

OSVALDO LUIZ DE CARVALHO SOUZA

**APLICAÇÃO DA TEORIA DA CONFIABILIDADE ÀS VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO REFORÇADAS À TORÇÃO COM COMPÓSITO DE FIBRAS DE  
CARBONO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia da Construção.

Orientador: Prof. Emil de Souza Sánchez Filho, D. Sc.  
Co-orientador: Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr. Ing.

NITERÓI  
2011

OSVALDO LUIZ DE CARVALHO SOUZA

**APLICAÇÃO DA TEORIA DA CONFIABILIDADE ÀS VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO REFORÇADAS À TORÇÃO COM COMPÓSITO DE FIBRAS DE  
CARBONO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia da Construção.

Aprovado em março de 2011:

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Emil de Souza Sánchez Filho, D. Sc. – Orientador  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr. Ing. – Co-orientador  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho, D. Sc.  
Pontifícia Universidade Católica – RJ

---

Prof. Robson Luiz Gaiofatto, D. Sc.  
Universidade Católica de Petrópolis

---

Prof. Sérgio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Andréia Abreu Diniz de Almeida, D. Sc.  
Universidade Federal Fluminense

Dedico esse trabalho  
à minha esposa Carmen Verônica,  
aos meus filhos Bruno e Rafael,  
e à minha neta Mariana.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos professores Emil de Souza Sánchez Filho e Luiz Eloy Vaz, que com seus conhecimentos e disponibilidade possibilitaram-me concluir esse trabalho.

Ao engenheiro Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho pela sua gentileza e companheirismo em dirimir as dúvidas inerentes ao seu trabalho, e compartilhar material de grande importância ao desenvolvimento do meu estudo.

Aos meus amigos e familiares que se mostraram disponíveis para ouvir e incentivar.

Aos amigos João Pantoja e Marcela Tôrno, que além de ouvir e incentivar, disponibilizaram momentos para transmitir os seus conhecimentos sobre análise de confiabilidade.

A todos os professores que compuseram a banca.

A Deus.

## SUMÁRIO

<b>SUMÁRIO</b> .....	5
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	8
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	11
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	15
<b>RESUMO</b> .....	26
<b>ABSTRACT</b> .....	27
<b>1 – INTRODUÇÃO</b> .....	28
1.1 CONCEITOS BÁSICOS.....	28
1.2 JUSTIFICATIVA.....	31
1.3 OBJETIVO.....	32
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	33
<b>CAPÍTULO 2 – REFORÇO DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO COM CFC</b> .....	35
2.1 NOTAS INICIAIS.....	35
2.2 GHOBARAH, GHORBEL E CHIDIAC (2002) .....	35
2.3 PANCHACHARAM E BELARBI (2002) .....	42
2.4 SALOM, GERGELY E YOUNG (2004) .....	47

2.5	AMELI <i>et al.</i> (2005) .....	50
2.6	HII E AL-MAHAIDI (2006a) .....	54
2.7	HII E AL-MAHAIDI (2006b) .....	60
2.8	HII E AL-MAHAIDI (2006c, 2007) .....	61
2.9	SILVA FILHO (2007) .....	67
2.10	LOPES (2007) .....	79
.		
<b>CAPÍTULO 3 – CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b> .....		82
3.1	NOTAS INICIAIS.....	82
3.2	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE DE REFERÊNCIA – $\beta_a$ .....	82
3.3	PROBLEMA BÁSICO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	84
3.4	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$ .....	89
3.5	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	95
3.5.1	Variável Aleatória Não Normal.....	95
3.5.2	Variáveis Aleatórias Correlacionadas.....	98
3.6	MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$ .....	102
3.6.1	<i>FORM – First Order Reliability Method</i> .....	102
3.6.2	<i>SORM – Second Order Reliability Method</i> .....	107
3.6.3	TÉCNICA DE MONTE CARLO.....	107
3.7	COMPONENTES E SISTEMAS.....	109
3.8	MEDIDAS DE SENSIBILIDADE.....	115
<b>4 METODOLOGIA – DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES DE FALHA E CARACTERIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ABORDADAS</b> .....		117
4.1	NOTAS INICIAIS.....	117
4.2	ABORDAGEM DAS ANÁLISES.....	118
4.3	VARIÁVEIS DETERMINÍSTICAS.....	120
4.4	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	120
4.4.1	Ações.....	121
4.4.2	Concreto.....	122
4.4.3	Aço.....	123
4.4.4	Compósito de Fibras de Carbono – CFC.....	124
4.4.5	Fatores de Modelagem.....	125

4.5	FUNÇÕES DE FALHA.....	127
<b>CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DOS RESULTADOS.....</b>		<b>131</b>
5.1	NOTAS INICIAIS.....	131
5.2	VIGAS VT E VTL.....	137
5.3	VIGA MACIÇA EM CONCRETO ARMADO.....	153
5.4	VIGA CAIXÃO.....	161
5.5	FATORES DE MODELAGEM .....	164
5.6	CALIBRAÇÃO DE FATORES PARCIAIS DE SEGURANÇA.....	172
<b>6 – CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>		<b>180</b>
6.1	CONCLUSÕES .....	180
6.2	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS.....	183
<b>REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....</b>		<b>185</b>
<b>ANEXO A.....</b>		<b>190</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Detalhes de armaduras de aço e PRF; GHOBARAH <i>et al.</i> (2002).....	36
Tabela 2.2	Propriedades físicas e mecânicas das armaduras de reforço; GHOBARAH <i>et al.</i> (2002).....	37
Tabela 2.3	Valores experimentais e teóricos das deformações específicas dos reforços; GHOBARAH <i>et al.</i> (2002).....	40
Tabela 2.4	Resultados experimentais; GHOBARAH <i>et al.</i> (2002) .....	42
Tabela 2.5	Propriedades mecânicas do aço e do concreto; PANCHACHARAM <i>et al.</i> (2002).....	43
Tabela 2.6	Momentos de fissuração e momentos últimos experimentais; PANCHACHARAM <i>et al.</i> (2002).....	46
Tabela 2.7	Resultados experimentais e analíticos; SALOM <i>et al.</i> (2004).....	49
Tabela 2.8	Propriedades dos compósitos; de AMELI <i>et al.</i> (2005).....	51
Tabela 2.9	Momentos de torção de ruptura (kNm).....	52
Tabela 2.10	Momentos de torção experimentais e teóricos (kNm); AMELI <i>et al.</i> (2005).....	52
Tabela 2.11	Dados de reforço; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	55
Tabela 2.12	Propriedades das armaduras de aço; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	55
Tabela 2.13	Propriedades do CFC; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	56
Tabela 2.14	Resultados experimentais; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	57
Tabela 2.15	Valores médios das rijezas; SILVA FILHO (2007).....	75
Tabela 2.16	Valores médios de deformações específicas das armaduras; SILVA FILHO (2007).....	77
Tabela 2.17	Ângulos de inclinação da biela; SILVA FILHO (2007).....	77

Tabela 2.18	Valores experimentais e comparação entre esse e os valores obtidos com a segunda sistemática; SILVA FILHO (2007).....	78
Tabela 2.19	Parâmetros estatísticos para a razão $\frac{T_u}{T_{teó}}$ das vigas de SILVA FILHO (2007).....	79
Tabela 3.1	Classes de consequências; EUROCODE EN 1990(2002).....	84
Tabela 3.2	Valores de $\beta_r$ ; EUROCODE EN 1990(2002).....	84
Tabela 3.3	Relação $\beta$ e $p_f$ .....	94
Tabela 3.4	Grau de dependência entre variáveis; ALMEIDA (2008).....	98
Tabela 3.5	Fator $F$ para correção dos coeficientes de correlação; HALDAR, e MAHADEVAN (2000).....	100
Tabela 3.6	Valores de $p_f^s$ e $\beta_{e,séries}$ .....	114
Tabela 4.1	Desvio padrão em função da condição de preparo do concreto; NBR 12655 (2006).....	122
Tabela 4.2	Modelos probabilísticos: resistência do concreto e do aço, e do módulo de elasticidade do CFC.....	126
Tabela 4.3	Modelos probabilísticos: carregamento.....	126
Tabela 4.4	Modelos probabilísticos: fatores de modelagem.....	126
Tabela 5.1	Resistências de cálculo das vigas VT e VTL (kNm), reforçadas com CFC.....	137
Tabela 5.2	Modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações, exemplo1.....	138
Tabela 5.3	Resultado de análise de confiabilidade viga série VT.....	139
Tabela 5.4	Resultado de análise de confiabilidade viga série VTL.....	140
Tabela 5.5	Fatores de importância: biela flexo-comprimida, VT.....	142
Tabela 5.6	Fatores de importância: armadura longitudinal, VT.....	143
Tabela 5.7	Fatores de importância: armadura transversal,VT.....	143
Tabela 5.8	Fatores de importância: biela flexo-comprimida,VTL.....	144
Tabela 5.9	Fatores de importância: armadura longitudinal,VTL.....	145
Tabela 5.10	Fatores de importância: armadura transversal.VTL.....	145
Tabela 5.11	Resultado de análise de confiabilidade: $\beta_{sist}^2$ e $\beta_{sist}^5$ .....	149
Tabela 5.12	Solicitação variável.....	150

Tabela 5.13	Modelos probabilísticos do concreto, do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações; JCSS(2001), exemplo2.....	154
Tabela 5.14	Resultado da análise da viga sem reforço.....	154
Tabela 5.15	Resultado de análise da viga com reforço.....	157
Tabela 5.16	Coordenadas do ponto de projeto $y^*$ .....	158
Tabela 5.17	Fatores parciais de segurança.....	159
Tabela 5.18	Modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações, exemplo3.....	161
Tabela 5.19	Índices de confiabilidade.....	162
Tabela 5.20	Índices de confiabilidade dos modos de falha e do sistema em série.....	163
Tabela 5.21	Modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC, das ações e dos fatores de modelagem, exemplo 4.....	165
Tabela 5.22	Índices de confiabilidade.....	166
Tabela 5.23	Fatores de importância das variáveis aleatórias – $\sigma_{\phi R} = 0,30$ .....	168
Tabela 5.24	Fatores de importância das variáveis aleatórias – $\sigma_{\phi R} = 0,35$ .....	168
Tabela 5.25	Fatores de importância das variáveis aleatórias – $\sigma_{\phi R} = 0,40$ .....	169
Tabela 5.26	Fatores de importância das variáveis aleatórias – $\sigma_{\phi R} = 0,45$ .....	169
Tabela 5.27	Coeficientes parciais de segurança.....	173
Tabela 5.28	Modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações permanente e variável, exemplo 5.....	174
Tabela 5.29	Frequências relativas dos carregamentos.....	177

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Configurações de reforço; GHOBARAH <i>et al.</i> (2002).....	36
Figura 2.2	Curvas normalizadas de resistência ao cisalhamento para painéis de concreto armado; RAHAL (2000).....	38
Figura 2.3	Detalhe vigas concreto armado; PANCHACHARAM <i>et al.</i> (2002).....	43
Figura 2.4	Configurações de reforços CFV; PANCHACHARAM <i>et al.</i> (2002).....	43
Figura 2.5	Ruptura viga de referência solicitada à torção; SALOM <i>et al.</i> (2004)...	48
Figura 2.6	Configurações de reforços com CFC e CFV; AMELI <i>et al.</i> (2005).....	50
Figura 2.7	Execução de ensaio à torção; AMELI <i>et al.</i> (2005).....	51
Figura 2.8	Momento de torção <i>versus</i> ângulo de rotação; AMELI <i>et al.</i> (2005) ....	54
Figura 2.9	Características geométricas e armaduras de aço; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	55
Figura 2.10	Configuração inicial de reforço e aplicação de momento; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	56
Figura 2.11	Momento de torção <i>versus</i> ângulo de rotação $\phi$ ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	57
Figura 2.12	Mecanismo de ruptura – (FS050D2 e FH050D1); HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	58
Figura 2.13	Curvas teóricas momento torção <i>versus</i> ângulo de rotação $\phi$ considerando-se variação do fator $\beta$ ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	58
Figura 2.14	Curvas teóricas momento torção <i>versus</i> ângulo de rotação $\phi$ considerando-se valores ideais do fator $\beta$ ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).....	59

Figura 2.15	Contribuição do CFC na resistência à torção segundo Bulletin 14 da FIB (2000) <i>versus</i> valores experimentais; HII e AL-MAHAIDI (2006c, 2007).....	64
Figura 2.16	Dimensões para o cálculo de $A_n$ segundo as prescrições: (a) AS3600 – 2001 e (b) ACI 318 – 05; HII E AL-MAHAIDI (2006C, 2007).....	65
Figura 2.17	Resistência à torção: (a) AS3600 – 2001 e (b) ACI 318 – 05 <i>versus</i> valores experimentais; HII e AL-MAHAIDI (2006c, 2007).....	67
Figura 2.18	Parâmetros da seção transversal; SILVA FILHO (2007).....	69
Figura 2.19	Detalhes das armaduras das vigas ; SILVA FILHO (2007).....	70
Figura 2.20	Detalhes dos reforços da série VT; SILVA FILHO (2007).....	70
Figura 2.21	Detalhes dos reforços da série VTL; SILVA FILHO (2007).....	71
Figura 2.22	Viga VT1 – localização da instrumentação; SILVA FILHO (2007).....	71
Figura 2.23	Curva $Tx\theta$ da viga VT2; SILVA FILHO (2007).....	75
Figura 2.24	Curva $Tx\varepsilon$ armadura de aço da viga VTL2; SILVA FILHO (2007).....	76
Figura 2.25	Curva $Tx\varepsilon$ armadura de CFC da viga VTL2; SILVA FILHO (2007).....	76
Figura 3.1	Funções densidade marginais $f_R(R)$ e $f_S(S)$ , função de densidade conjunta $f_{RS}(R,S)$ e domínio de falha $D$ ; MELCHERS (2002) .....	87
Figura 3.2	Problema básico $R - S$ a partir de $F_R(S)$ e $f_S(S)$ ; MELCHERS (2002) .....	88
Figura 3.3	Distribuição da margem de segurança; MELCHERS (2002) .....	91
Figura 3.4	Curva de probabilidade de falha; AOKI (2005) .....	92
Figura 3.5	Curva $\beta$ <i>versus</i> $p_f$ obtida a partir de $\Phi(y)$ .....	93
Figura 3.6	Problema básico de confiabilidade no espaço reduzido $r, s$ .....	94
Figura 3.7	Princípio da Normal Equivalente; SAGRILLO (2004) .....	97
Figura 3.8	Coeficiente de correlação $\rho_{ij}$ entre variáveis; MELCHERS (2002) .....	98
Figura 3.9	Transformação espaço original para o espaço reduzido; CHOI e Youn (2001) <i>apud</i> LOPES (2007) .....	103
Figura 3.10	Aproximação do método <i>FORM</i> : índice de confiabilidade $\beta$ e superfícies côncava e convexa; <i>apud</i> LOPES (2007) .....	104
Figura 3.11	Busca do ponto de projeto $y^*$ ; LOPES (2007) .....	105
Figura 3.12	Componentes na análise de confiabilidade; SAGRILLO (1994) .....	109

Figura 3.13	Sistemas com mais de um ponto de máxima densidade local de probabilidade; SAGRILO (1994) .....	110
Figura 3.14	Sistemas em série (a) e em paralelo (b) na análise de confiabilidade; SAGRILO (1994) .....	110
Figura 3.15	Coeficiente de correlação $\rho_{ik}$ ; SORENSEN (2004) .....	112
Figura 3.16	Relação coef. de correlação entre $\rho_{ik}$ e $\beta_{e,séries}$ ; SORENSEN (2004).	114
Figura 3.17	– Variação de $\beta_{e,séries}$ versus $\rho_{ik}$ .....	115
Figura 5.1	Organograma exemplo 1.....	132
Figura 5.2	Organograma exemplo 2.....	133
Figura 5.3	Organograma exemplo 3.....	134
Figura 5.4	Organograma exemplo 4.....	135
Figura 5.5	Organograma exemplo 5.....	136
Figura 5.6	Índice de confiabilidade versus razão de carga var. $r_q$ – viga VT.....	141
Figura 5.7	Índice de confiabilidade versus razão de carga var. $r_q$ – viga VTL...141	
Figura 5.8	Fatores de importância $I$ versus razão de carga var. $r_q$ – VT.....	144
Figura 5.9	Fatores de importância $I$ das versus razão de carga var. $r_q$ – VTL..146	
Figura 5.10	Fatores de importância $r_q = 0,10$ – viga VT.....	146
Figura 5.11	Fatores de importância $r_q = 0,50$ – viga VT.....	147
Figura 5.12	Fatores de importância $r_q = 0,90$ – viga VT.....	147
Figura 5.13	Fatores de importância $r_q = 0,10$ – viga VTL.....	147
Figura 5.14	Fatores de importância $r_q = 0,50$ – viga VTL.....	147
Figura 5.15	Fatores de importância $r_q = 0,90$ – viga VTL.....	148
Figura 5.16	Índices de confiabilidade versus coeficiente de variação da ação variável $\delta_q$ – Viga VT.....	151
Figura 5.17	Índices de confiabilidade versus coeficiente de variação da ação variável $\delta_q$ – Viga VTL.....	151
Figura 5.18	Índices de confiabilidade versus razão de carga variável $r_q$ – Vigas VT e VTL.....	152
Figura 5.19	Características geométricas da viga analisada.....	153

Figura 5.20	Probabilidade de falha <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ .....	156
Figura 5.21	Índice de confiabilidade <i>versus</i> taxa geométrica de reforço.....	158
Figura 5.22	Fat. parciais de segurança e de importância das ações permanentes <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ .....	160
Figura 5.23	Fatores parciais de segurança e de importância das ações variáveis <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ .....	160
Figura 5.24	Características geométricas e configuração de reforço em aço e CFC da viga analisada.....	162
Figura 5.25	Índice de confiabilidade <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ .....	166
Figura 5.26	Índice de confiabilidade sistema em série <i>versus</i> variação do desvio padrão $\sigma_{\phi R}$ da variável aleatória $\phi_R$ .....	167
Figura 5.27	Variação dos fatores de importância de $I_q$ e $I_{\phi R}$ <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ para o modo de falha da biela.....	170
Figura 5.28	Variação dos fatores de importância de $I_q$ e $I_{\phi R}$ <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ para o modo de falha da armadura longitudinal.....	170
Figura 5.29	Variação dos fatores de importância de $I_q$ e $I_{\phi R}$ <i>versus</i> razão de carga variável $r_q$ para o modo de falha da armadura transversal.....	171
Figura 5.30	Seção transversal da viga em concreto armado.....	173
Figura 5.31	Superfícies de resposta em termos de índice de confiabilidade.....	176
Figura 5.32	Função densidade de probabilidade da frequência de carregamento	177
Figura 5.33	Superfícies de erros.....	179

## LISTA DE SÍMBOLOS

### a) Letras romanas minúsculas

$a_o$	espessura do fluxo de cisalhamento
$b$	largura/ base da viga
$b_f$	largura do reforço, largura do estribo de CFC
$bh$	seção transversal da viga
$c_1$	constante de Saint.-Venant
cov	covariância entre duas variáveis
$f_c$	resistência média à compressão do concreto
$f_{cd}$	resistência de cálculo à compressão do concreto
$f_{fe}$	tensão efetiva no reforço
$f_{ej}$	resistência à compressão para a idade $j$ dias
$f_{ck}$	resistência característica à compressão do concreto
$f_{yl}$	tensão de escoamento do aço longitudinal
$f_{yld}$	tensão de escoamento do aço da armadura longitudinal
$f_c$	resistência média à compressão do concreto,
$f_c^*$	coordenada do ponto de projeto, valor de projeto da resistência do concreto
$f_R$	função densidade marginal da variável $r$
$f_{RS}$	função densidade conjunta das variáveis $r$ e $s$
$f_S$	função densidade marginal da variável $s$
$f_s$	resistência média de escoamento do aço

$f_s^*$	coordenada do ponto de projeto, valor de projeto da resistência do aço
$f_{sy,f}$	tensão de escoamento do aço do estribo
$f_t$	resistência à tração do concreto
$f_y$	função densidade normal <i>padrão</i> de probabilidade
$f_{yd}$	tensão de escoamento de cálculo do aço
$f_{yk}$	tensão de escoamento característica do aço
$f_{ym}$	resistência média de escoamento do aço
$f_{yt}$	tensão de escoamento do aço transversal
$f_{ytd}$	tensão de escoamento do aço do estribo
$f_{yv}$	tensão de escoamento da armadura transversal
$f_x$	função densidade de probabilidade qualquer
$g$	carga permanente característica ou média
$g^*$	coordenada do ponto de projeto, valor de projeto da ação permanente
$g_k$	valor característico da ação permanente
$h$	altura da viga
$k_i$	curvaturas principais da função de falha no ponto de projeto $y^*$
$k_s$	coeficiente atrelado ao tipo de utilização e da função social de uma estrutura
$l_i(\gamma_g)$	polinômio de Lagrange definido a partir dos coeficientes parciais de segurança das ações permanentes $\gamma_g$
$l_j(\gamma_q)$	polinômio de Lagrange definido a partir dos coeficientes parciais de segurança das ações variáveis $\gamma_q$
$n$	número de variáveis aleatórias envolvidas na análise, número de camadas do CFC
$n_f$	razão entre os módulos de elasticidade do CFC e do concreto
$n_p$	patamar de segurança atrelado ao número médio de pessoas vitimadas em caso de falha de uma estrutura
$n_s$	razão entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto
$p_c$	perímetro da seção transversal de concreto

