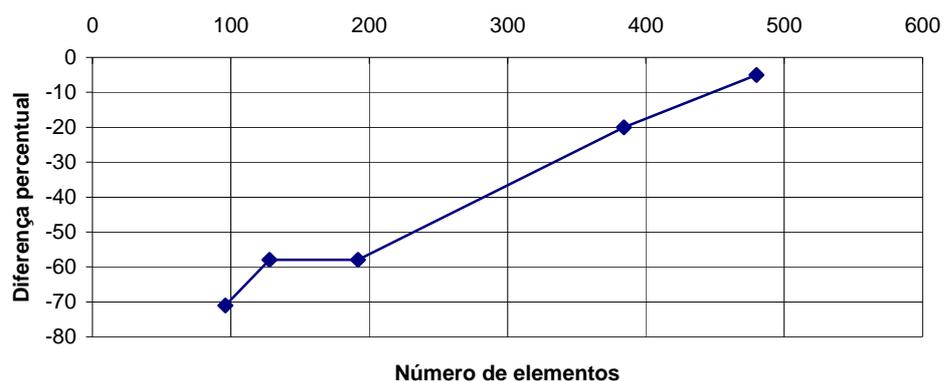


Figura 7.32 – Diferença percentual vs. número de elementos de discretização.

O modo de instabilidade obtido é apresentado na Figura 7.33.

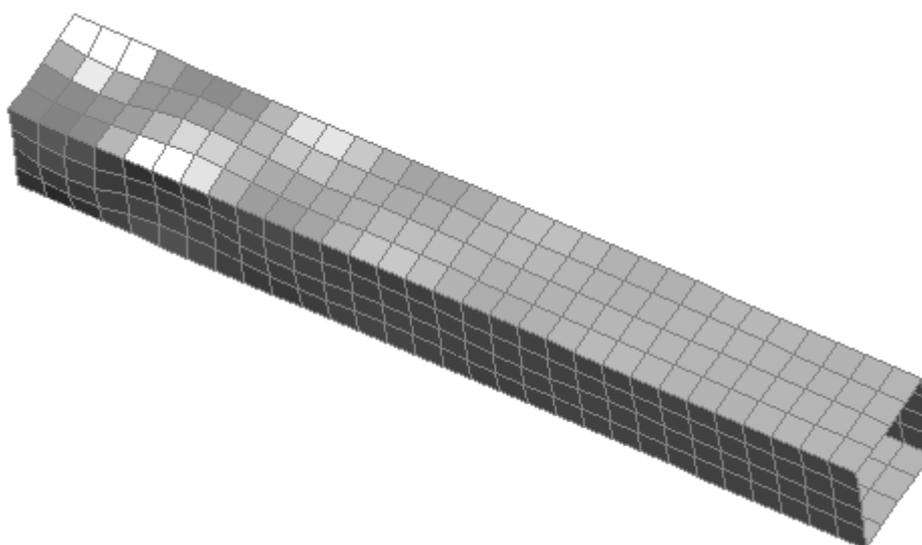


Figura 7.33 – Flambagem local de tubo quadrado.

Utilizando-se a curva do aço inoxidável do item 7.2, o fator crítico de força se reduz para  $l_{cr} = 0,943$ .

#### 7.16 OBSERVAÇÕES

A análise da estabilidade de coluna do item 7.2 mostra que as diferenças nos modelos matemáticos influenciam os resultados obtidos. Essa influência é também observada nos exemplos 5 a 8, ao se comparar os resultados do programa desenvolvido com o programa comercial SAP 2000.

Nas análises de estabilidade dos itens exemplos 7.4, 7.5 e 7.6 verifica-se que o programa consegue identificar os pontos limite e de bifurcação.

Nas análises de estabilidade da placa quadrada e da placa retangular, os resultados obtidos diferem pouco dos resultados analíticos, validando o elemento finito desenvolvido no capítulo 4 e o procedimento adotado para o cálculo da carga crítica em estruturas discretizadas por placas.