$p_f$	probabilidade de falha
$p_{f_i}$	probabilidade de falha referente ao modo de falha $i$
$p_f^T$	probabilidade de falha real
$p_{fr}$	probabilidade de falha de referência
$p_o$	perímetro da linha central do fluxo de cisalhamento
$p_{sist}^n$	probabilidade de falha do sistema em série com $n$ variáveis aleatórias
$q$	carga variável característica ou média
$q^*$	coordenada do ponto de projeto, valor de projeto da ação variável
$q_k$	valor característico da ação variável
$r_q$	razão de carga variável
$s$	espaçamento estribos, comprimento ao longo da viga onde o reforço é distribuído, espaçamento dos estribos de CFC
$s_f$	espaçamento reforço transversal, espaçamento das tiras de reforço, espaçamento eixo a eixo dos estribos de CFC
$s_t$	espaçamento dos estribos de aço
$s_{tf}$	espaçamento da armadura transversal de CFC.
$t$	espessura equivalente, espessura da parede efetiva
$t_c$	espessura equivalente da parede onde ocorre o fluxo de tensão
$t_d$	espessura do painel
$t_f$	espessura do reforço, espessura do CRV e CFC
$t_s$	espessura do reforço
$u$	perímetro da seção transversal
$u_k$	perímetro equivalente
$w_f$	largura do CFC
$w_{rq}$	frequência relativas de carregamento
$y^*$	ponto de projeto

**b) Letras romanas maiúsculas**

$A_c$	seção transversal de concreto
$A_f$	área de reforço, área do estribo do CFC
$A_{fl}$	área reforço longitudinal de CFC
$A_{ft}$	área reforço transversal de CFC
$A_k$	área equivalente, área limitada pela linha média da parede efetiva
$A_l$	área total da armadura longitudinal
$A_0$	seção definida pelo fluxo de tensão, área da seção transversal envolvida pelo CFC
$A_{sl}$	área armadura longitudinal de aço
$A_{st}$	área armadura transversal de aço
$A_{sw}$	área de um tramo do estribo de aço
$A_t$	área dos estribos ao longo do comprimento
$C$	confiabilidade da estrutura
$CoV$	coeficiente de variação da variável
$D$	domínio de falha
$E_c$	módulo de elasticidade do concreto
$E_f$	módulo de elasticidade do CFC
$E_{fu}$	módulo de elasticidade do CRV e CFC
$E_s$	módulo de elasticidade do aço
$F$	fator de correção de coeficiente de correlação
$F_d$	ação de cálculo
$F_k$	ação característica
$F_R$	função distribuição cumulativa da variável $r$
$F_S$	função distribuição cumulativa da variável $s$
$F_x$	função de distribuição cumulativa qualquer
$G(X)$	função de estado (falha) definida por meio do vetor $(X)$ no espaço original
$G(Y)$	função de estado (falha) definida por meio do vetor $(Y)$ no espaço reduzido

$G(y)$	função de estado (falha) definida das variáveis aleatórias que constituem o vetor $(Y)$ no espaço reduzido
$G_i$	função de falha referente ao modo de falha $i$
$GJ$	rijeza da viga à torção
$I$	fator de importância
$I_{Ef}$	fator de importância do módulo de elasticidade do CFC
$I_{fcm}$	fator de importância da resistência do concreto
$I_{fs}$	fator de importância da resistência do aço
$I_g$	fator de importância da ação permanente
$I_q$	fator de importância da ação variável
$I_{\phi R}$	fator de importância do fator de modelagem da resistência
$I_{\phi S}$	fator de importância do fator de modelagem da solicitação
$J$	jacobiano de transformação
$L$	matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação de $X$
$N$	ciclos simulações na técnica de Monte Carlo
$N_f$	número de ciclos de simulação com valores negativos para a equação de estado limite no método de simulação de Monte Carlo
$P_i$	probabilidade de falha de um componente
$P_{ik}$	probabilidade de falha de dois componentes
$Q$	carregamento
$R$	resistência
$R_d$	resistência de cálculo
$S$	solicitação
$S_d$	solicitação de cálculo
$Sup\beta_{rq}(\gamma_g, \gamma_q)$	superfície de confiabilidade obtida a partir dos coeficientes parciais de segurança $\gamma_g$ e $\gamma_q$ , referente a uma dada razão $r_q$
$T_{cr}$	momento de torção de fissuração
$T_{f,exp}$	contribuição experimental do CFC

$T_{exp}$	momento de torção último experimental
$T_f$	contribuição de resistência à torção, parcela de torção devida ao CFC
$T_g$	solicitação permanente característica;
$T_{n,frp}$	contribuição teórica do compósito de fibra de carbono
$T_n$	momento de torção último teórico
$T_{n,PRF}$	parcela de resistência à torção da viga inerente ao PRF
$T_{n,s}$	parcela de resistência à torção da viga inerente ao aço
$T_q$	solicitação variável característica;
$T_r$	tempo de vida útil da estrutura
$T_R$	momento de torção resistente
$T_{rd}$	momento resistente de torção de cálculo
$T_{rd-Biela}$	momento resistente de torção de cálculo – biela
$T_{rd-Long}$	momento resistente de torção de cálculo – reforço longitudinal
$T_{rd-Trans}$	momento resistente de torção de cálculo – reforço transversal
$T_{rd-sl}$	momento resistente de torção de cálculo – reforço longitudinal aço
$T_{rd-st}$	momento resistente de torção de cálculo – reforço transversal aço
$T_{rd-fl}$	momento resistente de torção de cálculo – reforço longitudinal CFC
$T_{rd-ft}$	momento resistente de torção de cálculo – reforço transversal CFC
$T_{Rd,RC}$	momento de torção resistido pela armadura de aço
$T_{Rd,CFC}$	momento de torção resistido pelo reforço de CFC
$T_{Rdt,CFC}$	momento de torção resistido pelo reforço transversal de CFC
$T_{Rdl,CFC}$	momento de torção resistido pelo reforço longitudinal de CFC
$T_{Rd1}$	momento de torção resistido pela biela
$T_{Rd2}$	momento de torção resistido pelo reforço de aço e CFC
$T_S$	momento de torção solicitante
$T_{sk}$	momento de torção característico
$T_{sd}$	momento solicitante de torção de cálculo

$T_{Sd}$	momento de torção de projeto
$T_{téor}$	momentos de torção teórico
$T_u$	momento de torção de ruptura, experimentais
$T_{uc}$	momento de torção de fissuração
$T_{u,exp}$	momento de torção último experimental da viga reforçada
$T_{u,f}$	parcela de torção devida ao reforço
$T_{u,frp}$	parcela do reforço instalado, resistência do reforço à torção
$T_{u,max}$	momento de torção último
$T_{u,RC}$	resistência última a torção
$T_{u,tes}$	momento de torção último experimental da viga de referência
$T_y$	momento de torção de escoamento
$U$	vetor de variáveis normais correlacionadas ou não
$V$	vetor de variáveis normais padrões independentes
$Y$	vetor de variáveis normais padrões independentes
$Y_k$	variáveis aleatórias de solicitação característica
$Y_d$	variáveis aleatórias de solicitação de cálculo
$X$	vetor de variáveis normais correlacionadas ou não
$X_d$	variáveis aleatórias de resistência de cálculo
$X_k$	variáveis aleatórias de resistência característica
$Z$	variável normal que representa a margem de segurança

### c) Letras gregas minúsculas

$\alpha$	ângulo da fissura em relação ao eixo da viga ( $45^0$ ), ângulo da biela flexo-comprimida em relação ao eixo da viga, ângulo formado entre as fibras do compósito e o eixo axial da viga; deslocamento relativo entre as faces da fissura, ângulo dos estribos de CFC em relação ao eixo longitudinal da viga, vetor unitário normal ao plano tangente a uma função de falha
$\alpha_{Ap}$	ângulo de inclinação da biela fórmula de APRILE e BENEDETTI (2004)
$\alpha_f$	ângulo de inclinação da biela a partir média dos ângulos das fissura

- $\alpha_\varepsilon$  ângulo de inclinação da biela a partir da deformação média do EER
- $\alpha_\sigma$  ângulo de inclinação da biela a partir treliça espacial e deformações específicas medidas nos ensaios
- $\beta$  índice de confiabilidade, ângulo das fibras em relação ao eixo longitudinal da viga, fator de retenção para obter parcela do módulo elástico de cisalhamento
- $\beta_a$  índices de confiabilidade de referência ou alvo
- $\beta_i$  índice de confiabilidade referente ao modo de falha  $i$
- $\beta_i^{Log}$  índice de confiabilidade referente ao modo de falha  $i$ , utilizando a função densidade de probabilidade Lognormal para o concreto e aço
- $\beta_i^{Nor}$  índice de confiabilidade referente ao modo de falha  $i$ , utilizando a função densidade de probabilidade Normal para o concreto e aço
- $\beta_{sist}^n$  índice de confiabilidade do sistema em série com  $n$  variáveis aleatórias
- $\beta_{sis}^{n Log}$  índice de confiabilidade do sistema em série com  $n$  variáveis aleatórias, utilizando-se a função densidade de probabilidade Lognormal para o concreto e aço
- $\beta_{sis}^{n Nor}$  índice de confiabilidade do sistema em série com  $n$  variáveis aleatórias, utilizando-se a função densidade de probabilidade Normal para o concreto e aço
- $\beta_{MC}$  índice de confiabilidade obtido com a simulação de Monte Carlo
- $\beta_{rq}(\gamma_{gi}, \gamma_{qi})$  índice de confiabilidade do sistema obtido em função dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ , referente a uma dada razão  $r_q$
- $\gamma$  coeficiente parcial de segurança das variáveis aleatórias em geral
- $\gamma_c$  coeficiente parcial de segurança da resistência do concreto
- $\gamma_f$  coeficiente parcial de segurança CFC
- $\gamma_g$  coeficiente parcial de segurança da ação permanente
- $\gamma_q$  coeficiente parcial de segurança da ação variável
- $\gamma_s$  coeficiente parcial de segurança da resistência do aço
- $\gamma_y$  coeficiente parcial de segurança da solicitação
- $\gamma_x$  coeficiente parcial de segurança da resistência

$\delta$	coeficiente de variação das variáveis aleatórias
$\delta_{Ef}$	coeficiente de variação do módulo de elasticidade do CFC
$\delta_g$	coeficiente de variação da carga permanente
$\delta_q$	coeficiente de variação da carga variável
$\delta_s$	coeficiente de variação da resistência do aço
$\varepsilon\%$	margem de erro na técnica de MonteCarlo
$\varepsilon_f$	deformação específica do reforço
$\varepsilon_{fd,e}$	deformação específica efetiva de cálculo do CFC
$\varepsilon_{fe}$	deformação específica do CFC
$\varepsilon_{fk,e}$	deformação específica efetiva característica do CFC
$\varepsilon_{f,u}$	deformação específica última do CFC
$\varepsilon_{fu}$	deformação específica última do CFC
$\varepsilon_{kef}$	deformação específica efetiva característica do compósito
$\varepsilon_{máx}$	deformação específica máxima do CFC
$\varepsilon_{SU}$	deformação específica última da armadura de aço
$\theta$	ângulo das fissuras em relação ao eixo longitudinal da viga, ângulo entre dois planos tangentes a dois componentes, ângulo entre vetores unitários
$\theta_{cr}$	ângulo de torção por unidade de comprimento inerente ao $T_{cr}$
$\theta_u$	ângulo de torção por unidade de comprimento inerente ao $T_u$
$\theta_y$	ângulo de torção por unidade de comprimento inerente ao $T_y$
$\mu$	valor esperado – média
$\mu_R$	média da variável $r$
$\mu_S$	média da variável $s$
$\mu T_g$	média da solicitação permanente;
$\mu T_q$	média da solicitação variável.
$\mu_z$	média da variável $z$
$\mu_X^N$	média da normal equivalente no ponto $x^*$
$\nu$	fator de efetividade do concreto
$\rho$	matriz dos coeficientes de correlação entre variáveis

$\rho_f$	taxa de reforço de CFC.
$\rho_{fl}$	taxa geométrica de armadura longitudinal de CFC;
$\rho_{ft}$	taxa geométrica de armadura transversal de CFC;
$\rho_{ij}$	coeficiente de correlação entre duas variáveis, correlação entre dois componentes
$\rho_l$	taxa geométrica de armadura longitudinal
$\rho_{sl}$	taxa geométrica de armadura longitudinal de aço;
$\rho_{st}$	taxa geométrica de armadura transversal de aço;
$\rho_t$	taxa geométrica de armadura transversal
$\sigma$	tensão normal, matriz diagonal contendo o desvios padrões das variáveis X, desvio padrão
$\sigma_{adm}$	tensão normal admissível
$\sigma_{fcm}$	desvio padrão resistência do concreto
$\sigma_{lim}$	tensão normal limite
$\sigma_s$	desvio padrão da resistência de escoamento do aço
$\sigma_z$	desvio padrão da variável $z$
$\sigma_X^N$	desvio padrão da normal equivalente no ponto $x^*$
$\sigma_R^2$	variância da variável $r$
$\sigma_S^2$	variância da variável $s$
$\sigma_{\phi R}$	desvio padrão do fator de modelagem da resistência
$\tau$	tensão de cisalhamento
$\phi$	fator de resistência à torção, ângulo de rotação total
$\phi(.)$	função densidade de probabilidade normal padrão
$\phi_R$	fator de modelagem de resistência
$\phi_S$	fator de modelagem dos efeitos de carga
$\phi_{cr}$	ângulo de rotação referente ao momento de fissuração
$\phi_u$	ângulo de rotação referente ao momento último
$\omega_l$	taxa mecânica de armadura longitudinal

$\omega_t$  taxa mecânica de armadura transversal  
 $\varphi$  função densidade de probabilidade bidimensional normal padrão

**d) Letras gregas maiúsculas**

$\Delta_n$  abertura da fissura  
 $\Phi(\cdot)$  função distribuição cumulativa normal padrão  
 $\Phi^{-1}$  função inversa distribuição cumulativa normal padrão

**e) Siglas**

*AFOSM* *Advanced First Order Second Moment*  
*CDF* *Cumulative Density Function*  
*CFC* compósito reforçado com fibras de carbono  
*CFV* compósito reforçado com fibras de vidro  
*CRF* compósito reforçado com fibras  
*CIRIA* *Construction Industry Research and Information Association*  
*EEER* extensor elétricos de resistência  
*E.L.S.* estado limite de serviço  
*E.L.U.* estado limite último  
*FDC* função distribuição cumulativa  
*FDP* função densidade de probabilidade  
*FORM* *First Order Reliability Method*  
*FOSM* *First Order Second Moment*  
*FS* fator de segurança  
*JCSS* *Joint Committee on Structural Safety*  
*MVFOSM* *Mean Value First Order Second Moment*  
*PDF* *Probability Density Function*  
*PRF* *fiber reinforced polymer*  
*pf* probabilidade de falha  
*SORM* *Second Order Reliability Method*  
*VT* armadura transversal de CFC  
*VTL* armadura transversal e longitudinal de CFC

## RESUMO

Esse trabalho apresenta a análise de confiabilidade aplicada em vigas de concreto armado solicitadas à torção pura e externamente reforçadas com compósito de fibras de carbono.

Inicialmente são mostrados o estado da arte dos estudos em vigas de concreto armado solicitadas à torção e reforçadas com compósito de fibras de carbono ou fibras de vidro, e a teoria de análise de confiabilidade necessária ao desenvolvimento deste trabalho.

A abordagem é feita a partir de cinco exemplos de análise de confiabilidade de vigas, nas quais se utiliza a metodologia de reforço elaborada por SILVA FILHO (2007).

O enfoque semi-probabilístico é definido de acordo com a NBR 6118 (2007) e as ações consideradas normais. O enfoque baseado na análise de confiabilidade é conduzido a partir dos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias consideradas, definidos a partir de referências bibliográficas referentes ao assunto.

É implementada uma rotina no programa de análise numérica – *Mathcad*, utilizando o método *FORM – First Order Reliability Method*.

A partir dessa rotina é possível, para vigas reforçadas ou não com compósito de fibras de carbono, avaliar os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias envolvidas nas análises, os índices de confiabilidade para os modos de falha  $\beta_i$ , do sistema em série  $\beta_{sist}^n$ , as suas respectivas probabilidades de falha  $p_{fi}$  e  $p_{fsist}^n$ , os coeficientes parciais de segurança referentes ao ponto de projeto, e obter as taxas geométricas de reforço  $\rho_{fi}$  e  $\rho_{fj}$ , com base em análise de confiabilidade, para obter um índice de confiabilidade de referência, que neste trabalho é definido segundo a EN 1990 (2001). É também conduzida calibração dos coeficientes parciais de segurança das solicitações permanente e variável.

Os resultados obtidos nas análises permitem concluir aspectos intrínsecos ao reforço, assim como, a importância dos parâmetros estatísticos envolvidos na fase de projeto, execução e uso de uma estrutura que regulam a confiabilidade ou probabilidade de falha da mesma.

## **ABSTRACT**

This work presents the reliability analysis applied to reinforced concrete beams loaded with pure torsion and externally strengthened with a carbon fiber reinforced polymer.

First it introduces state of art of studies on external strengthening with carbon and glass fiber reinforced polymers applied to reinforced concrete beams loaded with torsion, and the theory needed to develop the analysis in this work.

The approach includes five examples of reliability analysis of beams, in which the strengthening methodology developed by SILVA FILHO (2007) is used.

The semi-probabilistic approach is defined according to NBR 6118 (2007) and all loads are considered normal. The approach based on reliability analysis follows the probabilistic models of random variables defined with the references on the topic.

A routine is implemented in a numerical analysis program – Mathcad, using FORM – First Order Reliability Method.

This routine evaluates, for strengthened beams or otherwise, the relative importance factor of the random variables included in the analysis, the failure mode reliability index value, the serial system reliability index value, their corresponding failure probabilities, the partial safety factors related to the design point, and the reinforcement geometric rates based on a reliability analysis to obtain a baseline reliability index, which, in this work, was defined according to EN 1990 (2001).

The partial factors for permanent and variable loads are also calibrated.

The analysis results allow to determine the intrinsic aspects of strengthening and the importance of the statistical parameters involved in the design, execution, and use of a structure that control its reliability index value or its failure probability.

# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1 CONCEITOS BÁSICOS**

Os projetos de engenharia estrutural têm como produto final elementos estruturais que devem garantir o bom funcionamento, segurança e durabilidade sob diversos tipos de carregamentos.

Na elaboração de um projeto estrutural encontram-se envolvidas variáveis, cujas incertezas mantêm-se presentes durante toda a vida útil da edificação.

A intensidade e distribuição das ações permanentes e variáveis, dos parâmetros geométricos, das propriedades mecânicas, dos modelos de cálculo e de análise estrutural constituem o conjunto de incertezas a considerar.

O primeiro método de abordagem de segurança estrutural com bases científicas foi o método das tensões admissíveis, que limitava-se a garantir que as seções críticas dos elementos estruturais não fossem solicitadas por uma tensão superior à tensão admissível do material que as constituíam, as tensões e deformações eram avaliadas segundo a Teoria da Elasticidade Linear, e nos casos mais simples eram calculadas segundo os métodos clássicos da Resistência dos Materiais.

No método das tensões admissíveis as incertezas são consideradas com um único fator de segurança aplicado à tensão limite.

O critério de projeto, a partir das tensões admissíveis, pode ser definido como:

$$\sigma \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{lim}}{FS} \quad (1.1.1)$$

onde

$\sigma$  – tensão devida às solicitações;

$\sigma_{adm}$  – tensão admissível;

$\sigma_{lim}$  – tensão limite para o material obtido em ensaio (valor médio);

$FS$  – fator de segurança.

Durante cerca de um século os conhecimentos adquiridos sobre mecânica estrutural, distribuição de carregamentos e materiais foram considerados simplesmente a partir da redução e diversificação dos fatores de segurança.

As limitações envolvidas no método das tensões admissíveis e a necessidade de um controle racional do risco conduziram ao desenvolvimento da segurança sob um enfoque probabilístico, daí a concepção dos estados limites.

Os estados limites são caracterizados como estados limites último E.L.U. e estados limites de utilização ou serviço E.L.S., e podem ser considerados como condições a partir das quais o elemento estrutural, ou a estrutura como um todo, torna-se inadequada a desempenhar a sua função.

Esses métodos são utilizados como filosofia de dimensionamento adotado em normas atuais, nacionais e internacionais, podendo o seu critério de projeto para o E.L.U. ser definido por:

$$R_d(X_d) \geq \sum S_d(Y_d) \quad (1.1.2)$$

sendo

$$X_d = \gamma_x X_k \quad (1.1.3)$$

$$Y_d = \gamma_y Y_k \quad (1.1.4)$$

onde

$R_d$  – resistência de cálculo;

$S_d$  – solicitação de cálculo;

$X_d$  – variáveis aleatórias de resistência de cálculo;

$Y_d$  – variáveis aleatórias de solicitação de cálculo;

- $X_k$  – variáveis aleatórias de resistência característica;
- $Y_k$  – variáveis aleatórias de solicitação característica;
- $\gamma_x$  – coeficiente parcial de segurança da resistência;
- $\gamma_y$  – coeficiente parcial de segurança da solicitação.

O método dos estados limites para estruturas de concreto armado, também conhecido como método semi-probabilístico, utiliza, para o estado limite último E.L.U., os coeficientes parciais  $\gamma_f$ ,  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  aplicados, respectivamente, aos valores característicos das ações  $F_k$ , resistência característica à compressão do concreto  $f_{ck}$  e tensão de escoamento característica do aço  $f_{yk}$ , obtendo-se assim os seus respectivos valores de cálculo  $F_d$ ,  $f_{cd}$  e  $f_{yd}$ .

As aproximações de projeto, a simultaneidade e variabilidade das ações são contempladas a partir dos coeficientes parciais  $\gamma_f$ , sendo, portanto em sua definição considerado o tipo de ação: permanente, variável e deformação imposta, assim como, o tipo de carregamento e o fato da mesma ser de efeito favorável ou desfavorável.

Os coeficientes parciais são ajustados (calibração de norma) de forma a se obter uma uniformidade no índice de confiabilidade  $\beta$  considerado adequado ao tipo de projeto. Esses fatores contemplam a incerteza das variáveis envolvidas no dimensionamento, e possibilitam considerar de maneira simplificada o comportamento real dos materiais, fornecendo assim um tratamento mais adequado da resposta estrutural e das ações.

Os valores característicos são obtidos a partir de suas medidas estatísticas: valores esperados  $\mu$ , coeficientes de variação  $\delta$  ou desvio-padrão  $\sigma$ , e função de distribuição probabilística FDP.

A teoria da confiabilidade das estruturas apresenta técnicas para cálculo da segurança estrutural a partir de métodos probabilísticos baseados na caracterização realista da resistência estrutural  $R$  e das solicitações  $S$ . Nessas técnicas as variáveis envolvidas são classificadas em dois tipos, variáveis aleatórias e determinísticas.

As variáveis aleatórias (randômicas) são aquelas cujos valores apresentam incertezas associadas à estrutura e as determinísticas são aquelas cujos valores são considerados previsíveis, não obstante às variações limites admitidas pela NBR 6118 (2007).

As variáveis aleatórias são caracterizadas a partir de valor esperado (média), medida de dispersão (desvio padrão ou coeficiente de variação), uma medida de correlação entre as variáveis aleatórias e uma função densidade de probabilidade FDP.

A teoria da confiabilidade avalia a probabilidade de ser violado o estado limite. A probabilidade de ocorrer essa violação denomina-se probabilidade de falha  $p_f$ . Alternativamente é possível quantificar a segurança estrutural a partir da definição de um índice de confiabilidade  $\beta$ , que é associado à probabilidade de falha  $p_f$ .

As expressões a seguir ilustram a violação de um estado limite, a partir de uma resistência  $R$  inferior a uma solicitação  $S$ :

$$G(R, S) = R - S < 0 \quad (1.1.5)$$

$$G(R, S) = \frac{R}{S} < 1 \quad (1.1.6)$$

## 1.2 JUSTIFICATIVAS

A consideração da aleatoriedade da intensidade e distribuição das ações, das propriedades mecânicas e de outras incertezas envolvidas no dimensionamento das estruturas por meio dos coeficientes parciais de segurança, no método dos estados limites, confere às mesmas uma margem de segurança, que é retratada a partir de um índice de confiabilidade ou probabilidade de falha. Os valores desses coeficientes parciais de segurança são calibrados de forma a se obter um índice de confiabilidade  $\beta_a$  intrínseco ao tipo da estrutura.

O dimensionamento baseado em confiabilidade considera individualmente as variáveis aleatórias de uma estrutura a partir da definição dos seus modelos

probabilísticos, tendo como objetivo principal um índice de confiabilidade compatível com a consequência de falha da mesma.

Entre outras aplicações pode-se citar: o dimensionamento de estruturas e reforço baseado em confiabilidade, a calibração dos coeficientes parciais de segurança, planos de inspeções, compatibilizar consumo e segurança de uma estrutura a partir do controle dos materiais que a constituem e da sua utilização, e quantificar a segurança de uma seção ou elemento estrutural e a segurança global da estrutura.

### **1.3 OBJETIVOS**

A degradação das edificações por causas ambientais, falhas executivas e de projeto, ou até mesmo a necessidade de incremento de carga devido a mudança de uso, ressaltam a importância dos reforços estruturais.

O compósito reforçado com fibras de carbono CFC apresenta características, tais como: alta resistência, baixo peso próprio, grande rigidez, grande durabilidade, não necessidade de escoramento e facilidade de moldar-se a formas complexas. Essas características destacam as vantagens significativas sobre a técnica de colagem de chapas metálicas com resina epóxi, e com durabilidade comprovadamente comprometida em consequência da corrosão.

Apesar da grande quantidade de estudos já elaborados, que comprovam o emprego altamente promissor do CFC, a construção civil ainda carece de estudos experimentais, que comprovem a sua aplicação.

A partir de levantamento bibliográfico constatou-se que o estado da arte das pesquisas que envolvem reforço externo com polímeros reforçados com fibra PRF encontra-se evoluído, sendo, no entanto, os estudos voltados à torção ainda muito incipientes em relação à flexão e ao cisalhamento.

Nesse trabalho são realizadas análises de confiabilidade de vigas de concreto solicitadas à torção pura reforçadas com CFC, segundo a metodologia de SILVA FILHO (2007), com os objetivos de: quantificar a segurança das mesmas, definir a importância relativa das variáveis inseridas no dimensionamento do reforço, avaliar a importância dos modelos probabilísticos

adotados para as variáveis aleatórias e definir valores de coeficientes parciais de segurança para solicitações permanentes  $\gamma_g$  e variáveis  $\gamma_q$  que minimizem o erro entre o índice de confiabilidade do sistema considerado em série  $\beta_{sist}^n$  e um índice de referência  $\beta_a$ .

O trabalho constitui um avanço nas pesquisas das vigas solicitadas à torção, externamente reforçadas com CFC, visto esse destacar aspectos relevantes na confiabilidade das mesmas e ressaltar a necessidade de obter coeficientes parciais de segurança que considerem as características intrínsecas das variáveis aleatórias envolvidas no dimensionamento semi-probabilístico.

#### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 2 apresenta o estado da arte referente ao estudo do reforço externo à torção com CFC. São compiladas as metodologias dos ensaios em vigas solicitadas à torção e reforçadas com compósitos de fibras de carbono (CFC) e os resultados teóricos e experimentais de diversos autores, que mostraram-se conclusivos para realçar a eficiência do reforço.

No Capítulo 3 é definida a análise de confiabilidade e os aspectos intrínsecos aos métodos (*FORM*, *SORM* e Monte Carlo) utilizados para mensurá-la. São abordadas as características relevantes à definição do índice de confiabilidade, as variáveis aleatórias, correlacionadas ou não, envolvidas na análise e o conceito de medida de sensibilidade.

No Capítulo 4 define-se a forma de abordagem das análises conduzidas por meio de cinco exemplos práticos descritos no Capítulo 5. Apresenta as funções de falha para os modos de falha, as variáveis determinísticas, e os modelos probabilísticos das variáveis aleatórias envolvidas nas análises.

No Capítulo 5 são elaborados e analisados cinco exemplos práticos de análise de confiabilidade em seções de concreto armado solicitada à torção pura e reforçadas com CFC. Os estudos conduzidos nos exemplo abordam: índice de confiabilidade, probabilidade de falha, importância relativa das variáveis aleatórias, importância dos modelos probabilísticos adotados para as variáveis

aleatórias, fatores de modelagem, coeficientes parciais de segurança para as variáveis aleatórias, e calibração de coeficientes parciais de segurança de cargas variável e permanente.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas e propostas sugeridas para trabalhos futuros.

## **2 REFORÇO DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO COM CFC E CFV**

### **2.1 NOTAS INICIAIS**

Durante vários anos o reforço externo com CFC vem sendo objeto de estudos, os quais são direcionados às peças solicitadas à flexão, força cortante e compressão, sendo o reforço à torção pouco estudado, ficando por essa razão um campo ainda por ser pesquisado.

As pesquisas recentes mostram a eficiência do reforço nas vigas solicitadas à torção. Essas pesquisas buscam avaliar a eficiência intrínseca das várias configurações de reforço com CFC e compósitos de fibras de vidro (CFV), de forma a possibilitar um uso racional e seguro do mesmo.

Neste capítulo serão abordados sucintamente os estudos recentes, relacionados diretamente ao tema torção referente aos vários autores.

Esse capítulo ilustra também a metodologia aplicada a uma análise de confiabilidade de vigas solicitada à força cortante reforçadas com CFC.

### **2.2 GHOBARAH *et al.* (2002)**

GHOBARAH *et al.* (2002) elaboraram pesquisa com o objetivo de avaliar o aumento de resistência à torção a partir de diferentes configurações de reforço com CFC e CFV em vigas de concreto armado.

Esses autores utilizaram 11 vigas, sendo três sem reforço (vigas de referência) e seis reforçadas com CFC e duas com CFV.

Foram monitoradas as variações de carregamento, ângulo de torção e deformações específicas dos reforços. Todas as vigas tinham vão igual a 2,44 m, seção transversal 15 cm por 35 cm, com o cobrimento lateral de 25 mm e o superior e inferior de 35 mm. A Tabela 2.1 fornece os dados das armaduras de aço e do reforço. As vigas N são de referência e as C e G são, respectivamente, as reforçadas com CFC e CFV. Para todas as vigas a armadura longitudinal superior era igual a  $2\phi 10$  mm e a bitola da armadura transversal era 6,3 mm.

Tabela 2.1 – Det. de armaduras de aço e PRF; GHOBARAH *et al.* (2002).

Viga	Armadura PRF	$A_{sl}$ inf (mm)	$A_{sl}$ Tensão esc. (MPa)	$A_{sw}$ esp. (mm)	$A_{sw}$ Tensão esc. (MPa)
N1	–	15	409	120	456,8
N2	–	15	409	70	456,8
N3	–	20	461	200	567
C1	Envolvimento completo	15	409	70	456,8
C2	5 estribos vert. de 10 cm espaçado de 10 cm	15	409	70	456,8
C3	3 estribos 45° de 10 cm – colados 1 lado	15	409	70	456,8
C4	3 estribos vert. de 20 cm espaçado de 10 cm	15	409	70	456,8
C5	4 estribos vert. de 10 cm espaçado de 15 cm	15	409	70	456,8
C6	3 estribos 45° em espiral de 10 cm	15	413	120	567
G1	Envolvimento completo	15	409	70	456,8
G2	5 estribos vert. de 10 cm espaçado de 10 cm	15	409	70	456,8

A Figura 2.1 ilustra as diversas configurações de reforço adotadas.

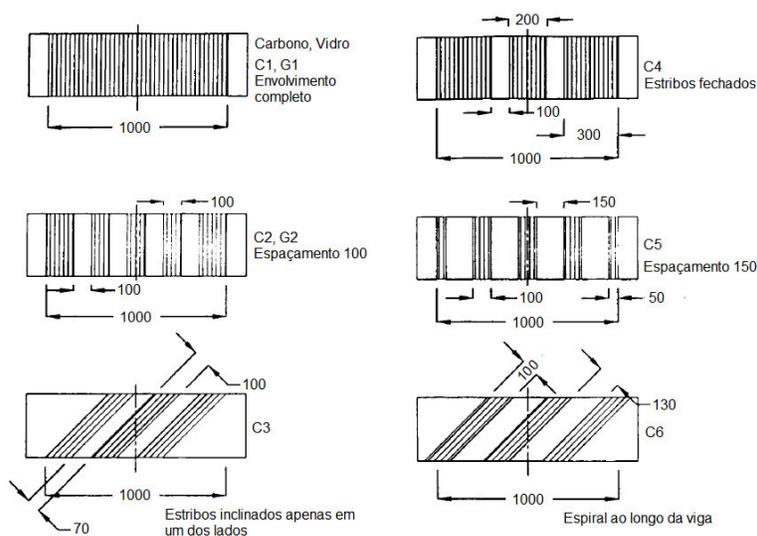


Figura 2.1 – Configurações de reforço; GHOBARAH *et al.* (2002).

A Tabela 2.2 fornece as especificações adotadas para os reforços, assim como suas propriedades físicas e mecânicas.

Tabela 2.2 – Propriedades físicas e mecânicas das armaduras de reforço; GHOBARAH *et al.* (2002).

Propriedades físicas e mecânicas dos reforços	MBrace CF130 Fibras de Carbono	MBrace EG900 Fibras de Vidro
Espessura (mm)	0,165	0,353
Resistência à tração (MPa)	3550	1700
Módulo de elasticidade (GPa)	235	71
Deformação específica última (%)	1,5	2,0

RAHAL (2000) *apud* GHOBARAH *et al.* (2002) estabelece uma metodologia para o cálculo do momento resistente à torção em vigas de concreto armado.

Essa metodologia estuda a relação entre o momento resistente à torção  $T_u$  e a tensão máxima de cisalhamento no concreto  $v_u$ , sendo:

$$T_u = 0,67(A_c^2 / P_c)v_u \quad (2.2.1)$$

onde

$A_c$  – área bruta da seção transversal de concreto;

$P_c$  – perímetro externo da seção de concreto.

A resistência ao cisalhamento do concreto  $v_u$  é considerada como uma fração da sua resistência à compressão  $f_c'$ . A Figura 2.2 ilustra o ábaco para cálculo da razão entre a resistência ao cisalhamento do concreto e a resistência a compressão do concreto  $v_u / f_c'$ .

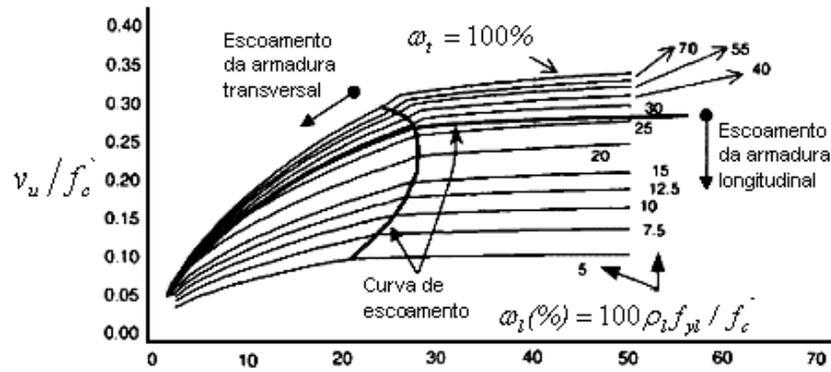


Figura 2.2 – Curvas normalizadas de resistência ao cisalhamento para painéis de concreto armado; RAHAL (2000) *apud* GHOBARAH *et al.* (2002).

Os parâmetros de entrada no ábaco são obtidos a partir das expressões:

$$\omega_l = \frac{\rho_l f_{yt}}{f_c'} \quad (2.2.2)$$

$$\omega_t = \frac{\rho_t f_{yt}}{f_c'} \quad (2.2.3)$$

$$\rho_l = \frac{A_l}{p_o a_o} \quad (2.2.4)$$

$$\rho_t = \frac{A_t}{s a_o} \quad (2.2.5)$$

onde

- $\omega_l$  – taxa mecânica de armadura longitudinal;
- $\omega_t$  – taxa mecânica de armadura transversal;
- $\rho_l$  – taxa geométrica de armadura longitudinal;
- $\rho_t$  – taxa geométrica de armadura transversal;
- $s$  – espaçamento dos estribos;
- $A_l$  – área total da armadura longitudinal;
- $A_t$  – área dos estribos ao longo do comprimento  $s$ ;
- $p_o$  – perímetro da linha central do fluxo de cisalhamento;
- $a_o$  – espessura do fluxo de cisalhamento;
- $f_{yt}$  – tensão de escoamento do aço longitudinal;

$f_{yt}$  – tensão de escoamento do aço transversal.

A contribuição de resistência à torção  $T_f$  devida ao reforço foi calculada a partir da diferença entre os valores experimentais de momento de torção último das vigas reforçadas e o momento de torção último das vigas de referência, de acordo com a expressão:

$$T_f = T_{u,exp} - T_{u,tes} \quad (2.2.6)$$

onde

$T_f$  – contribuição de resistência à torção pelo CFC;

$T_{u,exp}$  – momento de torção último experimental da viga reforçada;

$T_{u,tes}$  – momento de torção último experimental da viga de referência.

A partir do valor da contribuição de resistência à torção  $T_f$  pode-se obter o valor da deformação específica do reforço por meio da expressão:

$$\varepsilon_f = \frac{T_f (A_f / s)^{-1}}{2A_c E_f} \quad (2.2.7)$$

onde

$\varepsilon_f$  – deformação específica do reforço;

$A_f$  – área de reforço;

$s$  – comprimento ao longo da viga onde o reforço é distribuído;

$E_f$  – módulo de elasticidade do material do reforço.

Para o caso de reforço com estribos a 45° em relação ao eixo da viga a deformação específica  $\varepsilon$  na direção das fibras do material compósito é obtida a partir da expressão:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{\cos 45^\circ} \quad (2.2.8)$$

A Tabela 2.3 mostra os valores das deformações específicas do material compósito obtidas experimentalmente e teoricamente, onde pode-se observar o valor limite de deformação específica dos compósitos igual a 0,325%, excetuando-se a C6 onde essas deformações específicas atingiram o valor de 0,634%.

Tabela 2.3 – Valores experimentais e teóricos das deformações específicas dos reforços; GHOBARAH *et al.* (2002).

Viga	$\varepsilon_f$ ( $\times 10^{-3}$ )	
	Exp.	Teórico
N1	–	–
N2	–	–
N3	–	–
C1	3,25	3,11
C2	3,17	2,63
C3	3,14	3,07
C4	2,61	2,64
C5	2,90	2,69
C6	6,34	6,13
G1	3,20	3,14
G2	2,79	2,96

A partir da inserção do valor médio de deformação específica experimental dos compósitos dos CFC e CFV igual a 0,003 na expressão 2.2.7 tem-se a expressão 2.2.9 para o cálculo da parcela de momento de torção devido ao reforço:

$$T_f = 0,006 A_f A_c E_f / s \quad (2.2.9)$$

Ressalta-se que a expressão 2.2.9 aplica-se às vigas reforçadas com estribos verticais de CFC e CFV envolvendo a seção transversal da mesma, pois a deformação específica média foi obtida a partir dessa configuração.

Conhecendo-se as parcelas de momento resistentes dadas pelas expressões 2.2.1 e 2.2.9, a capacidade à torção  $T$  da viga reforçada com CFC ou CFV pode ser obtida pela expressão:

$$T = T_u + T_f \quad (2.2.10)$$

Os resultados experimentais mostraram que o reforço executado com o envolvimento completo da viga pelo material compósito (C1 e G1) é mais eficiente em relação às outras configurações de reforço adotadas, há um incremento significativo de resistência à torção. As vigas reforçadas com essa configuração comportam-se de forma diferente, pois nessas as fissuras são impedidas de aumentar por causa de restrições impostas pelo reforço.

Observou-se que nas vigas reforçadas com estribos de material compósito a ruptura ocorre no trecho não reforçado entre eles, havendo, no entanto, um retardamento da mesma. A largura maior de estribo (C4) proporciona força última superior em relação às similares configurações devido uma maior área reforçada.

O reforço com estribos de material compósito inclinados a  $45^\circ$  em relação ao eixo da viga (C6) é muito mais eficiente que o reforço vertical, não ultrapassando, no entanto, a eficiência do reforço que envolve completamente a viga. Essa maior eficiência é devida ao fato da inclinação das fibras do reforço ( $45^\circ$ ) estar na mesma direção das forças que o solicitam.

O reforço com estribos de material compósito inclinados a  $45^\circ$  em relação ao eixo da viga em apenas um lado da mesma (C3) mostrou-se ineficiente. Esse resultado mostra a importância da continuidade do reforço, a partir do envolvimento da seção transversal da viga.

Uma comparação entre o comportamento das vigas reforçadas verticalmente com CFC e CFV (C2 e G2), mostrou que a diferença de rigidez entre as fibras de carbono e de vidro podem justificar pequenas variações nos ângulos de rotação na fase elástica.

A deformação específica média no CFC e no CFV ficou em torno de 0,3%, o que resultou na expressão 2.2.9 para o cálculo da contribuição dos estribos verticais de material compósito na resistência ao momento de torção.

A Tabela 2.4 fornece os resultados experimentais obtidos nos ensaios das vigas reforçadas com as configurações apresentadas.

Tabela 2.4 – Resultados experimentais; GHOBARAH *et al.* (2002).

Viga	Força que gera o momento de fissuração (kN)	Força que gera o momento de ruptura (kN)	Ângulo $\phi$ de rotação na ruptura ( $^{\circ}$ )	Ângulo $\phi$ de Rotação máxima ( $^{\circ}$ )
N1	8,04	19,45	4,63	13,66
N2	8,88	19,67	4,07	11,90
N3	9,96	19,02	9,16	14,57
C1	12,01	32,10	5,88	16,94
C2	9,88	24,93	6,34	13,30
C3	16,75	21,95	3,87	13,37
C4	11,74	28,27	5,02	13,47
C5	10,49	23,96	4,40	13,61
C6	–	30,05	6,47	13,30
G1	12,81	33,81	6,41	16,11
G2	11,23	23,48	4,76	12,46

### 2.3 PANCHACHARAM E BELARBI (2002)

PANCHACHARAM e BELARBI (2002) realizaram uma pesquisa com o objetivo de estudar o comportamento e o desempenho de vigas solicitadas à torção pura reforçadas com CFV com diferentes configurações, e avaliar modelos analíticos que estabeleçam a resistência à torção após o reforço.