Apesar da utilização de métodos numéricos e técnicas computacionais adequadas, nas análises de estabilidade do vão parabólico, do tubo circular e do tubo quadrado, respectivamente, itens 7.13, 7.14 e 7.15, o programa consome muito mais tempo de processamento do que nas demais análises. Desta forma a análise de estabilidade de estruturas com maior complexidade pode se tornar inviável. A otimização do código é recomendada para que a metodologia seja executada dentro de períodos aceitáveis. Considera-se que essa otimização está além do escopo deste trabalho, e é uma das propostas para novas pesquisas.

Mesmo com um desconhecimento inicial, a implementação na linguagem C++ reduz o esforço envolvido na implementação de novos módulos e objetos, apresentando vantagens em relação a outras linguagens de programação.

O procedimento implementado para ajuste do incremento do fator de carga não é suficiente para determinar o caminho de equilíbrio em todas as situações. Nos exemplos 5 a 8 e 10 a 13 há necessidade de intervenção do analista no controle das iterações para se agilizar o cálculo da carga crítica de flambagem. O aperfeiçoamento deste procedimento é recomendado e merece ser assunto de futuras pesquisas.

No exemplo 13 o aumento da precisão, associado ao aumento da discretização, ressalta a importância do analista no processo, pois, na maioria dos casos, a discretização da estrutura é definida por ele. COOK (1989, p.24) salienta que a atuação do analista é fundamental tanto na elaboração do problema quanto na avaliação dos resultados. Estes devem ser comparados com soluções de modelos mais simples, com estruturas semelhantes ou com outros programas. Considera que, acima de tudo, o analista deve fazer uso de bom senso e experiência nos seus julgamentos.

Verifica-se também que há pouca modificação nos resultados, ao se alterar de material com comportamento linear para não-linear, pois nos exemplos o ponto crítico ocorre em condições próximas das lineares.

Os exemplos analisados permitem constatar que:

a) os resultados numéricos são consistentes;

b) a metodologia proposta consegue identificar pontos críticos, que não são identificados apenas com o traçado do caminho de equilíbrio;

c) consegue-se determinar casos particulares de flambagem, como a flambagem axissimétrica de tubo de seção circular e a flambagem local de tubo de seção quadrada.

Desta forma considera-se que a implementação é eficaz e a proposição feita nesta tese contribui para o estudo da estabilidade.

Nas aplicações apresentadas da metodologia não se analisou a presença das imperfeições na estabilidade estrutural. Considera-se que a modelagem das imperfeições exige uma formulação matemática, que extrapola o escopo deste trabalho.

Pode-se encontrar uma cuidadosa análise da sensibilidade da estabilidade às imperfeições no trabalho de KOITER (1945), demonstrando que as imperfeições reduzem o valor da força crítica nos casos de bifurcação assimétrica e bifurcação simétrica instável.

Propõe-se que em futuros trabalhos seja implementada a modelagem de imperfeições estruturais para analisar a estabilidade estrutural.

## 8 CONCLUSÕES

Nesse trabalho pesquisa-se a determinação numérica da menor força crítica de flambagem de uma estrutura conservativa modelada por elementos finitos, utilizando-se a formulação analítica da variação da matriz de rigidez tangente.

Inicialmente salienta-se que a instabilidade estrutural é uma das principais causas de falhas estruturais. Apresentam-se exemplos de construções, nos quais se observa que a utilização de materiais com alta resistência, a busca de menores custos e as exigências estéticas propiciam projetos estruturais com elementos susceptíveis a instabilidade.

Elabora-se uma cuidadosa revisão dos métodos numéricos e computacionais relevantes para a consecução deste trabalho, como a renumeração de nós, a solução de sistemas de equações lineares, a solução de problema generalizado de autovalor e o armazenamento de matrizes esparsas.