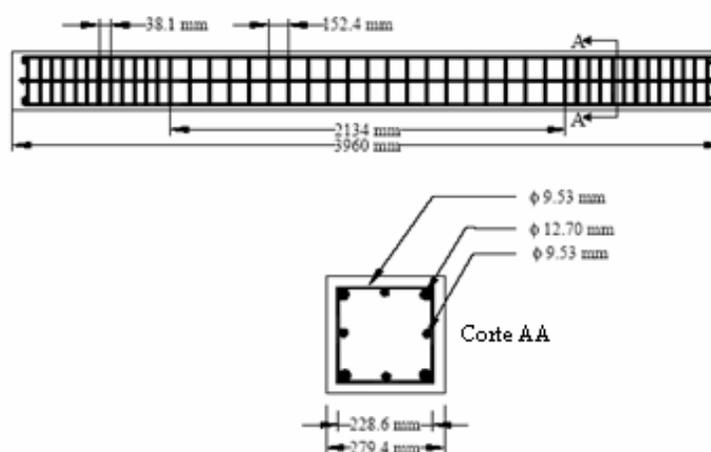
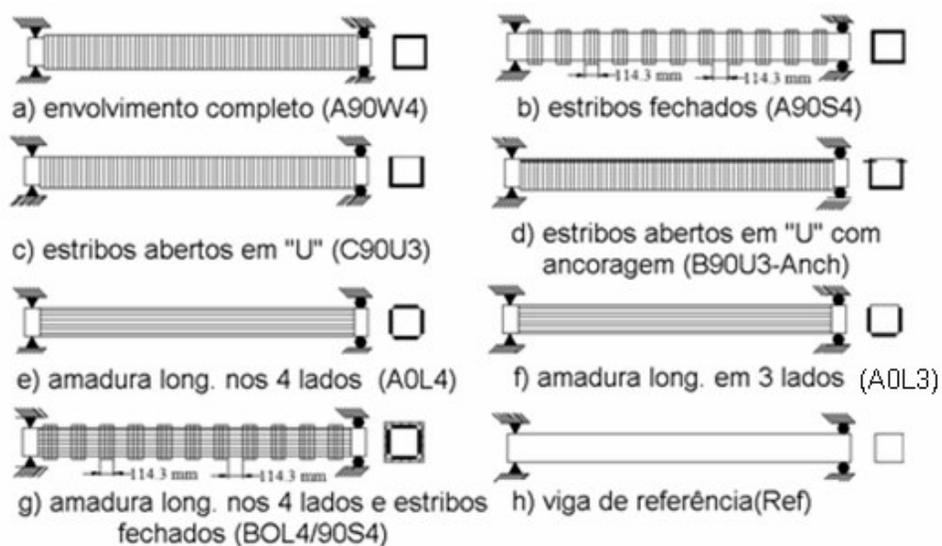
A pesquisa foi realizada utilizando-se oito vigas, entre as quais uma não foi reforçada com o propósito de servir de viga de referência. Todas as vigas foram executadas em concreto armado, sendo, no entanto, as armaduras longitudinal e transversal insuficientes para atender ao momento de torção solicitante, caracterizando assim a necessidade do reforço com CFV. O espaçamento dos estribos na região central foi ampliado com o propósito de tornar essa região menos resistente.

As oito vigas foram separadas em três séries (A, B e C) de acordo com as propriedades mecânicas dos materiais utilizados na sua execução. A Tabela 2.5 mostra as características mecânicas do aço de reforço e do concreto de cada série.

Tabela 2.5 – Propriedades do aço e do concreto; PANCHACHARAM *et al.* (2002)

SÉRIE	AÇO				CONCRETO
	9,53mm		12,7 mm		
	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	
A	420	700	460	700	34
B	450	620	320	510	26
C	450	620	320	510	31

A Figura 2.3 e 2.4 mostram, respectivamente, os detalhes das armaduras de aço das vigas e as diversas configurações de reforço com CFV utilizadas no estudo.

Figura 2.3 – Detalhes das vigas ; PANCHACHARAM *et al.* (2002)Figura 2.4 – Configurações de reforços CFV; PANCHACHARAM *et al.* (2002)

Os autores fizeram estudo analítico com o objetivo de prever o incremento de resistência à torção. O material compósito exerce o efeito de uma força passiva de protensão agindo na direção das fibras, e a deformação específica do mesmo é variável devido à tensão de tração na superfície da viga.

A força equivalente à protensão é obtida a partir da deformação específica média do material compósito no instante que ocorre a fissuração da viga.

Essa protensão  $PE$  é obtida por meio da expressão:

$$PE = \frac{\varepsilon_f E_f}{2} \quad (2.3.1)$$

onde  $\varepsilon_f$  é a deformação específica do material compósito obtida no círculo de Mohr.

O momento de torção de fissuração é determinado pela expressão:

$$T_{cr} = c_1 b^2 h f_t \sqrt{1 + \frac{PE}{f_t}} \quad (2.3.2)$$

onde

- $c_1$  – constante de Saint Venant;
- $b$  – base da viga;
- $h$  – altura da viga;
- $f_t$  – resistência à tração do concreto.

O momento de torção último é uma consequência da orientação das fibras e do modo de ruptura.

Considerando-se a ruptura controlada pelo compósito, e sendo suas fibras orientadas a  $90^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da viga, a contribuição do material compósito é obtido em função da sua deformação específica efetiva característica  $\varepsilon_{kef}$ , fornecida pelo Bulletin 14 da FIB (2000), que estabelece expressões para o cálculo da contribuição do reforço instalado.

A contribuição da configuração da viga A90W4 e A90S4 é dada por:

$$T_{u,frp} = 2\varepsilon_{kef} E_{fu} \frac{t_f b_f}{s_f} bh \cot \alpha \quad (2.3.3)$$

A contribuição da configuração da viga B90U3 é dada por:

$$T_{u,frp} = \varepsilon_{kef} E_{fu} \frac{t_f b_f}{s_f} bh \cot \alpha \quad (2.3.4)$$

onde

- $\varepsilon_{kef}$  – deformação específica efetiva característica do compósito;
- $T_{u,frp}$  – a parcela do reforço instalado;
- $E_{fu}$  – módulo de elasticidade do CRV na direção principal das fibras;
- $t_f$  – espessura do CRV;
- $s_f$  – espaçamento das tiras de CRV;
- $b_f$  – largura do reforço;
- $\alpha$  – ângulo da fissura em relação ao eixo da viga ( $45^0$ ).

A norma ACI 318–99 define a resistência última à torção nas vigas de concreto armado por meio da expressão:

$$T_{u,RC} = \frac{2A_0 A_t f_{yv}}{s} \cot \alpha \quad (2.3.5)$$

onde

- $T_{u,RC}$  – resistência última a torção;
- $A_0$  – seção definida pelo fluxo de tensão;
- $A_t$  – área da armadura transversal (estribos);
- $f_{yv}$  – tensão de escoamento da armadura transversal;
- $s$  – espaçamento da armadura transversal;
- $\alpha$  – ângulo da biela flexo–comprimida em relação ao eixo da viga.

A resistência última à torção nas vigas reforçadas com estribos inclinados de 90° em relação ao seu eixo é obtida por:

$$T_u = T_{u,RC} + T_{u,frp} \quad (2.3.6)$$

onde  $T_{u,frp}$  é a resistência do reforço à torção.

A Tabela 2.6 mostra os valores dos momentos de fissuração e dos momentos últimos de torção obtidos nos ensaios, a partir dos quais foi efetuada análise para as várias configurações adotadas.

Tabela 2.6 – Momentos de fissuração e momentos últimos experimentais;  
PANCHACHARAM *et al.* (2002).

Vigas	Mom. de Fissuração (kNm)	Acréscimo (%) no Mom. de Fissuração	Mom. Último (kNm)	Acréscimo (%) no Mom. Último
A90W4	22	29	45	149
A90S4	21	25	34	90
A0L4	26	53	29	62
A0L3	25	47	26	43
B0L4/90S4	22	29	35	96
B90U3 anc.	21	24	25	39
C90U3	20	20	24	35
Ref.	17	–	18	–

Para verificar a influência da orientação das fibras foram analisadas as vigas A90W4, A0L4 e Ref. Observou-se acréscimo significativo na resistência última para a viga A90W4. A viga A0L4 apresentou maior capacidade de absorção de energia em relação à Ref e muito maior ductilidade em relação à viga A90W4.

As vigas A90W4 e A90S4 diferenciam-se somente quanto a continuidade do reforço. Observou-se que o reforço contínuo promove aumento superior de

resistência à torção e maior rigidez pós-fissuração. O aumento do espaçamento dos estribos de reforço acarreta redução da eficiência.

Na maioria das situações práticas de reforço o acesso às quatro faces da viga é impossível. As vigas A0L4 e A0L3 comportaram-se de maneira similar, sendo o aumento de resistência à torção proporcional à taxa de reforço. As vigas A90W4, A90S4 e C90U3 mostraram aumento de resistência última em relação à viga de Ref., sendo, no entanto, a viga A90W4 a mais eficiente entre elas, em consequência do fluxo de tensão de torção ser totalmente envolvido pelo reforço. As três configurações de reforço mostraram momentos de fissuração próximos.

## **2.4 SALOM *et al.* (2004)**

Esse estudo foi realizado com seis vigas de mesmas dimensões e armaduras de aço internas: as dimensões eram 20,3 cm x 30,5 cm x 243,8 cm, armadas longitudinalmente no seu perímetro com  $6\phi 16$  mm +  $2\phi 13$  mm e transversalmente com  $\phi 13$  mm c15,2 cm.

Foram ensaiadas duas vigas sem reforço, utilizadas como referência, TB1 e TB6, as demais vigas foram reforçadas de diferentes maneiras com o objetivo de avaliar a eficiência de uma forma de reforço em relação à outra.

O reforço foi aplicado em três lados das vigas com o propósito de simular situações práticas (laje – vigas) onde o completo envolvimento da viga não é possível.

As vigas TB2 e a TB4 foram reforçadas com CFC a  $0^{\circ}$  e  $90^{\circ}$  em relação ao seu eixo longitudinal, sendo somente o CFC da TB4 ancorado com dispositivo apropriado.

As vigas TB3 e a TB5 foram reforçadas com CFC a  $\pm 45^{\circ}$  e  $90^{\circ}$ , respectivamente, também ancorado com dispositivo apropriado.

A Figura 2.5 ilustra ensaio da viga TB6 onde se pode observar a ruptura da mesma em consequência da formação de fissuras a  $45^{\circ}$  causadas pelo momento de torção.

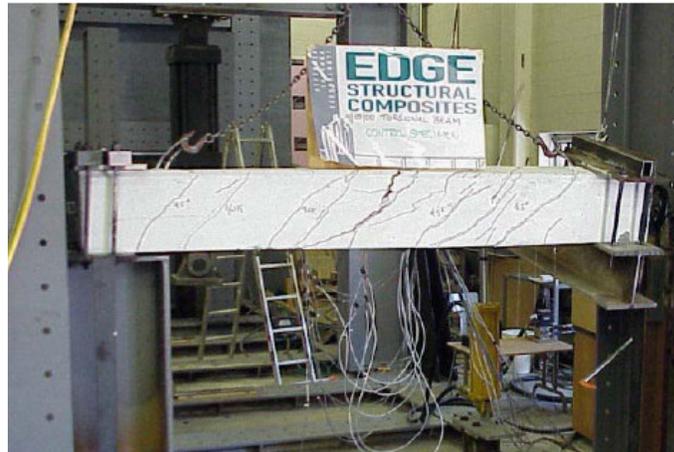


Figura 2.5 – Ruptura viga de referência solicitada à torção; SALOM *et al.* (2004).

Os autores consideraram o comportamento do CFC como o de um estribo fechado, onde a ancoragem promove o fechamento do quarto lado.

Com a expressão 2.3.5 que define a resistência última à torção nas vigas de concreto armado e a expressão do ACI 440 (2001) que estima a resistência ao cisalhamento de reforço com material compósito em forma de U, os autores propuseram modelo analítico para o cálculo da parcela devida ao CFC, assim:

$$T_f = \frac{2A_o A_f f_{fe}}{s} (\cos \alpha + \sin \alpha) \quad (2.4.1)$$

sendo

$$A_f = n w_f t_f \quad (2.4.2)$$

$$f_{fe} = \epsilon_{fe} E_f \quad (2.4.3)$$

Onde

$T_f$  – parcela de torção devida ao CFC;

$A_o$  – área da seção transversal envolvida pelo CFC;

$A_f$  – área do reforço;

$f_{fe}$  – tensão efetiva do CFC;

$s$  – espaçamento dos estribos de CFC;

- $\alpha$  – ângulo formado entre as fibras do compósito e o eixo axial da viga;  
 $n$  – número de camadas do CFC;  
 $w_f$  – largura do CFC;  
 $t_f$  – espessura do CFC;  
 $\varepsilon_{fe}$  – deformação específica do CFC;  
 $E_f$  – módulo de elasticidade do CFC.

Com a substituição da expressão 2.4.3 na expressão 2.4.1 tem-se para a deformação específica  $\varepsilon_{fe}$  :

$$\varepsilon_{fe} = \frac{T_f s}{2A_o A_f E_f (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)} \quad (2.4.4)$$

A Tabela 2.7 mostra os valores analíticos e experimentais obtidos nos ensaios.

Tabela 2.7 – Resultados experimentais e analíticos; SALOM *et al.*(2004).

Viga	Orient. das fibras	Ancor.	$\varepsilon_{fe}$ %	Mom. de Torção Máx. kNm	Incremento Mom. de Torção Exp.		Incremento Mom. de Torção Teó.	
					kNm	(%)	kNm.	(%)
TB1	Referência	–	–	20,3	–	–	–	–
TB2	[0 / 90]	não	0,15	32,5	12,2	60,1	11,3	55,7
TB3	[± 45]	sim	0,31	43,4	23,1	113,8	31,7	156,2
TB4	[0 / 90]	sim	0,17	35,3	15,0	73,9	12,7	62,6
TB5	[90]	sim	0,21	33,9	9,5	38,9	14,9	73,4
TB6	Referência	–	–	24,4	–	–	–	–

Com os dados da Tabela 2.7 pode-se observar a eficiência do reforço executado com CFC verifica-se um acréscimo de resistência de aproximadamente 113%.

As vigas TB2 e TB4 diferenciam-se pela aplicação de dispositivo de ancoragem, daí uma variação de incremento na resistência à torção de 23%.

A viga TB3 reforçada com fibras orientadas a  $\pm 45^\circ$  apresentaram aumento de resistência relevante em consequência das fibras serem orientadas na mesma direção da tensão principal, porém, essa forma de reforço é pouco prática.

O modelo analítico proposto simula com eficiência a contribuição do reforço a  $0^{\circ}$  e  $90^{\circ}$  e superestima os demais.

## 2.5 AMELI *et al.* (2005)

A pesquisa experimental conduzida pelos autores teve como objetivo obter a contribuição de reforços à torção com CFC e CFV, executados a partir de diferentes configurações, e possibilitar avaliar os métodos analíticos que melhor estimam a tensão última à torção dos elementos reforçados.

O programa experimental constitui-se de 12 vigas executadas em concreto armado divididas em duas séries de seis. Todas as vigas tinham seção transversal igual a 15 cm por 35 cm e foram igualmente armadas com armadura longitudinal com  $f_{yk}$  igual a 500 MPa ( $4\phi 16$  mm em cada canto) e armadura transversal com  $f_{yk}$  igual a 250 MPa ( $\phi 6$  mm c8 cm); o cobrimento adotado foi igual a 2,5 cm. As duas séries foram igualmente reforçadas, sendo uma reforçada com CFC (CF130) e executada com concreto cujo  $f_{ck}$  era igual a 39 MPa, e a outra com CFV (EG900) executada com concreto cujo  $f_{ck}$  era igual a 36 MPa. A Figura 2.6 mostra as diversas configurações de reforço com CFC e CFV utilizadas no estudo. As letras C e G nas nomenclaturas da figura significam, respectivamente, reforço com CFC e CFV.

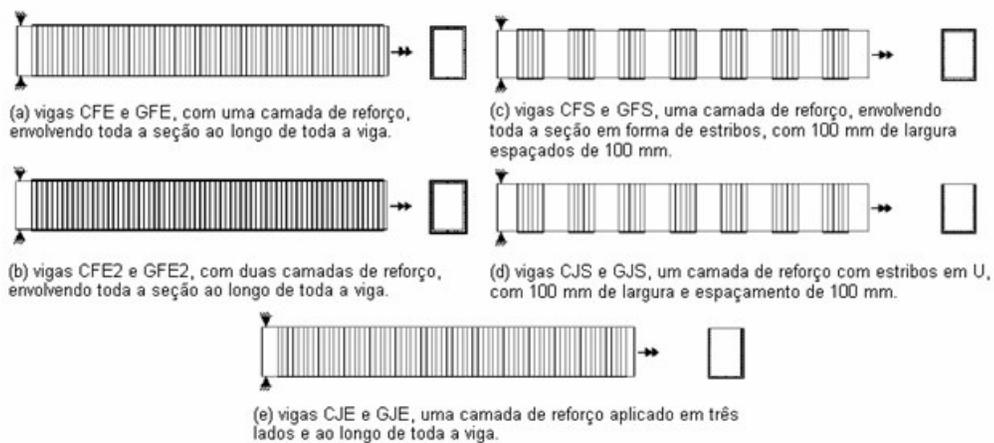


Figura 2.6 – Configurações de reforços com CFC e CFV; AMELI *et al.* (2005).

A Tabela 2.8 mostra as propriedades dos compósitos utilizados nesse estudo.

Tabela 2.8 – Propriedades dos compósitos; AMELI *et al.* (2005).

Compósito	Espessura (mm)	$E_f$ (GPa)	$f_{tu}$ (MPa)
CF130	0,165	240	3900
EG900	0,154	73	3400

A Figura 2.7 ilustra o ensaio de uma das vigas.



Figura 2.7 – Execução de ensaio à torção; AMELI *et al.* (2005).

Esses autores utilizaram para cálculo da contribuição do reforço a expressão da Bulletin 14 da FIB (2000). assim.

$$T_{u,f} = \frac{2bht_f b_f \varepsilon_{fe} E_f}{s_f} (\cot \alpha + \cot \beta) \operatorname{sen} \beta \quad (2.5.1)$$

onde

- $T_{u,f}$  – parcela de torção devida ao reforço;
- $\alpha$  – ângulo de inclinação da biela em relação ao eixo longitudinal da viga;
- $\beta$  – ângulo das fibras em relação ao eixo longitudinal da viga;
- $\varepsilon_{fe}$  – deformação específica efetiva do compósito;

- $bh$  – seção transversal da viga;  
 $b_f$  – largura do reforço;  
 $E_f$  – módulo de elasticidade do compósito;  
 $s_f$  – espaçamento das tiras de reforço.

Para o cálculo do momento de torção de ruptura das vigas de referência, foram utilizadas as expressões propostas pelo AS3600 – 2001 e a teoria do campo de compressão diagonal ( MITCHELL e COLLINS, 1974, 1980).

A Tabela 2.9 mostra os valores dos momentos de torção de ruptura das vigas de referência RC e RG, obtidos a partir das expressões propostas pelo AS3600 – 2001 e MITCHELL e COLLINS (1974, 1980).

Tabela 2.9 – Momentos de torção de ruptura (kNm).

Vigas	AS3600 – 2001	MITCHELL e COLLINS (1974,1980)
RC	4,9	16,4
RG	4,9	15,8

A Tabela 2.10 mostra os valores experimentais e teóricos obtidos nesse estudo.

Tabela 2.10 – Momentos de torção experimentais e teóricos (kNm); AMELI *et al.* (2005).

Vigas	$T_u$ (Exper.)	Cont.Exp.. Reforço (%)	Contr. Teó.Ref.Bulletin 14 da FIB (2000)	$T_{Teó,1}$ AS3600 + Bulletin 14 da FIB (2000)	$T_{Teó,2}$ Mitchell e Collins + Bulletin 14 da FIB (2000)	$\frac{T_{Teó,1}}{T_u}$ (%)	$\frac{T_{Teó,2}}{T_u}$ (%)
RC	15	–	–	4,9	16,4	67	9
CFE	28	87	17,1	22,0	33,5	22	19
CFE2	36,5	143	27,4	32,3	43,9	11	20
CJE	20	33	4,6	9,5	21,0	53	5
CFS	21,7	45	10,4	15,3	27,0	29	24
CJS	17,4	16	3,4	8,3	19,8	52	14
RG	14,8	–	–	4,9	15,8	67	7
GFE	26,3	78	7,1	12,0	22,9	54	14
GFE2	31,1	110	14,2	19,1	30,0	39	4
GJE	19,5	32	2,6	7,5	18,4	62	6
GFS	19,9	34	3,5	8,4	19,3	58	3
GJS	16,9	14	1,8	6,7	17,6	61	4

Com os dados da Tabela 2.1 observa-se que a configuração de reforço CFE2 e GFE2 leva a um aumento de resistência à torção relevante, 143% e 110 %, respectivamente, para as vigas reforçadas com CFC e CFV.

As vigas cujas seções transversais são totalmente envolvidas pelo reforço CFE, CFS, GFE e GFS apresentam um aumento de resistência à torção superior às parcialmente envolvidas CJE, CJS, GJE e GJS.

Pode-se observar que a expressão proposta por MITCHELL e COLLINS (1974, 1980) leva a valores mais próximos dos valores experimentais.

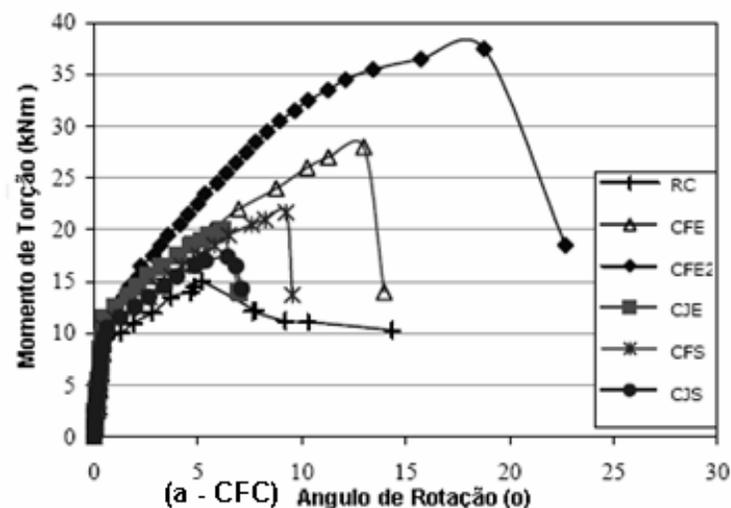
Observou-se que as vigas reforçadas no seu entorno chegaram ao E.L.U. por meio da ruptura do compósito, e as reforçadas em somente três faces da seção transversal chegaram ao E.L.U. por meio do descolamento do compósito.

Os ângulos de torção do lado livre da viga foram avaliados

As Figuras 2.8 mostra os diagramas de momento de torção *versus* ângulo de rotação das vigas  $\phi$  reforçadas com CFC e CFV, onde observa-se um maior acréscimo do momento de torção último para as vigas reforçadas nas quatro faces, ficando o menor desempenho para o reforço com envolvimento parcial.

As vigas reforçadas com CFC apresentaram melhor desempenho em relação às vigas reforçadas com CFV.

Observou-se também que a rotação referente ao momento de torção último de todas as vigas foi aumentado.



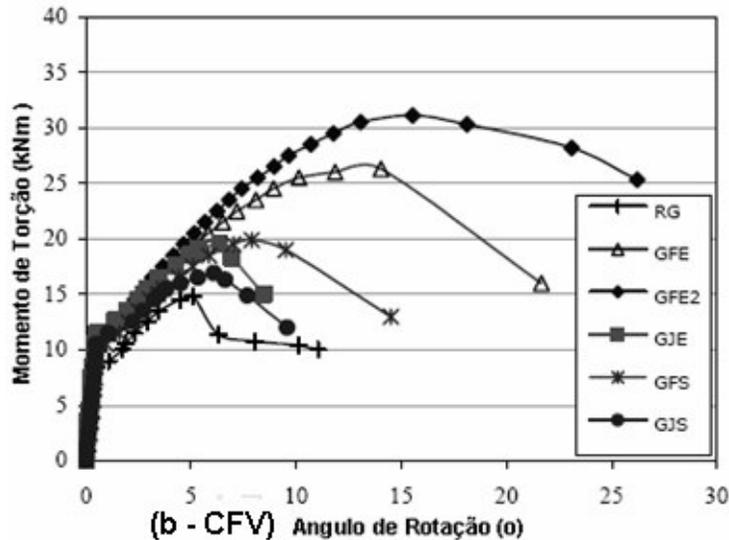


Figura 2.8 – Momento de torção *versus* ângulo de rotação  $\phi$ ; AMELI *et al.* (2005).

## 2.6 HII E AL-MAHAIDI (2006a)

Esses autores fizeram um estudo experimental com o objetivo de avaliar a eficiência do reforço externo com CFC em vigas de seção vazada e maciça solicitadas à torção.

Esse estudo foi complementado por análise numérica por meio do método de elementos finitos.

Foram utilizadas seis vigas em concreto armado com seção transversal de 50 cm por 35 cm e comprimento de 250 cm, sendo duas de seção maciça e quatro de seção vazada.

Para cada tipo de seção transversal uma viga não foi reforçada para que a mesma fosse utilizada como referência.

A Figura 2.9 ilustra o detalhamento das armaduras de aço longitudinal e transversal das vigas em concreto armado, dimensões transversais e cobrimentos adotados.

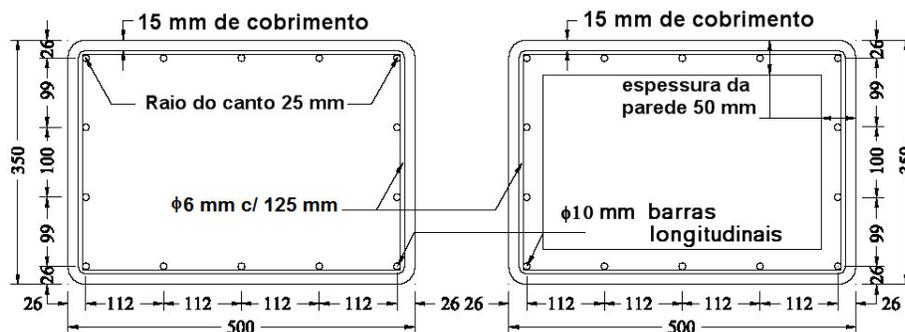


Figura 2.9 – Características geométricas e armaduras de aço; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

As Tabelas 2.11, 2.12 e 2.13 mostram, respectivamente, os dados das configurações de reforço adotadas com estribos de CFC com 5 cm de largura, as propriedades das armaduras de aço e as propriedades do CFC.

Tabela 2.11 – Dados de reforço; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

Viga	Esquema de reforço			$f_c$ (MPa)
	Tipo seção	N <sup>o</sup> . camadas	Espaçamento	
CS1	Referência -seção maciça	–	–	52,5
FS050D2	Reforçada -seção maciça	2	0,50D	56,4
CH1	Referência -seção vazada	–	–	48,9
FH075D1	Reforçada -seção vazada	1	0,75D	48,9
FH050D1	Reforçada -seção vazada	1	0,50D	56,4
FH050D2	Reforçada -seção vazada	2	0,50D	52,8

D – Altura total da viga

Tabela 2.12 – Propriedades das armaduras de aço; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

Propriedades do aço	Estribos- $\phi$ 6 mm	Arm. longitudinal $\phi$ -10 mm
Área, $A_s$ (mm <sup>2</sup> )	28,27	78,54
Módulo de Elasticidade $E_s$ (GPa)	213	207
Tensão de escoamento $f'_y$ (MPa)	426,5	398,2
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	0,3

Tabela 2.13 – Propriedades do CFC; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

MBrace CF 130 (S&P C-sheet 240)	
Fibra	Carbono alta resistência
Massa específica (g/cm <sup>3</sup> )	1,7
Módulo de Elasticidade (GPa)	240
Peso (g/m <sup>2</sup> )	426,5
Espessura (mm)	0,176
Tensão de ruptura (MPa)	3800
Deformação específica última (%)	1,55

As vigas ensaiadas foram solicitadas à torção a partir da aplicação de uma força aplicada por meio de um macaco hidráulico num braço fixado à mesma. A distância do ponto de aplicação foi 1,8 m.

A Figura 2.10 ilustra a configuração inicial de uma das vigas vazadas reforçadas com CFC. A viga é fixada de forma a impedir qualquer movimento de translação e rotação de uma das suas extremidade, ficando a outra, onde ocorre a aplicação do momento de torção, livre para girar e se deslocar horizontalmente.



Figura 2.10 – Configuração inicial de reforço e aplicação de momento; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

A Figura 2.11 mostra as curvas experimentais momento de torção *versus* ângulo de rotação. Observa-se que a rigidez pré e pós-fissuração, e os momentos de fissuração e último têm uma relação direta com a taxa de CFC aplicada. O acréscimo de capacidade à torção relacionou-se com o espaçamento entre os estribos de CFC e o número de camadas dos mesmos.

Os incrementos de momentos de fissuração e último para a viga vazada com duas camadas de reforço são, respectivamente, 6,40 kNm (40%) e

38,30 kNm (78%). Para as vigas maciças com a mesma configuração de reforço os incrementos de momento de fissuração e último foram, respectivamente, de 5,30 kNm (8%) e 30,90 kNm (49%).

Nas vigas CS1 e CH1 o concreto do cobrimento deslocou-se no final do ensaio; esse fenômeno não ocorreu nas vigas reforçadas com CFC, fato esse que contribuiu para o aumento da resistência à torção. Observou-se que os estribos de CFC inibiram a propagação e abertura das fissuras em relação às vigas de referência.

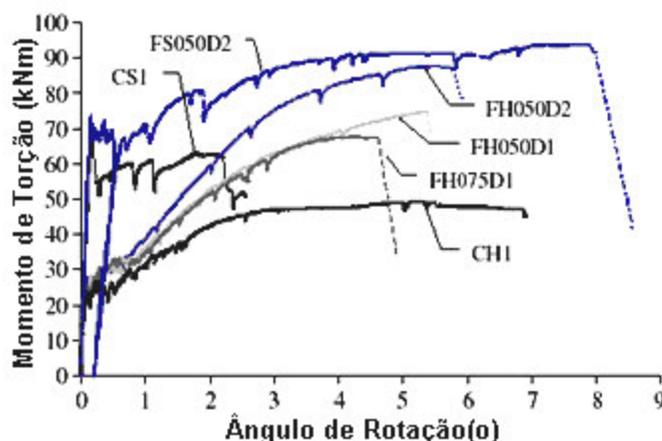


Figura 2.11 – Momento de torção *versus* ângulo de rotação  $\phi$ ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

A Tabela 2.14 mostra os valores experimentais de momento de fissuração e último com os seus respectivos ângulos de rotação.

Tabela 2.14 – Resultados experimentais; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

Viga	$T_{cr}$ (kNm)	$\phi_{cr}$ (°)	$T_u$ (kNm)	$\phi_u$ (°)
CS1	68,4	0,15	62,9	1,79
FS050D2	73,7 (7,7%)	0,16	93,8 (49,2%)	7,54
CH1	15,8	0,03	49,4	5,29
FH075D1	19,6 (24,1%)	0,00	67,5 (36,7%)	4,60
FH050D1	21,3(34,8%)	0,04	78,4 (51,5%)	5,43
FH050D2	22,2(40%)	0,02	87,7 (77,6%)	5,52

O mecanismo de ruptura ilustrado na Figura 2.12 manteve-se constante para todas as vigas. As fissuras nas vigas sob um determinado nível de carregamento propagaram-se através do CFC causando um descolamento parcial

do mesmo, não ocorrendo a ruptura imediata devido a ancoragem do CFC efetivada por meio dos estribos fechados com traspasse de 15 cm.

A ruptura do estribo de CFC geralmente deu-se nos cantos seguida do deslocamento de uma fina camada de concreto.

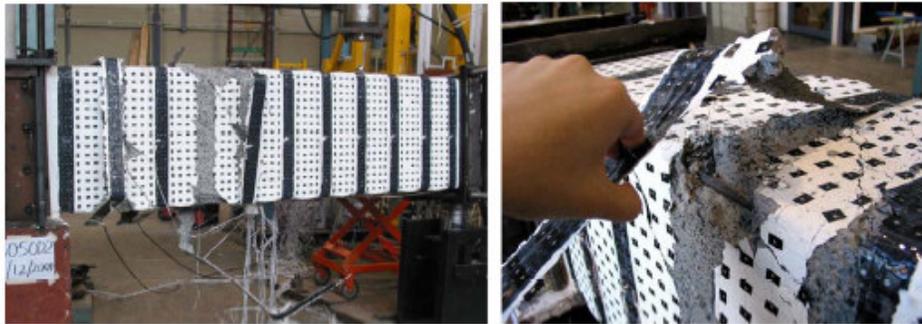


Figura 2.12 – Mecanismo de ruptura – (FS050D2 e FH050D1) ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

A partir da modelagem com método de elementos finitos foi possível avaliar a rigidez de cisalhamento do concreto pós fissurado devida ao intertravamento dos agregados. Essa rigidez foi considerada como uma parcela do módulo elástico de cisalhamento, considerando-se um fator de retenção  $\beta$ .

Os valores teóricos de momentos de torção para as vigas de referência, ilustrado na Figura 2.13 mostraram incremento de resistência a partir do aumento do fator  $\beta$ .

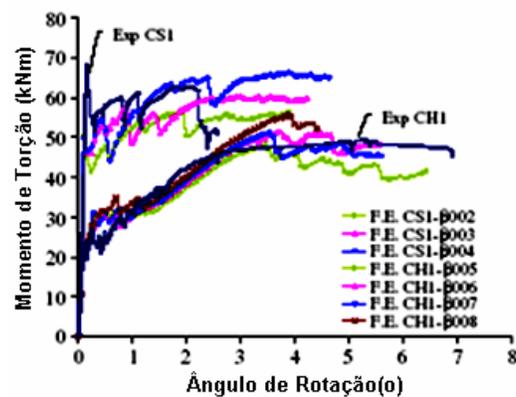


Figura 2.13 – Curvas teóricas momento torção *versus* ângulo de rotação  $\phi$  considerando-se variação do fator  $\beta$  ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

Essas curvas foram utilizadas para obter o valor ideal do fator  $\beta$ . Observou-se maior proximidade entre os valores experimentais e teóricos quando adotados os  $\beta = 0,06$  e  $\beta = 0,03$  para as vigas de referência CH1 e CS1, respectivamente.

A Figura 2.14 ilustra as curvas teóricas momento torção *versus* ângulo de rotação  $\phi$  de todas as vigas a partir dos valores ideais do fator  $\beta$ .

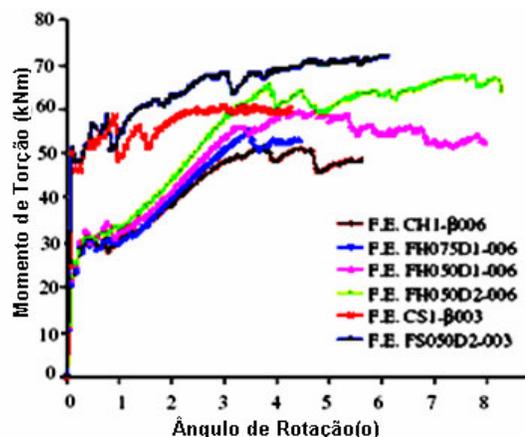


Figura 2.14 – Curvas teóricas momento torção *versus* ângulo de rotação  $\phi$  considerando-se valores ideais do fator  $\beta$ ; HII e AL-MAHAIDI (2006a).

As curvas teóricas mostram concordância com os dados experimentais. A partir dos resultados obtidos pode-se observar: a) incremento de rigidez pós-fissuração, momentos de fissuração e últimos proporcionais à redução do espaçamento dos estribos de CFC e ao número de camadas de reforço; b) deformações específicas das barras longitudinais e transversais de aço com acréscimo de deformações específicas mais significativas após a fissuração do concreto e redução de solicitação nas mesmas com o acréscimo de reforço com CFC; c) aparecimentos de fissuras em espiral nos quatro lados das vigas, tanto nas vigas de referência quanto nas reforçadas com CFC, mostrando não ocorrer modificação no mecanismo de fissuração com a adição do reforço; d) a abertura e propagação das fissuras foram impedidas pelo reforço, as mesmas apresentaram-se bem reduzidas, em maior número e mais uniformemente espaçadas, provocando aumento na rigidez pós fissuração; e) as deformações específicas CFC foram significativamente menores que a deformação específica última do

mesmo; f) não uniformidade de deformações específicas nos estribos de CFC devido ao fato da fissura de torção não ser perpendicular aos mesmos.

## 2.7 HII E AL-MAHAIDI (2006b)

Esse trabalho dá continuidade ao estudo de HII e AL-MAHAIDI (2006a), sendo utilizados os recursos da fotogrametria para avaliar as deformações, o desenvolvimento das fissuras e o intertravamento dos agregados nas vigas solicitadas à torção.

Em cada viga analisada foram utilizados aproximadamente 3.000 pontos reflexivos. Esses pontos foram colocados na superfície de concreto e nas faixas do CFC (Figura 1.12). Durante os ensaios diferentes posições das vigas foram fotografadas. Essas imagens foram processadas para se obter a localização precisa dos pontos reflexivos.

SONNENBERG (2003) e SONNENBERG *et al.* (2003) *apud* HII E AL-MAHAIDI (2006b) propuseram equação para avaliar a parcela de resistência à torção devida ao intertravamento dos agregados:

$$\tau = \frac{-7,795\Delta_n e^{-0,0438\alpha}}{\Delta_n^{1,996} + 0,228} \quad (2.7.1)$$

onde

- $\tau$  – tensão de cisalhamento;
- $\Delta_n$  – deslocamento normal (abertura da fissura);
- $\alpha$  – deslocamento relativo entre as faces da fissura.

Observou-se que para um mesmo nível de solicitação à torção a média de tensão de cisalhamento devida ao intertravamento dos agregados é muito maior para as vigas reforçadas com CFC, devido ao impedimento do crescimento das fissuras. A tensão de cisalhamento cresceu com o decréscimo do espaçamento entre os estribos de CFC e o aumento do número de camadas dos mesmos.

Esses autores concluiriam que o incremento na resistência à torção não é devido unicamente ao CFC, mas indiretamente também pelo intertravamento dos agregados. Com o decréscimo de abertura de fissuras  $\Delta_n$  proporcionado pelo reforço de CFC, o deslocamento relativo entre as faces fissuradas  $\alpha$  diminui, fazendo com que ocorra um aumento de tensão de cisalhamento resistente  $\tau$ .

A fotogrametria proporcionou resultados conclusivos mostrando que o mecanismo básico de deformação das vigas reforçadas manteve-se inalterados em relação às vigas de referência, e que o reforço com CFC indiretamente aumenta a eficiência do intertravamento dos agregados, pois limita a evolução das fissuras.

## 2.8 HII E AL-MAHAIDI (2006c, 2007)

Nesses trabalhos os autores compilaram resultados de pesquisas experimentais desenvolvidas com vigas reforçadas com CFC disponíveis na literatura, para posterior avaliação das expressões propostas pelo Bulletin 14 da FIB (2000).

Foram também conduzidos estudos para modificação da área envolvida pelo fluxo de tensão de cisalhamento segundo as prescrições da AS3600 – 2001 e do ACI 318 – 2005.

Dos três tipos de ruptura geralmente observados, rompimento do CFC, descolagem do CFC e esmagamento do concreto, somente os dois primeiros foram avaliados, devido à impossibilidade de ocorrência do terceiro sem que a contribuição do CFC seja ativada.

A contribuição do CFC segundo o Bulletin 14 da FIB (2000) é dada pela expressão:

$$T_{n,PRF} = 2\varepsilon_{fd,e} E_{fu} A_f s_f^{-1} A_c (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \quad (2.8.1)$$

$$\varepsilon_{fd,e} = \frac{\varepsilon_{fk,e}}{\gamma_f} \quad (2.8.2)$$

$$\varepsilon_{fk,e} = k\varepsilon_{f,e} \leq \varepsilon_{máx} \quad (2.8.3)$$

$$A_f = b_f t_f \quad (2.8.4)$$

onde

- $T_{n,PRF}$  – parcela de resistência à torção da viga inerente ao PRF;
- $A_f$  – área do estribo do CFC;
- $b_f$  – largura do estribo de CFC;
- $t_f$  – espessura do estribo de CFC;
- $A_c$  – seção transversal de concreto;
- $\varepsilon_{fd,e}$  – deformação específica efetiva de cálculo do CFC;
- $\varepsilon_{fk,e}$  – deformação específica efetiva característica do CFC;
- $\varepsilon_{f,e}$  – deformação específica efetiva do CFC;
- $s_f$  – espaçamento eixo a eixo dos estribos de CFC;
- $E_{fu}$  – módulo de elasticidade do CFC;
- $\theta$  – ângulo das fissuras em relação ao eixo longitudinal da viga;
- $\alpha$  – ângulo dos estribos de CFC em relação ao eixo longitudinal da viga;
- $\varepsilon_{máx}$  – deformação específica máxima do CFC, adotado  $5000 \times 10^{-6}$  para possibilitar a ativação do mecanismo de intertravamento dos agregados;
- $\gamma_f$  – fator de segurança do CFC, adotado pelo Bulletin 14 da FIB  $1,2 \leq \gamma_f \leq 1,5$ .

Para o cálculo da contribuição do reforço em U a expressão 2.8.1 foi utilizada sem o fator 2 nela existente.

Devido ao mecanismo de fissuração similar ao cisalhamento o Bulletin 14 da FIB (2000) recomenda adotar os estudos de TRIANTAFILLOU e ANTONOPOULOS (2000) para o cálculo das deformações específicas efetivas do PRF.

A deformação específica efetiva  $\varepsilon_{f,e}$  é obtida a partir das expressões 2.8.5 e 2.8.6 de acordo com as configurações do reforço.

Para o reforço com envolvimento total da seção ou estribos devidamente ancorados tem-se:

$$\varepsilon_{f,e} = 0,17 \left( \frac{f_{cm}^{2/3}}{E_{fu} \rho_f} \right)^{0,30} \varepsilon_{f,u} \quad (2.8.5)$$

Para o reforço lateral ou em forma de U tem-se:

$$\varepsilon_{f,e} = \min \left[ 0,17 \left( \frac{f_{cm}^{2/3}}{E_{fu} \rho_f} \right)^{0,30} \varepsilon_{f,u} \quad , \quad 0,65 \left( \frac{f_{cm}^{2/3}}{E_{fu} \rho_f} \right)^{0,56} \times 10^{-3} \right] \quad (2.8.6)$$

onde

$f_{cm}$  – resistência média de compressão do concreto;

$\varepsilon_{f,u}$  – deformação específica última do CFC;

$\rho_f$  – taxa de reforço de CFC.

A taxa de reforço  $\rho_f$  é obtida de acordo com as configurações de reforço adotadas.

Para o reforço com envolvimento total da seção seguem-se:

$$\rho_f = \frac{t_f}{t_c} \quad (2.8.7)$$

$$t_c = \frac{3A_c}{4p_c} \quad (2.8.8)$$

onde

$t_c$  – espessura equivalente da parede onde ocorre o fluxo de tensão;

$p_c$  – perímetro da seção transversal de concreto.

Em vigas vazadas  $t_c$  é o menor valor entre a espessura real da parede e a obtida com a expressão 2.8.8.

Para o reforço com estribos, tem-se:

$$\rho_f = \frac{t_f b_f}{t_c s_f} \quad (2.8.9)$$

Na Figura 2.15 pode-se observar que os resultados obtidos pelas expressões do Bulletin 14 da FIB (2000) superestimam a contribuição do CFC. Os valores experimentais  $T_{f,exp}$  encontram-se aproximadamente 52% abaixo dos

valores teóricos.  $T_{n,frp}$  Nessa análise as deformações específicas foram consideradas como  $\varepsilon_{fe}$  e o coeficiente de segurança  $\gamma_f = 1$ .

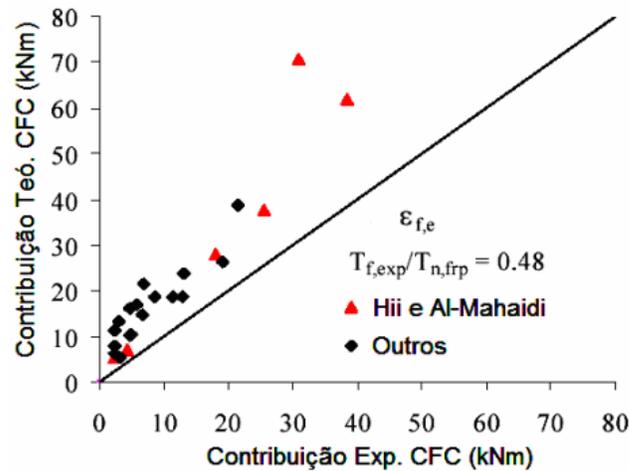


Figura 2.15 – Contribuição do CFC na resistência à torção segundo Bulletin 14 da FIB (2000) *versus* valores experimentais; HII e AL-MAHAIDI (2006c, 2007).