Argumenta-se que a verificação da estabilidade pode ser realizada pela análise estática, obtendo-se bons resultados com aplicação mais simples do que a análise dinâmica.

Na análise estática de estruturas discretas mostra-se que:

- a) a aplicação do método energético resulta num problema de autovalor que permite identificar pontos singulares do caminho de equilíbrio;
- b) a determinação do caminho de equilíbrio exige métodos incrementais adequados para tratar as não-linearidades;
- c) como, em cada ponto de equilíbrio obtido, a equação incremental e o problema de autovalor devem ser resolvidos, a matriz tangente de rigidez e sua respectiva variação têm que ser recalculadas a cada iteração.

Na metodologia proposta o caminho de equilíbrio é determinado pelo método do arco cilíndrico seguido de correção pelo método de Newton-Raphson.

As principais contribuições desse trabalho são:

- a) utilizar uma formulação mais expandida para o cálculo da variação da matriz de rigidez tangente no problema de autovalor,

b) aplicar o cálculo de autovalor em cada etapa do caminho de equilíbrio.

Em outras abordagens a variação da matriz tangente de rigidez é obtida por interpolação numérica ou sem considerar a influência das não-linearidades geométrica e física. Na abordagem adotada esta variação é desenvolvida analiticamente para cada elemento, considerando-se ambas não-linearidades. Posteriormente a forma analítica é calculada numericamente. Isto implica numa implementação mais complexa e computacionalmente mais onerosa, mas que apresenta bons resultados.

Para a aplicação da metodologia proposta são desenvolvidos dois elementos finitos tridimensionais, barra e casca plana. Os resultados satisfatórios mostram que a utilização da formulação Lagrangeana Total nesses elementos é adequada à metodologia. No entanto, observa-se que estruturas modeladas com os elementos de casca plana consomem muito mais tempo de processamento devido à maior complexidade deste elemento.

Verifica-se que nos exemplos analisados, o programa implementado obtém valores para o fator crítico de carga, que estão bastante próximos tanto das soluções analíticas quanto das soluções numéricas correlatas.

Constata-se que a metodologia consegue identificar pontos críticos, que não são identificados apenas com o traçado do caminho de equilíbrio. Consegue-se, também, determinar casos particulares de flambagem, como a flambagem axissimétrica de tubo de seção circular e a flambagem local de tubo de seção quadrada.

Desta forma conclue-se que a metodologia apresentada é eficaz e que o objetivo desta tese foi atingido.

Considera-se que o código desenvolvido apresenta potencial para analisar a estabilidade de quaisquer estruturas que possam ser discretizadas por placas ou vigas. Isto representa uma vantagem sobre os métodos analíticos, pois estes se limitam, na maioria dos casos, a soluções de problemas com geometria simples.

Além disso, como a maioria dos trabalhos práticos de engenharia de estruturas se aplica a sistemas conservativos, este trabalho contribui para o estudo da estabilidade de estruturas em geral.

A utilização de C++ em detrimento de outras linguagens de programação, como Fortran e Pascal, mostra que suas características, expostas no capítulo 6, permitem grande facilidade na implementação de programas de pesquisa.

Esse trabalho também mostra que a metodologia pode ser implementada com baixo custo, utilizando-se um computador de pequeno porte tipo PC e sem a necessidade de pacotes de programas especiais de análise estrutural ou análise numérica.

Desta forma, utilizando o método dos elementos finitos e a solução de problemas de autovalor, contribui-se para o desenvolvimento da análise da estabilidade de estruturas com comportamento físico linear e não-linear.

No entanto, alguns aspectos merecem ser aperfeiçoados. Além disto, como esta tese apresenta uma pequena parcela do assunto, são feitas as seguintes sugestões para futuros trabalhos:

- formulação de elemento de casca com paredes finas;
- formulação de elementos de placa e casca com paredes espessas;
- otimização do código visando reduzir o tempo de processamento;
- aperfeiçoamento da determinação de caminho crítico;
- codificação visando processamento paralelo distribuído;
- elaboração de exemplos visando comparação com normas técnicas.
- análise dinâmica da estabilidade;
- influência de tensões residuais na estabilidade;
- influência de imperfeições estruturais na estabilidade;
- estabilidade de estruturas inelásticas.