O ângulo de inclinação das fissuras não é tratado na literatura analisada, excetuando-se o trabalho de HII e AL-MAHAIDI. Assim sendo, os mesmos foram considerados constantes e iguais a  $45^{\circ}$ .

Os valores teóricos mostraram-se superestimados até mesmo para as vigas dos autores que utilizaram como ângulo de inclinação a média dos valores por eles encontrados. Esse fato ressaltou incompatibilidade em outros parâmetros existentes na metodologia do Bulletin 14 da FIB (2000).

Observou-se que apesar dos mecanismos de fissuração apresentarem-se similares na torção e no cisalhamento o método do Bulletin 14 da FIB (2000) necessita de refinamento para melhor estimar a contribuição do CFC na resistência das vigas solicitadas à torção.

O cálculo da contribuição do reforço de acordo com a expressão 2.8.1 pressupõe a localização da resultante do fluxo de cisalhamento na superfície do concreto onde o compósito é colado, porém, o fluxo está localizado a certa distância da mesma.

Assim a expressão 2.8.1 foi modificada:

$$T_{n,PRF} = 2\varepsilon_{fd,e} E_{fu} A_f s_f^{-1} A_n (\cot g\theta + \cot g\alpha) \sin\alpha \quad (2.8.10)$$

sendo  $A_n$  a área interna ao fluxo de tensão de cisalhamento.

O cálculo de  $A_n$  é feito de acordo com as prescrições da AS3600 – 2001 e ACI 318 – 05, de forma a tornar consistente o modelo da Trelíça Espacial onde a resultante das forças de compressão encontra-se localizada a certa distância abaixo da superfície do concreto.

A Figura 2.16 ilustra as dimensões para o cálculo da referida área, segundo as prescrições da AS3600 – 2001 e ACI 318 – 05.

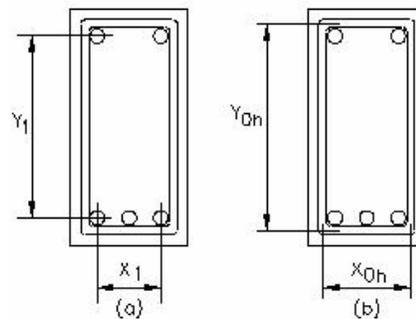


Figura 2.16 – Dimensões para o cálculo de  $A_n$  segundo as prescrições: (a) AS3600 – 2001 e (b) ACI 318 – 05; HII E AL-MAHAIDI (2006C, 2007).

O cálculo de  $A_n$  de acordo com as prescrições da AS3600 – 2001 e ACI 318 – 05 é feito, respectivamente, por meio das expressões:

$$A_n = x_1 y_1 \quad (2.8.11)$$

$$A_n = 0,85 x_{oh} y_{oh} \quad (2.8.12)$$

A resistência total das vigas reforçadas com CFC solicitadas à torção é obtida pela adição das parcelas inerentes ao aço e ao CFC, de acordo com a expressão:

$$T_n = T_{n,s} + T_{n,PRF} \quad (2.8.13)$$

onde

$T_n$  – resistência total à torção da viga;

$T_{n,s}$  – parcela de resistência à torção da viga inerente ao aço.

A partir de substituições nas expressões 2.8.10 e 2.8.13 obtém-se a seguinte expressão para cálculo da resistência total à torção:

$$T_n = \phi 2A_n (\cotg \theta + \cotg \alpha) \text{sen} \alpha \left[ f_{sy,f} A_{sw} s_t^{-1} + \epsilon_{fd,e} E_{fu} A_f s_f^{-1} \right] \quad (2.8.14)$$

onde

- $A_{sw}$  – área de um tramo do estribo de aço;
- $f_{sy,f}$  – tensão de escoamento do aço do estribo;
- $s_t$  – espaçamento dos estribos de aço;
- $\phi$  – fator de resistência à torção.

A expressão 2.8.14 encontra-se em conformidade com a AS3600 – 2001 e é similar à obtida quando feitas adaptações segundo o ACI318 – 05.

Para análise de acordo com as adaptações da AS3600 – 2001 o ângulo das bielas foi obtido de acordo com a expressão 2.8.15, e de acordo com o ACI318 – 05 esse ângulo foi considerado de maneira conservativa igual a  $45^0$ :

$$\theta = 30^0 + 15^0 \left[ \frac{T_n - \phi T_{uc}}{\phi T_{u,max} - \phi T_{uc}} \right] \quad (2.8.15)$$

onde

- $T_{uc}$  – momento de torção de fissuração;
- $T_{u,max}$  – momento de torção último.

Os valores dos momentos de torção últimos teóricos  $T_n$  obtidos a partir das adaptações às prescrições da AS3600 – 2001 e do ACI 318 – 05 foram posteriormente comparados com os valores experimentais.

A Figura 2.17 ilustra a relação momento de torção último teórico *versus* momento de torção último experimental.

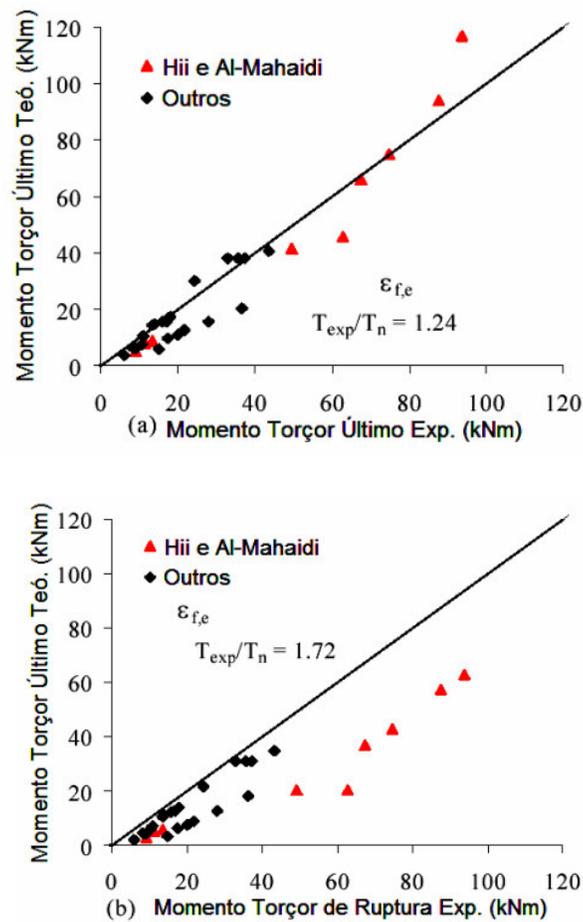


Figura 2.17 – Resistência à torção: (a) AS3600 – 2001 e (b) ACI 318 – 05 *versus* valores experimentais; HII e AL-MAHAIDI (2006c, 2007).

Os valores obtidos usando-se a norma ACI318 – 05 mostraram-se muito conservativos comparados aos obtidos segundo a AS3600 – 2001, devido aos valores utilizados para o ângulo de inclinação das bielas. Esse fato ressalta a importância da correta avaliação desse parâmetro nos estudos de reforço à torção.

## 2.9 SILVA FILHO (2007)

Essa pesquisa teve como objetivo avaliar o comportamento e o acréscimo de resistência de vigas solicitadas à torção pura reforçadas com CFC. Foram

ensaiadas sete vigas de concreto armado, sendo uma sem reforço, utilizada como referência, e as demais reforçadas com duas configurações distintas (VT e VTL).

Apresentaram-se duas sistemáticas: a) modelo teórico para análise desenvolvido a partir da formulação denominada *Softening Truss Model* baseado no modelo da Treliça Espacial Generalizada. Essa formulação considera a não linearidade física do concreto e do aço, e o abrandamento da tensão no concreto solicitado à compressão causado pelas fissuras ocorridas devido à tensão de tração em direção perpendicular; b) modelo teórico para dimensionamento de vigas solicitadas à torção pura reforçadas com CFC, nesse é adotado o modelo da Treliça Espacial Generalizada e a metodologia do Eurocode 2.

Nos dois modelos teóricos a consideração da tensão efetiva de aderência CFC – concreto foi realizada a partir de estudo de aderência elaborado por CHEN e TENG (2003).

Em SILVA FILHO (2007) é abordado o estudo de APRILE *et al.* (2004) que definiram a partir do modelo do painel fissurado (CFC + Aço) uma expressão que possibilita o cálculo do ângulo de inclinação das bielas  $\alpha$ , admitido igual ao ângulo de inclinação das fissuras e igual ao ângulo das deformações específicas principais:

$$\alpha = \text{arc tg} \left[ \frac{1 + \frac{1}{n_s \rho_{sl} + n_f \rho_{fl}}}{1 + \frac{1}{n_s \rho_{st} + n_f \rho_{ft}}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.9.1)$$

$$n_s = \frac{E_s}{E_c} \quad (2.9.2)$$

$$n_f = \frac{E_f}{E_c} \quad (2.9.3)$$

$$\rho_{sl} = \frac{\sum A_{sl}}{p_o t_d} \quad (2.9.4)$$

$$\rho_{st} = \frac{A_{st}}{s_t t_d} \quad (2.9.5)$$

$$\rho_{fl} = \frac{\sum A_{fl}}{p_c t_d} \quad (2.9.6)$$

$$\rho_{ft} = \frac{A_{ft}}{s_{ft}t_d} \quad (2.9.7)$$

onde

$n_s, n_f$  – razão entre os módulos de elasticidade;

$\rho_{sl}$  – taxa geométrica de armadura longitudinal de aço;

$\rho_{st}$  – taxa geométrica de armadura transversal de aço;

$\rho_{fl}$  – taxa geométrica de armadura longitudinal de CFC;

$\rho_{ft}$  – taxa geométrica de armadura transversal de CFC;

$E_c$  – módulo de elasticidade do concreto;

$E_s$  – módulo de elasticidade do aço;

$E_f$  – módulo de elasticidade do CFC;

$A_{sl}$  – armadura longitudinal de aço;

$A_{st}$  – armadura transversal de aço;

$A_{fl}$  – armadura longitudinal de CFC;

$A_{ft}$  – armadura transversal de CFC;

$t_d$  – espessura do painel;

$p_o$  – perímetro ao longo da metade da espessura  $t_d$ ;

$p_c$  – perímetro externo da seção de concreto  $A_c$ ;

$s_t$  – espaçamento da armadura transversal de aço;

$s_{ft}$  – espaçamento da armadura transversal de CFC.

A Figura 2.18 ilustra os parâmetros da seção transversal utilizados para cálculo do ângulo de inclinação das bielas dado pela expressão 2.9.1.

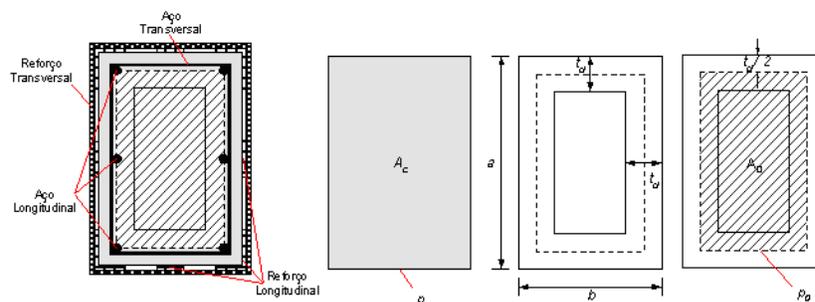


Figura 2.18 – Parâmetros da seção transversal; SILVA FILHO (2007).

As vigas tinham as mesmas armaduras longitudinal e transversal, constituídas, respectivamente, de  $6\phi 12,5$  mm e  $\phi 10$  mm c7,5 cm;  $\phi 10$ mm c15 cm. A Figura 2.19 mostra os detalhes das armaduras longitudinal e transversal.

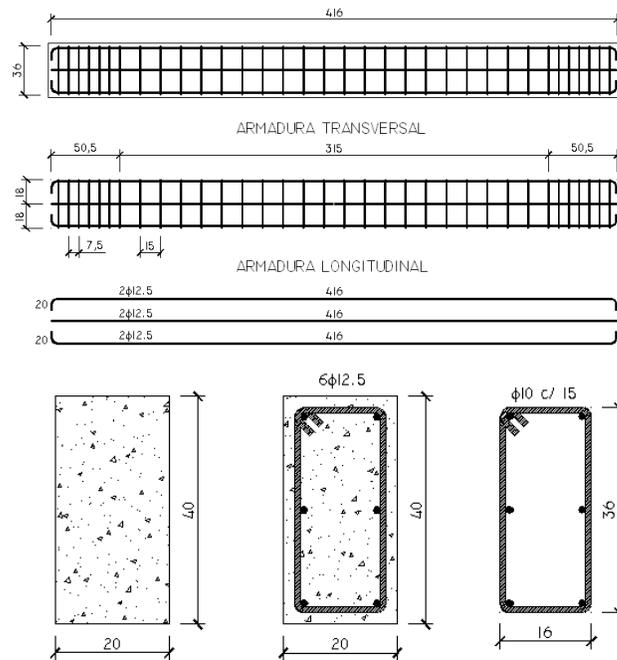


Figura 2.19 – Detalhes das armaduras das vigas ; SILVA FILHO (2007).

Foram utilizadas duas séries de reforço de vigas. A série VT era constituída de duas camadas de estribos de tecido de CFC com 15 cm de largura, espaçados a cada 30 cm, envolvendo totalmente a seção transversal da viga e com um transpasse de 10 cm para possibilitar ancoragem.

A Figura 2.20 ilustra o reforço da série VT.

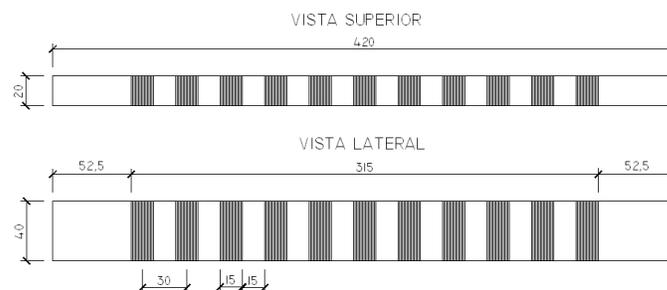


Figura 2.20 – Detalhes dos reforços da série VT; SILVA FILHO (2007).

A série VTL era constituída de reforço longitudinal nas faces laterais, com as fibras do reforço orientadas longitudinalmente, e uma camada de estribos externos de tecido de CFC com 15 cm de largura, espaçados a cada 30 cm, envolvendo totalmente a viga e com um traspasse de 10 cm para possibilitar ancoragem.

A Figura 2.21 ilustra o reforço da série VTL.

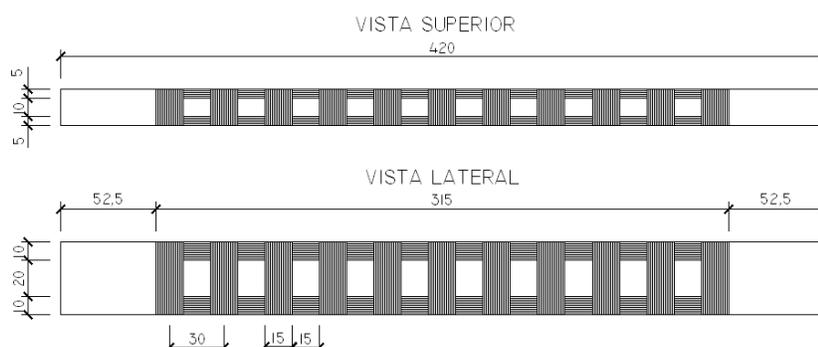


Figura 2.21 – Detalhes dos reforços da série VTL; SILVA FILHO (2007).

As vigas foram instrumentadas com extensômetros elétricos de resistência (EER) nas armaduras longitudinais e transversais, no concreto e no CFC. Para variação da sua rotação foram instalados transdutores de deslocamento. A Figura 2.22 ilustra a VT1 após o ensaio, mostrando as posições de alguns EER.



Figura 2.22 – Viga VT1 – localização da instrumentação; SILVA FILHO (2007).

Na sistemática de dimensionamento do reforço com CFC das vigas em concreto armado solicitadas à torção foi adotado o modelo da treliça espacial generalizada desenvolvido por HSU (1993) e as prescrições para dimensionamento em concreto armado, Eurocode 2, sendo a aderência obtida a partir da formulação de CHEN e TENG (2003), o ângulo das bielas de compressão a partir da expressão de APRILE e BENEDETTI (2004) e as parcelas de momentos de torção devidas aos reforços transversal e longitudinal com CFC a partir das prescrições do Bulletin 14 da FIB (2000).

O momento de torção resistido pela biela flexo-comprimida é dado por:

$$T_{u1} = 2\nu f_{cd} \frac{tA_k}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cot}\alpha)} \quad (2.9.8)$$

sendo  $\nu$  o fator de efetividade do concreto que considera o decréscimo na resistência à compressão provocado pelas fissuras; esse parâmetro tem um fator de redução de 30% para considerar o fato da biela na torção estar solicitada a flexo-compressão, daí.

$$\nu = 0,7 \left( 0,7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \geq 0,35 \quad (2.9.9)$$

onde

- $f_{cd}$  – resistência à compressão de cálculo do concreto;
- $A_k$  – área limitada pela linha média da parede efetiva;
- $t$  – espessura da parede efetiva;
- $\alpha$  – ângulo de inclinação das bielas, admitido igual ao ângulo de inclinação das fissuras e obtido a partir da expressão 2.9.1.
- $f_{ck}$  – resistência à compressão característica do concreto.

As contribuições dos estribos e armaduras longitudinais são obtidas, respectivamente, por:

$$T_{u2} = 2A_k \operatorname{cot} g \alpha \frac{A_{st} f_{ytd}}{s} \quad (2.9.10)$$

$$T_{u3} = 2A_k \operatorname{tg} \alpha \frac{A_{st} f_{yld}}{u_k} \quad (2.9.11)$$

onde

- $f_{yld}$  – tensão de escoamento do aço do estribo;
- $f_{yld}$  – tensão de escoamento do aço da armadura longitudinal;
- $A_{st}$  – área da armadura transversal;
- $A_{sl}$  – área da armadura longitudinal;
- $s$  – espaçamento da armadura transversal;
- $u_k$  – perímetro da área  $A_k$ .

A filosofia para dimensionamento do reforço adotada é definida por:

$$T_{Sd} \leq \begin{cases} T_{Rd1} \\ T_{Rd2} \end{cases} \quad (2.9.12)$$

$$T_{Rd2} = T_{Rd,RC} + T_{Rd,CFC} \quad (2.9.13)$$

onde

- $T_{Sd}$  – momento de torção solicitante de projeto;
- $T_{Rd1}$  – momento de torção resistido pela biela;
- $T_{Rd2}$  – momento de torção resistido pelo reforço de aço e CFC.
- $T_{Rd,RC}$  – momento de torção resistido pela armadura de aço;
- $T_{Rd,CFC}$  – momento de torção resistido pelo reforço de CFC.

Ressalta-se que a resistência da biela flexo-comprimida governa a condição de reforço, sendo, portanto, a parcela de momento de torção solicitante de projeto devida ao reforço de CFC  $\Delta T_{Sd}$  calculada por:

$$\Delta T_{Sd} = T_{Rd1} - T_{Rd,RC} \leq \begin{cases} T_{Rdt,CFC} \\ T_{Rdl,CFC} \end{cases} \quad (2.9.14)$$

onde

- $T_{Rdt,CFC}$  – momento de torção resistido pelo reforço transversal de CFC;

$T_{Rdl,CFC}$  – momento de torção resistido pelo reforço longitudinal de CFC.

O Bulletin 14 da FIB (2000) prescreve as contribuições dos momentos de torção devidas ao reforço do CFC longitudinal e transversal com envolvimento completo da viga, respectivamente, pelas expressões:

$$T_{Rdl,CFC} = 2bh\varepsilon_{ek,f}E_f \frac{A_{fl}}{u_k} \operatorname{tg} \alpha \quad (2.9.15)$$

$$T_{Rdt,CFC} = 2bh\varepsilon_{ek,f}E_f t_f \operatorname{cotg} \alpha \quad (2.9.16)$$

onde

$\varepsilon_{ek,f}$  – deformação específica característica efetiva do reforço em CFC;

$E_f$  – módulo de elasticidade CFC na direção das fibras do CFC;

$t_f$  – espessura do reforço de CFC;

$b$  – largura da viga.

$h$  – altura da viga.

Em caso de utiliza-se reforço em U com extremos ancorados ou estribos fechados a contribuições dos momentos de torção devidas ao reforço do CFC, segundo o Bulletin 14 da FIB (2000) é dada pela expressão:

$$T_{Rdt,CFC} = 2bh\varepsilon_{ek,f}E_f \frac{t_f b_f}{s_f} \operatorname{cotg} \alpha \quad (2.9.17)$$

onde

$b_f$  – largura do reforço de CFC;

$s_f$  – espaçamento do reforço de CFC.

Os resultados desse estudo mostraram comportamentos diferenciados entre os limites estabelecidos pelo início do carregamento e o momento de torção quando da fissuração  $T_{cr}$ , entre o  $T_{cr}$  e o momento de torção relativo ao escoamento  $T_y$ , e entre  $T_y$  e o momento de torção de ruptura  $T_u$ .

A Figura 2.23 ilustra a curva momento de torção  $T$  versus ângulo de torção por unidade de comprimento  $\theta$ , onde se observa linearidade entre os limites estabelecidos pelos momentos de torção  $T_{cr}$ ,  $T_y$  e  $T_u$ , com variação nos ângulos de torção designados, respectivamente, para cada um desses trechos como  $\theta_{cr}$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_u$ . Com relação à rigidez observou-se redução significativa após a fissuração das vigas com pequenas variações entre os momentos de torção  $T_y$  e  $T_u$ .

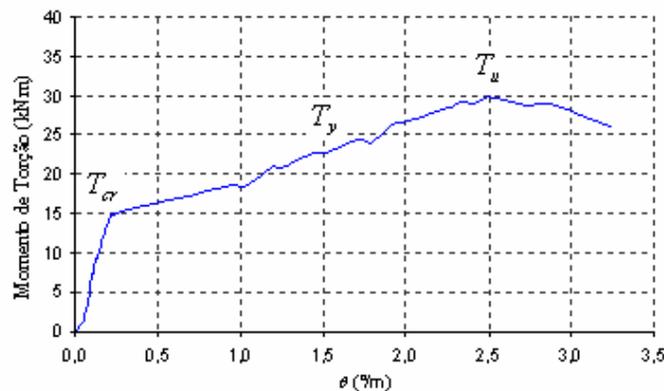


Figura 2.23 – curva  $T \times \theta$  da viga VT2; SILVA FILHO (2007).

Observou-se que independente da configuração de reforço as curvas  $T$  versus  $\theta$  de todas as vigas, inclusive a de referência, apresentaram-se semelhantes, sendo a redução de rigidez das vigas reforçadas com CFC inferior à da viga de referência.

A Tabela 2.15 ilustra os valores médios de rigezas das vigas Ref, VT e VTL.

Tabela 2.15 – Valores médios das rizezas; SILVA FILHO (2007).

Vigas	$(GJ)_{cr}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$(GJ)_y$ (kN/m <sup>2</sup> )	$(GJ)_u$ (kN/m <sup>2</sup> )
Ref.	6617,26	163,70	150,78
Série VT	4803,66	394,66	369,68
Série VTL	4069,25	367,97	267,93

As rizezas são medidas pelo produto do módulo de elasticidade transversal  $G$  e o momento de inércia à torção  $J$ . Tal como no concreto armado a fissuração provocou um decréscimo relevante na rizeza à torção da viga.

As vigas reforçadas com CFC das séries VT e VTL apresentaram, respectivamente, aumento de resistência à torção em média de 44% e 38% em relação à viga Ref.

Nas armaduras as deformações específicas foram quase nulas até o limite do momento  $T_{cr}$  e posteriormente surgiram deformações relevantes. As Figuras 2.24 e 2.25 ilustram, respectivamente, as deformações específicas das armaduras de aço e de CFC da viga VTL2. As deformações específicas pós-fissuração das armaduras de aço apresentaram comportamento aproximadamente linear e as de CFC apresentaram-se com padrão indefinido.

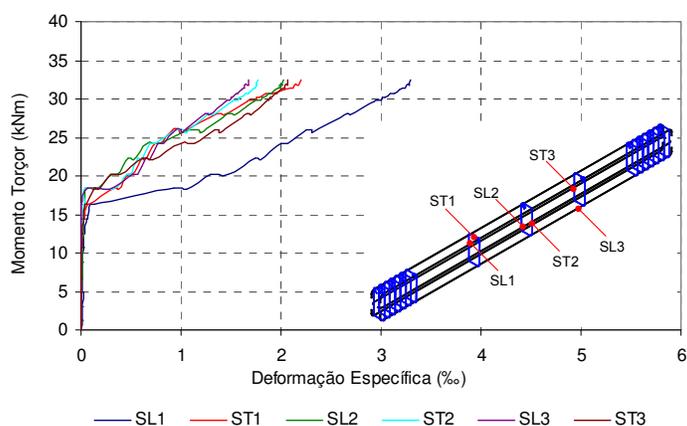


Figura 2.24 – Curva  $T_x \varepsilon$  armadura de aço da viga VTL2; SILVA FILHO (2007).

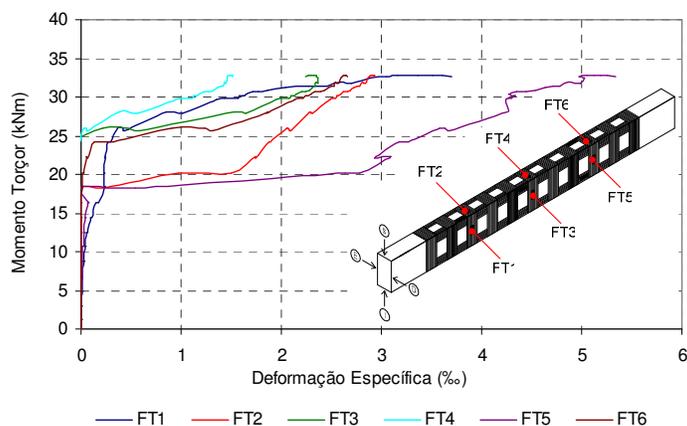


Figura 2.25 – Curva  $T_x \varepsilon$  armadura de CFC da viga VTL2; SILVA FILHO (2007).

A Tabela 2.16 mostra os valores médios das deformações específicas últimas das armaduras de aço e de CFC.

Tabela 2.16 – Valores médios de def. esp. das armaduras; SILVA FILHO (2007).

Vigas	$\varepsilon_{su}$ (‰)		$\varepsilon_{fu}$ (‰)	
	Transv.	Long.	Transv.	Long.
Ref	2,186	2,387	–	–
Série VT	2,088	2,680	3,940	–
Série VTL	2,046	2,760	4,197	3,750

Para o ângulo de inclinação da biela o autor apresentou quatro diferentes metodologias de cálculo, a saber: a)  $\alpha_\varepsilon$  a partir dos valores das deformações específicas obtidas por meio dos EER fixados à viga, círculo de Mohr; b)  $\alpha_f$  a partir da média dos ângulos das fissuras, obtidos graficamente por meio de programa de edição gráfica; c)  $\alpha_\sigma$  treliça espacial e deformações específicas medidas nos ensaios; d)  $\alpha_{Ap}$  usando a fórmula de APRILE e BENEDETTI (2004), sendo esse constante para cada grupo de viga reforçado com CFC.

A Tabela 2.17 apresenta os valores dos ângulos de inclinação da biela obtidos a partir das metodologias abordadas.

Tabela 2.17 – Ângulos de inclinação da biela; SILVA FILHO (2007).

Viga		$T_u$ (kNm)	$\alpha_\varepsilon$ (°)	$\alpha_f$ (°)	$\alpha_\sigma$ (°)	$\alpha_{Ap}$ (°)
VRef		22,4	46,1	42,6	35,7	-
VT	VT1	31,6	54,5	49,4	45,0	46,0
	VT2	29,9	56,4	48,5	43,8	46,0
	VT3	35	55,7	48,1	39,4	46,0
VTL	VTL1	28	50,6	45,9	46,5	44,0
	VTL2	32,9	49,6	46,1	38,7	44,0
	VTL3	31,7	49,2	46,7	40,5	44,0

Com os valores dos ângulos de inclinação da biela calculou-se a tensão de compressão na mesma e posteriormente o fator de efetividade do concreto.

A tensão de compressão e o fator de efetividades são calculados, respectivamente, pelas expressões:

$$\sigma_c = \frac{T}{2tA_0 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.9.18)$$

$$v = \frac{\sigma_c}{f_c} \quad (2.9.19)$$

O valor de  $f_c$  é a resistência média à compressão do concreto, pois as vigas foram ensaiadas com idade aproximada de um ano.

Os valores obtidos para os fatores de efetividade do concreto apresentaram-se inferiores aos previstos pelo Eurocode 2.

As deformações específicas no CFC calculadas com as expressões do Bulletin 14 da FIB (2000), considerando-se o acréscimo do momento torção advindo do reforço foram comparadas com as deformações específicas últimas obtidas nos ensaio das vigas.

Observou-se que os valores teóricos das deformações específicas do CFC são inferiores aos valores experimentais para as vigas do grupo VT, e que para as vigas do grupo VTL os valores teóricos apresentam-se maiores em relação aos valores experimentais.

Esse autor ressalta a necessidade de cautela com relação ao uso das expressões fornecidas pelo Bulletin 14 da FIB, visto essas serem prescritas para vigas solicitadas à força cortante.

A Tabela 2.18 ilustra os valores experimentais obtidos, assim como comparação entre esses e os resultados teóricos obtidos por meio da aplicação da segunda sistemática.

Tabela 2.18– Valores experimentais e comparação entre esse e os valores obtidos com a segunda sistemática; SILVA FILHO (2007).

Viga	Val. Exper.	$T_{Rd1}$	$T_{RdrcT}$	$T_{RdrcL}$	$\Delta Tsd_{aft}$	$\Delta Tsd_{afl}$	$T_{RdrcT} + \Delta Tsd_{aft}$	$T_{RdrcL} + \Delta Tsd_{afl}$	$T_u / T_{teó}$
	kNm	kNm	kNm	kNm	kNm	kNm	kNm	kNm	kNm
Ref	22,4	38,2	23,7	23,7	–	–	–	–	0,945
Série VT	VT1	31,6	39,2	25,4	9,9	0	35,3	44,6	0,895
	VT2	29,9							0,847
	VT3	35,0							0,992
Série VTL	VTL1	28,0	39,2	27,3	5,3	5,0	32,7	46,5	0,859
	VTL2	32,9							1,009
	VTL3	31,7							0,972

Os resultados da Tabela 2.19 mostram que os momentos de torção experimentais foram menores que os teóricos, em média. Os desvios e os coeficientes de variação comprovam a eficiência do método para o dimensionamento do reforço à torção de acordo com a segunda sistemática.

Tabela 2.19 – Parâmetros estatísticos para a razão  $\frac{T_u}{T_{teó}}$  das vigas de SILVA FILHO (2007).

Vigas	$\frac{T_u}{T_{teó}}$		
	VT	VTL	VT+VTL
Média	0,911	0,947	0,929
Desvio Padrão	0,074	0,078	0,071
Coef. de Var. (%)	8,07	8,27	7,61

## 2.10 LOPES (2007)

Esse estudo teve como objetivo avaliar a segurança de uma seção de concreto armado reforçada com CFC, solicitadas à força cortante. Foram conduzidas análises de confiabilidade onde considerou-se a aleatoriedade das variáveis aleatórias inseridas na metodologia de dimensionamento de reforço.

Anterior à análise de confiabilidade foram avaliadas metodologias existentes para o dimensionamento de reforço com o objetivo de selecionar entre elas a que melhor representa os resultados experimentais.

Os métodos e prescrições normativas analisadas sugerem que a capacidade resistente à força cortante de uma viga reforçada com CFC seja obtida a partir da soma das parcelas inerentes ao concreto, aço e reforço, sendo essa última variável de acordo com a configuração adotada.

Os resultados dos estudos mostraram maior proximidade entre os valores do método semi-empírico de CHEN e TENG (2003) e as prescrições do Bulletin 14 da FIB (2000), sendo no entanto ressaltado pela autora que os mesmos não são conclusivos devido ao reduzido número de ensaios existentes na literatura.

Para análise de confiabilidade foi utilizado o método numérico de primeira ordem *FORM – First Order Reliability Method*, sendo para tal definidas as variáveis determinísticas e as variáveis randômicas com seus respectivos modelos probabilísticos.

Foram implementadas funções de estado referentes às ruínas relativas a diagonal comprimida de concreto, tração diagonal sem reforço, tração diagonal devido a ruptura do reforço e tração diagonal devido ao descolamento do reforço.

As parcelas inerentes ao concreto armado foram definidas a partir da NBR 6118 (2003) e as inerentes ao reforço a partir das duas metodologias anteriormente citadas, sendo essas utilizadas por apresentarem menores coeficientes de variação na comparação teórico–experimental.

O estudo foi conduzido a partir de quatro análises, a saber: a) avaliação da confiabilidade de uma seção de concreto armado, sem reforço, previamente dimensionada à força cortante no E.L.U.; b) avaliação da confiabilidade de uma seção em concreto armado reforçada à força cortante com CFC; c) avaliação da confiabilidade de uma seção em concreto armada reforçada à força cortante com CFC, com taxa geométrica de reforço variável; d) dimensionamento da taxa geométrica de reforço para um índice de confiabilidade de referência.

A partir dessas análises foram obtidos os índices de confiabilidade e respectivas probabilidades de falha de cada modo de falha, os fatores de importância relativa entre as variáveis aleatórias envolvidas na análise de cada modo de falha; os índices de confiabilidade e respectivas probabilidades de falha, considerando-se o problema como um sistema em série e a variação do índice de confiabilidade com suas respectivas probabilidades de falha, em consequência da variação da taxa geométrica do reforço com CFC.

Os resultados das análises conduzidas possibilitaram concluir aspectos inerentes à segurança de seções de concreto armado solicitada à força cortante, sem reforço e com reforço de CFC:

a) seções de concreto armado sem reforço – acréscimo da probabilidade de falha em consequência da majoração da parcela de ação variável e da consideração dos fatores de modelagem de resistência e solicitação, alto valor do fator de importância relativa das variáveis aleatórias, solicitação variável e fator de modelagem de resistência, índice de confiabilidade do sistema considerado em

série igual ao modo de falha preponderante, ou menor que os valores obtidos para todos os modos de falha.

b) seções de concreto armado com reforço – valores de índice de confiabilidade abaixo do índice de referência a partir de tratamento semi-probabilístico, principalmente com a predominância de ação variável e com a inserção dos fatores de modelagem na análise, menor índice de confiabilidade para o modo de falha que considera o descolamento do compósito em relação aos demais, necessidade de maior taxa de reforço no dimensionamento probabilístico para maiores parcelas de carga variável, e valores de projetos maiores que os valores característicos de todas as variáveis, no dimensionamento baseado em confiabilidade.

### **3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

#### **3.1 NOTAS INICIAIS**

Este capítulo versa sobre os fundamentos necessários à análise de confiabilidade estrutural, realizada a partir da consideração das variáveis aleatórias e determinísticas envolvidas num projeto de estrutura e da definição de uma função de falha.

Conceituam-se as formas para a obtenção do valor necessário para o índice de confiabilidade  $\beta$  associado a uma dada função de falha, assim como os aspectos considerados relevantes à sua definição.

São abordados os métodos utilizados em análise de confiabilidade estrutural, tais como o *FORM*, o *SORM* e o método de Monte Carlo, assim como os tratamentos estatísticos dados às variáveis aleatórias envolvidas.

Conceitua-se a medida de sensibilidade e formula-se a obtenção dos fatores de importância relativa entre as variáveis aleatórias envolvidas na análise de confiabilidade.

#### **3.2 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE DE REFERÊNCIA – $\beta_a$**

A confiabilidade de uma estrutura consiste na avaliação da probabilidade de não ocorrência de falha quando a mesma estiver desempenhando os objetivos para os quais foi dimensionada.

Considerando-se que sempre haverá a possibilidade da ocorrência de falha e, portanto, a não existência de estrutura 100% confiável, pode-se definir a

confiabilidade de uma estrutura como sendo o complemento da probabilidade de falha:

$$C = 1 - p_f \quad (3.2.1)$$

onde

$C$  – confiabilidade da estrutura;

$p_f$  – probabilidade de falha.

O índice de confiabilidade de referência  $\beta_a$  pode ser definido como um valor mínimo para o índice de confiabilidade de uma estrutura, sendo esse valor associado a um valor máximo de probabilidade de falha da mesma.

A definição da probabilidade de falha alvo de uma estrutura está vinculada a fatores que ultrapassam o âmbito de atuação do engenheiro projetista. Associados à definição dessa probabilidade estão fatores sociais, econômicos, políticos e outros.

No Brasil ainda não há disposição normativa que regule o nível de confiabilidade necessária aos diversos tipos de estrutura.

O EUROCODE EN 1990 (2002) define os índices de confiabilidade de referência  $\beta_a$  a partir da definição de consequências de falha, classes de confiabilidade e período de retorno.

As classes de consequências de falha são estabelecidas em função do impacto causado pela ocorrência da mesma, ou seja, número de perdas de vidas humanas e consequências ambientais, sociais ou econômicas:

- 1) CC1 – pequeno impacto;
- 2) CC2 – moderado impacto;
- 3) CC3 – elevado impacto.

A consequência de falha é baixa para construções agrícolas, onde pouquíssimas pessoas transitam, média para residências, prédios comerciais, hotéis, escolas, pontes de residências (fazendas) e alta para teatros, prédios e pontes com utilização significativa.

Os dados da Tabela 3.1 possibilitam definir a classe de consequência de acordo com a frequência de uso e consequência de falha.

Tabela 3.1 – Classes de consequências; EUROCODE EN 1990 (2002).

Frequência de uso	Consequência de falha		
	Baixa	Média	Alta
Baixa	CC1	CC2	CC3
Média	CC2	CC2	CC3
Alta	–	CC3	CC3

As classes de consequência CC1, CC2 e CC3 associam-se, respectivamente, às classes de confiabilidade RC1, RC2 e RC3.

A Tabela 3.2 fornece índices de confiabilidade de referência obtidos em função da classe de confiabilidade e do tempo de recorrência.

Tabela 3.2 – Valores de  $\beta_r$ ; EUROCODE EN 1990 (2002).

Classes de consequências	Classes de confiabilidade	Valores para $\beta_a$	
		ELU	
		1 ano	50 anos
CC3	RC3	5,2	4,3
CC2	RC2	4,7	3,8
CC1	RC1	4,2	3,3

O EUROCODE EN 1990(2002) indica que os valores da probabilidade de falha dos projetos estruturais, nos quais foram adotados os coeficientes parciais, sejam da ordem de  $10^{-4}$ , o que significa uma única obra atingindo o E.L.U. em um tempo de recorrência de 50 anos num lote de 10.000 obras do mesmo tipo. Esse valor de probabilidade corresponde a um índice de confiabilidade  $\beta \cong 3,8$ , e tem um significado convencional e em termos práticos é utilizado como medida adequada para o dimensionamento.

### 3.3 PROBLEMA BÁSICO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

MELCHERS (2002) define o problema básico de confiabilidade estrutural a partir de uma solicitação  $S$ , consequência de um carregamento  $Q$  e uma resistência  $R$  independentes.

A partir dessa definição observa-se que o problema básico de confiabilidade envolve a resistência  $R$  e a solicitação  $S$ , sendo essas expressas a partir das suas respectivas funções de densidade de probabilidade  $f_R$  e  $f_S$ .

Considerando-se as expressões 1.1.5 e 1.1.6 a probabilidade de falha pode ser definida como a probabilidade de ocorrência de uma ação  $S$  superior a uma resistência  $R$ , conforme as expressões:

$$p_f = P(R \leq S) \quad (3.3.1)$$

$$p_f = P(R - S \leq 0) \quad (3.3.2)$$

$$p_f = P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) \quad (3.3.3)$$

Outra forma de se definir a probabilidade de violação de um estado limite é a partir função de falha  $G(R, S)$ , assim:

$$p_f = P[G(R, S) \leq 0] \quad (3.3.4)$$

onde  $G(R, S) = R - S$ .

O problema básico de confiabilidade estrutural é definido a partir de um sistema de duas variáveis  $(R, S)$ , sendo a sua função densidade de probabilidade conjunta  $f_{RS}(R, S)$  definida de forma análoga ao tratamento dado às funções de densidade de probabilidade com somente uma variável aleatória:

$$P\left(R - \frac{dR}{2} \leq R \leq R + \frac{dR}{2}, S - \frac{dS}{2} \leq S \leq S + \frac{dS}{2}\right) = f_{RS}(R, S) dR dS \quad (3.3.5)$$

A função densidade de probabilidade multivariável  $f_{RS}(R, S)$  associa cada experimento definido por  $R$  e  $S$  a uma probabilidade de ocorrência. Para que  $f_{RS}(R, S)$  seja considerada como uma FDP, ela deve satisfazer às seguintes condições:

$$f_{RS}(R, S) \geq 0, \text{ para qualquer valor de } R \text{ e } S \quad (3.3.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{RS}(R, S) dr ds = 1 \quad (3.3.7)$$

$$\int_a^b \int_c^d f_{RS}(R, S) dR dS = P(a \leq R \leq b, c \leq S \leq d) \quad (3.3.8)$$

A função distribuição cumulativa de  $f_{RS}(R, S)$  é definida por

$$F_{RS}(a, b) = P(R \leq a, S \leq b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{RS}(R, S) dR dS \quad (3.3.9)$$

A expressão 3.3.9 indica a probabilidade das variáveis  $R$  e  $S$  assumirem valores menores que  $a$  e  $b$ , respectivamente.

Sendo  $R$  e  $S$  variáveis cujas respectivas informações não afetam uma a outra, donde são variáveis estatisticamente independentes, a função densidade de probabilidade conjunta  $f_{RS}(R, S)$  pode ser escrita como:

$$f_{RS}(R, S) = f_R(R) f_S(S) \quad (3.3.10)$$

Sendo  $f_R(R)$  e  $f_S(S)$  as funções densidades de probabilidade de  $R$  e  $S$ , respectivamente, obtidas a partir dos seus respectivos dados.

A partir da função densidade de probabilidade conjunta  $f_{RS}(R, S)$  pode-se obter as funções densidade marginais das variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ :

$$f_R(R) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{RS}(R, S) dS \quad (3.3.11)$$

$$f_S(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{RS}(R, S) dR \quad (3.3.12)$$

A Figura 3.1 ilustra as funções densidade marginais  $f_R(R)$  e  $f_S(S)$  das variáveis  $R$  e  $S$ , e a função densidade de probabilidade conjunta  $f_{RS}(R, S)$  com a falha definida no domínio  $D$ .