## REFERENCIAS

### OBRAS CITADAS

ALVES, Ricardo Valeriano. Instabilidade não-linear elástica de estruturas reticuladas espaciais. Tese de doutorado. COPPE UFRJ. 1995.

BAZANT, Z. P. e CEDOLIN, L. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories. Dover Publications Inc. 2003. 1011 p.

BATHE, Klaus-Jürgen; Finite Element Procedures. Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall. 1996. 1037 p.

BULSON, P. S. The stability of flat plates. Chatto & Windus Ltd. 1970. 470 p.

CHAN, E.C. Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Shells with Edge Beams. Ph.D. Dissertation. Berkeley: University of California, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, 1982.

COOK, Robert D., MALKUS, David S. e PLESHA, Michael E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Third edition. New York. John Wiley & Sons. 1989. 630 p.

CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, Vol. I, 1991, Vol. II, 1997.

CROLL, J. G. A. e WALKER, A. C. *Elementos de estabilidad estructural*. Barcelona, Editorial Reverté. 1975. 229 p.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR BAUTECHNIK. Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung Z-30.3-6 "Erzeugnisse, Verbindungsmittel und Bauteile aus nichtrostenden Stählen". Antragsteller: Informationsstelle Edelstahl Rostfrei. 2003.

FALZON, B. G. e HITCHINGS, D. *An introduction to modeling buckling and collapse*. Glasgow, NAFEMS Ltd. 2006. 136 p.

FELIPPA, Carlos A. *Lecture Notes: Nonlinear Finite Element Methods*. University of Colorado. 2001. Disponível em <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d/>. Acesso em: 17 set 2006.

FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y. e WAKABAYASHI Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. Universidade de São Paulo. 2005. Disponível em <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. Acesso em: 06 out. 2005.

FRUCHTTENGARTEN, Jairo. *Sobre o estudo da flambagem lateral de vigas de aço por meio da utilização de uma teoria não-linear geometricamente exata*. USP. Universidade de São Paulo. 2005. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3144/tde-10102005-222432/>. Acesso em: 12 set. 2006. 251p.

GEERS, M. G. D. Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part I: the subplane control approach. *International Journal For Numerical Methods In Engineering* vol 46, p. 177-204. 1999.

GOLUB, Gene H. e VAN LOAN, Charles F. *Matrix Computation*. Third edition. Baltimore. The John Hopkins University Press. 1996. 694 p.

GOLUB, Gene H. e VAN DER VORST, Henk A. *Eigenvalue computation in the 20th century*. *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol 123 p. 35-65. 2000.

GONÇALVES, Rodrigo e CAMOTIM, Dinar. *GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns*. *Computers and Structures* 12 p. 1473–1484. 2004. Disponível em: [www.elsevier.com/locate/compstruc](http://www.elsevier.com/locate/compstruc). Acesso em: 29 ago 2005.

HUGHES, Thomas J. R. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall Inc. 1987. 803 p.

JENNINGS, Allan e MCKEOWN, J. J. *Matrix Computation*. 2nd edition. Chichester, England. John Wiley & Sons Ltd. 1993. 427 p.

KOITER, Warner Tjardus. *The stability of elastic equilibrium*. Delft. 1945. Translation. AFFDL-TR-70-25. 1970. 320 p.

LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. 4th Edition. Toronto, Canada. University of Toronto Press. 1970. 418 p.

MARIANI, Antonio C. *Teoria dos Grafos*. Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em : <http://www.inf.ufsc.br/grafos/livro.html>. Acesso em 06 out 2005.

MEMON, Bashir-Ahmed e SU, Xiao-zu. *Arc-length technique for nonlinear finite element analysis*. *Journal of Zhejiang University Science*. Vol 5(5) pág 618-628. 2004.

PIMENTEL, Maria da Graça C. e OLIVEIRA, Maria Cristina F. *Teoria dos Grafos*. Manual.. Universidade de São Paulo. 1996. Disponível em: <http://www.icmc.sc.usp.br/manuals/sce183/grafos.html>. Acesso em: 17 set. 2005.

RALSTON, Anthony. *A First Course in Numerical Analysis*. Tokyo. McGraw-Hill Kogakusha Ltd. 1965. 578 p.

SCHULZ, Mauro e ANDO, J. K. *Modos de instabilidade considerando o comportamento não-linear dos materiais*. Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2007 / XXVIII

Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia. Porto, Portugal. 2007. 20 p.

SCHULZ, Mauro e REIS, Francisco José Costa. *Estabilidade das Estruturas de Concreto para Solicitações Combinadas*. V Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto. Universidade de São Paulo. 2003.

SILVA, Márcio Andrade da. *Flambagem de perfis de aço de paredes delgadas e de seção aberta*. Dissertação de mestrado. UFF. 2001. 193 p.

SLOAN, S. W. *A Fortran Program for Profile and Wavefront Reduction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 28. p. 2651-2679. 1989.

SORIANO, Humberto L. e LIMA, Silvio S. *Análise de estruturas em computadores: estruturas reticuladas*. Volume 1. UFRJ. 1997. 270 p.

ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Fourth Edition. Volume 2. London. McGraw-Hill Book Company. 1991.

#### OBRAS CONSULTADAS

BAO, G., JIANG, W. e ROBERTS J. C. *Analytic And Finite Element Solutions For Bending And Buckling Of Orthotropic Rectangular Plates*. International Journal of Solids and Structures. Vol. 34, No. 14. p. 1797-1822. 1997.

BATHE, Klaus-Jürgen; *Finite Element Procedures*. Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall. 1996. 1037 p.

BEDAIR, Osama K. *The Application Of Mathematical Programming Techniques To The Stability Analysis Of Plate/ Stiffener Assemblies*. Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering. Vol. 148 p. 353-365. 1997.

COOK, Robert D., MALKUS, David S. e PLESHA, Michael E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Third edition. New York. John Wiley & Sons. 1989. 630 p.

FELIPPA, Carlos A. *Lecture Notes: Introduction to Finite Element Methods*. University of Colorado. 2004. Disponível em <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d/>. Acesso em: 22 set. 2005.

FELIPPA, Carlos A. *Lecture Notes: Advanced Finite Element Methods*. University of Colorado. 2006. Disponível em <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d/>. Acesso em: 17 set. 2006.

HUGHES, Thomas J. R. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall Inc. 1987. 803 p.

IBRAHIMBEGOVIC, Adrian e WILSON, Edward L. A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell finite elements with six nodal degrees of freedom. Communications in Applied Numerical Methods, vol. 7. pag 1-9. 1991.

SCHULZ, M. e FILIPPOU, F.C. *Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation*. Int. J. Num. Meth. Eng., 50, 761-785, 2001.

SORIANO, Humberto Lima. *Elementos Finitos de Placas e de Cascas com Campos Assumidos de Deformações*. Tese. Rio de Janeiro. UERJ. 2002. 265 p.

TURCO, Emilio e CARACCIOLO, Paola. *Elastoplastic analysis of Kirchhoff plates by high simplicity finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering. Vol. 190 p. 691-706. 2000.

WASHIZU, Kyuchiro. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Second Edition. Oxford, England. Pergamon Press. 1975. 412 p.

ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Fourth Edition. Volume 1. Singapore. McGraw-Hill Book Company. 1998. 648 p.

ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Fourth Edition. Volume 2. London. McGraw-Hill Book Company. 1991.