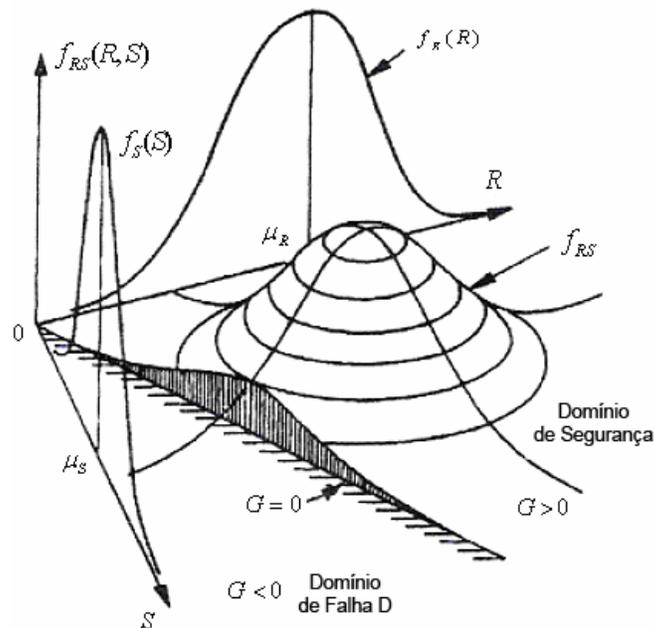


Figura 3.1 – Funções densidade marginais  $f_R(R)$  e  $f_S(S)$ , função de densidade conjunta  $f_{RS}(R, S)$  e domínio de falha  $D$ ; MELCHERS (2002).

Pode-se escrever a probabilidade de falha como (Figura 3.1):

$$p_f = P(R - S \leq 0) = \iint_D f_{RS}(R, S) dR dS \quad (3.3.13)$$

Pelo fato de  $R$  e  $S$  serem variáveis não correlacionadas ou variáveis independentes, a expressão 3.3.13 transforma-se nas expressões 3.3.14 ou 3.3.15, então:

$$p_f = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_R(R) f_S(S) dR dS \quad (3.3.14)$$

ou ainda

$$p_f = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_r^{\infty} f_R(R) f_S(S) dR dS \quad (3.3.15)$$

Considerando-se a função distribuição cumulativa FDC da variável aleatória  $R$ , que define a probabilidade da mesma assumir valores menores ou iguais a  $S$ , segue-se:

$$F_R(S) = \int_{-\infty}^S f_R(R) dR \quad (3.3.16)$$

a expressão 3.3.14 pode ser escrita como

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(S) f_S(S) dS \quad (3.3.17)$$

A integral da expressão 3.3.17 é definida como integral de convolução. Essa expressão tem como significado a soma de todos os casos onde  $R - S \leq 0$ , sendo a sua solução analítica possível para poucas distribuições.

Ressalta-se que a transformação da expressão 3.3.13 na expressão 3.3.17 só foi possível pelo fato de  $R$  e  $S$  serem não correlacionadas.

A Figura 3.2 faz uma representação esquemática do problema básico de  $R - S$  a partir de  $F_R(S)$  e  $f_S(S)$ .

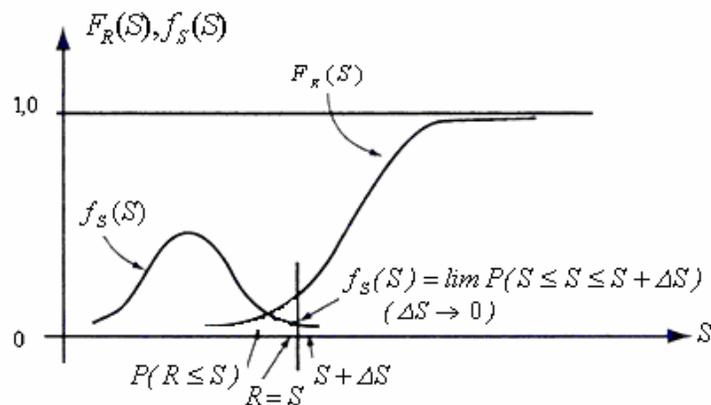


Figura 3.2 – Problema básico  $R - S$  a partir de  $F_R(S)$  e  $f_S(S)$ ; MELCHERS (2002).

A função  $F_R(S)$  é a probabilidade que a resistência real  $R$  seja menor que alguns valores de  $S$ , o que representa a falha. O termo  $f_S(S)$  representa a probabilidade de que a solitação  $S$  tenha um valor entre  $S$  e  $S + \Delta S$ , no limite com  $\Delta S \rightarrow 0$ .

O produto entre as duas funções representa a probabilidade  $h(S)$  da ocorrência simultânea de dois eventos.

$$h(S) = F_R(S) f_S(S) \quad (3.3.18)$$

Da mesma forma que foram utilizadas a distribuição cumulativa da variável  $R$  na expressão 3.3.14, transformando-a na expressão 3.3.17, pode-se também escrever a expressão 3.3.15 utilizando-se a distribuição cumulativa da variável aleatória  $S$  transformando-a na expressão 3.3.19, tendo essa como significado a soma de todos os casos onde  $S > R$ , então:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(R)] f_R(R) dR \quad (3.3.19)$$

A resolução da expressão 3.3.17, por integração, tem se restringido a problemas com cinco ou seis variáveis no máximo, por isso outros métodos para avaliar a probabilidade de falha  $p_f$  são desenvolvidos.

### 3.4 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$

O problema básico de confiabilidade estrutural quando  $R$  e  $S$  são variáveis aleatórias normais (gaussiana) e independentes, com média  $\mu_R$  e  $\mu_S$  e variância  $\sigma_R^2$  e  $\sigma_S^2$ , é resolvido a partir da definição da margem de segurança representada por uma variável normal  $Z$ , obtida a partir da expressão:

$$Z = R - S \quad (3.4.1)$$

Sendo  $Z$  uma variável normal de valor esperado (média)  $E(Z)$  e variância  $E[(Z - \mu_Z)^2]$ , obtida a partir de  $R$  e  $S$ , sendo, portanto, válidas as propriedades aditivas das variáveis aleatórias normais e independentes.

Define-se média por:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Zf(R, S) dR dS \quad (3.4.2)$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (R - S) f(R, S) dR dS \quad (3.4.3)$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (R) f(R, S) dR - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (S) f(R, S) dS \quad (3.4.4)$$

$$E(Z) = E(R) - E(S) \quad (3.4.5)$$

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (3.4.6)$$

Define-se variância por:

$$E[(Z - \mu_Z)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((R - S) - (\mu_R - \mu_S))^2 f(R, S) dR dS \quad (3.4.7)$$

$$E[(Z - \mu_Z)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((R - S - \mu_R + \mu_S))^2 f(R, S) dR dS \quad (3.4.8)$$

$$E[(Z - \mu_Z)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((R - \mu_R) - (S - \mu_S))^2 f(R, S) dR dS \quad (3.4.9)$$

$$E[(Z - \mu_Z)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((\Delta_R) - (\Delta_S))^2 f(R, S) dR dS \quad (3.4.10)$$

$$E[(Z - \mu_Z)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_R)^2 f(R, S) dR dS + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_S)^2 f(R, S) dR dS - \quad (3.4.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2\Delta_R \Delta_S f(R, S) dR dS$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 - \sigma_S^2 \quad (3.4.12)$$

Uma vez que a última parcela à direita de 3.4.11 é nula, visto essa representar a covariância entre as variáveis  $R$  e  $S$  que são consideradas independentes, a expressão 3.4.12 define a variância de  $Z$ .

As expressões 3.4.6 e 3.4.12 são particulares para o caso de  $S$  ser constituído por um único carregamento ou por uma combinação de carregamentos com distribuição normal, constituindo-se assim um caso particular de somente duas variáveis.

A Figura 3.3 ilustra a função densidade de probabilidade da margem de segurança, onde se encontram representados a probabilidade de falha  $p_f$  e o índice de confiabilidade  $\beta$  para esse problema. Observa-se que um deslocamento para a direita do gráfico por meio de  $\beta\sigma_z$  acarreta um decréscimo da área hachurada, o que significa um decréscimo da  $p_f$ . Esse fato ilustra a relação existente entre esses dois índices.

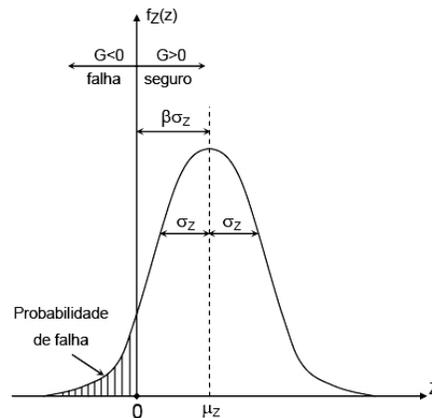


Figura 3.3 – Distribuição da margem de segurança; MELCHERS (2002).

O produto  $\beta\sigma_z$  mede a distância entre o valor médio de  $\mu_z$  e o ponto  $Z = 0$ , ponto esse que marca o limite falha-segurança, pois:

$$\mu_z - \beta\sigma_z = 0 \quad (3.4.13)$$

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \quad (3.4.14)$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \quad (3.4.15)$$

A Figura 3.4 mostra a curva de probabilidade de falha  $p_f$ . Essa curva encontra-se associada à região de sobreposição das curvas de FDP marginais de  $S$  e  $R$ .

A variação das médias e ou das dispersões de  $S$  e  $R$  acarretam variação da superposição das suas curvas de FDP marginais, causando consequentemente variação da probabilidade de falha  $p_f$ .

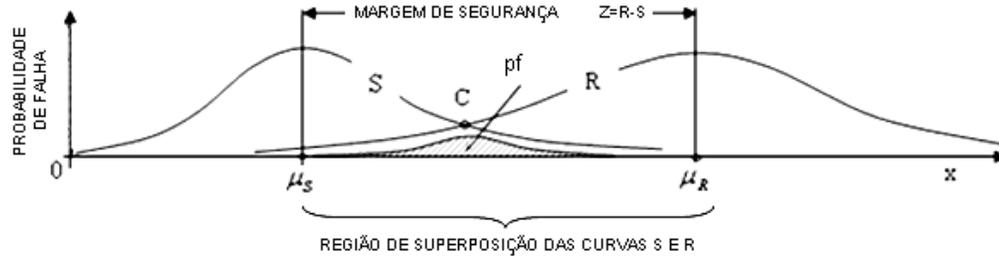


Figura 3.4 – Curva de probabilidade de falha; AOKI (2005).

É possível demonstrar que uma função linear de variáveis normais é uma variável normal, logo a função de distribuição de  $Z$  tem a seguinte forma, onde  $\mu_z$  é a média e  $\sigma_z$  é o desvio padrão.

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_z}{\sigma_z}\right)^2\right] \quad (3.4.16)$$

Introduzindo-se uma variável auxiliar, denominada variável reduzida, tem-se:

$$y = \frac{Z - \mu_z}{\sigma_z} \quad (3.4.17)$$

A partir da substituição da variável reduzida na expressão 3.4.16 obtém-se a função densidade normal padrão de probabilidade, cuja média e desvio padrão são, respectivamente, 0 e 1:

$$f_y(y) = \phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y^2\right] \quad (3.4.18)$$

A função distribuição cumulativa normal padrão  $\Phi(y)$  é calculada por:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y f_y(y) dy \quad (3.4.19)$$

assim

$$p_f = P[R - S \leq 0] = P[Z \leq 0] = \Phi(y) = \int_{-\infty}^y f_y(y) dy \quad (3.4.20)$$

No ponto que marca a passagem do domínio de segurança para domínio de falha  $Z = 0$  resulta:

$$y = \frac{0 - \mu_z}{\sigma_z} = \frac{-\mu_z}{\sigma_z} = -\beta \quad (3.4.21)$$

Sendo possível escrever a probabilidade de falha do seguinte modo:

$$p_f = \int_{-\infty}^{-\beta} f_y(y) dy = \Phi(-\beta) \quad (3.4.22)$$

Conclui-se que se no problema de avaliação de confiabilidade estrutural houver somente duas variáveis normais não correlacionadas  $R$  e  $S$ , a expressão de falha é definida pela margem de segurança  $Z = R - S$ , sendo os valores do índice de confiabilidade  $\beta$  e da probabilidade de falha  $p_f$  obtidos, respectivamente, por meio das expressões 3.4.14 e 3.4.22.

A Figura 3.5 ilustra a função de distribuição cumulativa *padrão*  $\Phi(y)$ .

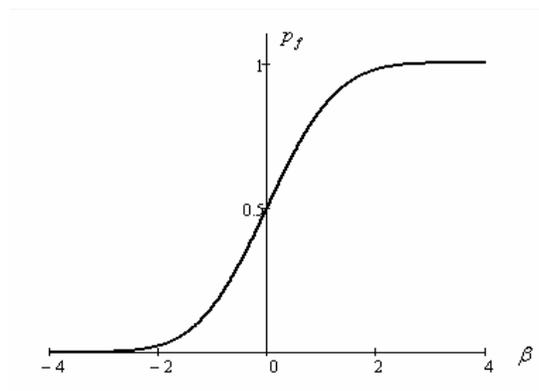


Figura 3.5 – Curva  $\beta$  versus  $p_f$  obtida a partir de  $\Phi(y)$ .

A Tabela 3.3 fornece os valores que mostra a relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha.

Tabela 3.3 – Relação entre  $\beta$  e  $p_f$ .

$\beta$	$p_f$
0,00	$0,500 \times 10^0$
0,50	$0,309 \times 10^0$
1,00	$0,159 \times 10^0$
1,50	$0,668 \times 10^{-1}$
2,00	$0,228 \times 10^{-1}$
2,50	$0,621 \times 10^{-2}$
3,00	$0,135 \times 10^{-2}$
3,50	$0,233 \times 10^{-3}$
4,00	$0,317 \times 10^{-4}$

A Figura 3.6 mostra o problema básico de confiabilidade no espaço reduzido representado a partir de uma função de falha linear. O ponto sobre a função de falha  $G(r,s)=0$  mais próximo à origem no espaço reduzido é definido como ponto de projeto  $y^*$ , e a sua distância a essa mesma origem é o valor do índice de confiabilidade  $\beta$  do modo de falha considerado.

Esse constitui o fundamento do método *FORM*.

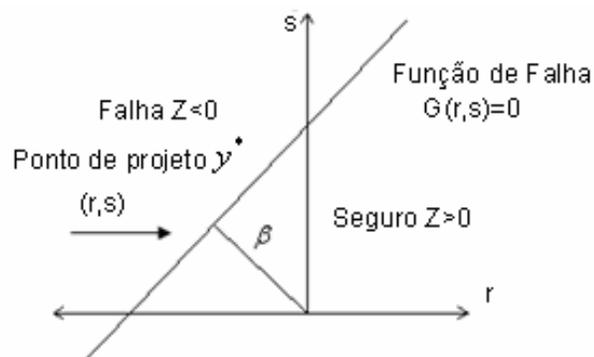


Figura 3.6 – Problema básico de confiabilidade no espaço reduzido  $r, s$ .

A função de falha  $G(r,s) = 0$  corresponde à função de falha do problema básico  $G(R,S) = 0$  no espaço original, sendo essa obtida a partir das variáveis normais reduzidas  $r$  e  $s$  calculadas por meio das expressões a seguir.

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (3.4.23)$$

$$s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (3.4.24)$$

Ressalta-se que um decréscimo no valor de  $\beta$  configura uma aproximação da função de falha da origem. Isso acarreta um acréscimo na região de falha, daí um acréscimo na probabilidade de falha  $p_f$ .

A expressão 3.4.15, baseada nos dois primeiros momentos estatísticos, não considera com precisão problemas de confiabilidade estrutural onde a função de falha é normalmente uma função não linear das variáveis aleatórias que podem ser correlacionadas ou não e/ou função de densidade de probabilidade não normal.

Na maioria das vezes num problema de avaliação de confiabilidade encontram-se envolvidas  $n$  variáveis aleatórias. Sendo  $X$  um vetor constituído pelas  $n$  variáveis básicas e  $G(X) = 0$  a função que define a interface falha-segurança (função de falha), então:

$$Z = G(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (3.4.25)$$

## 3.5 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

### 3.5.1 Variável Aleatória Não Normal

A maioria das variáveis envolvidas numa análise de confiabilidade não é normal, sendo, portanto, necessário transformá-las em variáveis normais equivalentes.

Sendo  $X$  uma variável aleatória de distribuição qualquer pode-se obter uma distribuição normal equivalente num ponto  $x^*$  igualando-se a função densidade de probabilidade FDP e a de distribuição cumulativa FDC dessa variável, respectivamente, à função densidade de probabilidade normal padrão  $\phi$  e à função de distribuição cumulativa normal padrão  $\Phi$  no ponto considerado. Assim, o Princípio da Normal Equivalente é definido pelas expressões:

$$f_x(x^*) = \frac{1}{\sigma_x^N} \phi\left(\frac{x^* - \mu_x^N}{\sigma_x^N}\right) \quad (3.5.1)$$

$$F_x(x^*) = \Phi\left(\frac{x^* - \mu_x^N}{\sigma_x^N}\right) \quad (3.5.2)$$

onde

$\phi(\cdot)$  – função densidade de probabilidade normal padrão;

$\Phi(\cdot)$  – função de distribuição cumulativa normal padrão;

$f_x$  – função densidade de probabilidade da variável aleatória de distribuição qualquer;

$F_x$  – função de distribuição cumulativa da variável aleatória de distribuição qualquer;

$\mu_x^N$  – média da normal equivalente no ponto  $x^*$ ;

$\sigma_x^N$  – desvio padrão da normal equivalente no ponto  $x^*$ .

O significado prático da função distribuição equivalente é a obtenção da média  $\mu_x^N$  e do desvio padrão  $\sigma_x^N$  da variável aleatória normal equivalente no ponto  $x^*$ .

A solução do sistema constituído pelas expressões 3.5.1 e 3.5.2 fornece as expressões para cálculo do desvio padrão e da média da variável aleatória normal equivalente no ponto  $x^*$ :

$$\sigma_x^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\}}{f_X(x^*)} \quad (3.5.3)$$

$$\mu_x^N = x^* - \sigma_x^N \Phi^{-1}[F_X(x^*)] \quad (3.5.4)$$

onde  $\Phi^{-1}$  é a inversa da função de distribuição cumulativa normal FDC.

A Figura 3.7 ilustra o Princípio da Normal Equivalente.

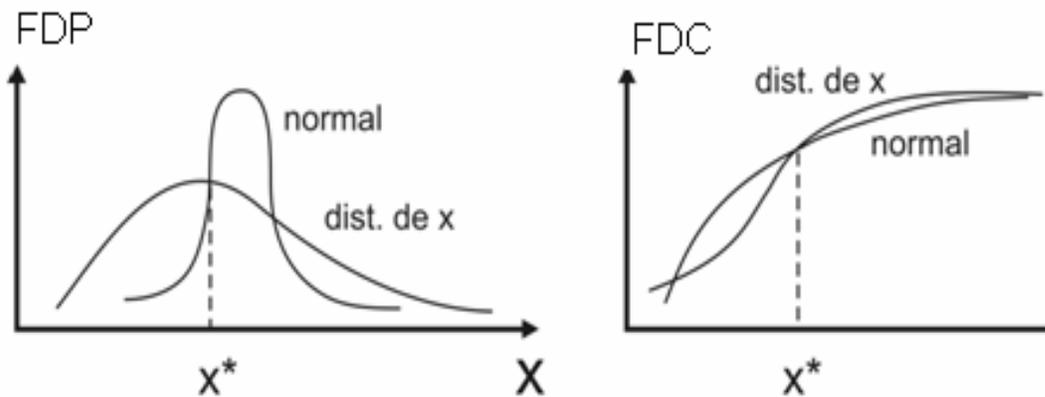


Figura 3.7 – Princípio da Normal Equivalente; SAGRILLO (2004).

A partir das expressões 3.5.3 e 3.5.4 observa-se a necessidade de se resolver  $\Phi^{-1}[F_X(x^*)]$  e  $\phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\}$ . Essas soluções podem ser obtidas, respectivamente, em tabelas de função de distribuição cumulativa normal padrão e função de densidade de probabilidade normal padrão, como as existentes em HART (1982).

Ressalta-se a possibilidade da solução de  $\phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\}$  a partir da expressão da função de densidade probabilidade normal padrão, daí:

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \quad (3.5.5)$$

### 3.5.2 Variáveis Aleatórias Correlacionadas

As variáveis aleatórias cujos valores são dependentes do valor de outra variável aleatória são consideradas correlacionadas.

O valor do coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias situa-se no intervalo  $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ . Os valores existentes nesse intervalo possibilitam a classificação do grau de dependência entre as variáveis analisadas. A Tabela 3.4 mostra os valores para o grau de dependência entre as variáveis.

Tabela 3.4 – Grau de dependência entre variáveis; MELCHERS (2002).

Intervalo de $\rho_{ij}$	Grau de dependência
0,0 a 0,3	Baixo
0,3 a 0,5	Médio
0,5 a 0,7	Importante
0,7 a 0,9	Forte
0,9 a 1	Muito forte

A Figura 3.8 representa os coeficientes de correlação entre duas variáveis -  $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ .

Os valores -1 e 1 para o coeficiente de correlação representam, respectivamente, variáveis inversamente correlacionadas e variáveis diretamente correlacionadas.

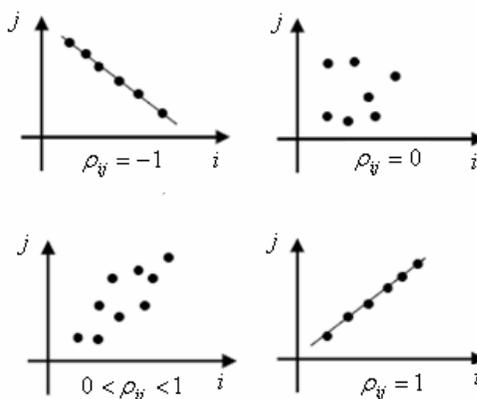


Figura 3.8 – Coeficiente de correlação  $\rho_{ij}$  entre variáveis; MELCHERS (2002).

Havendo variáveis aleatórias correlacionadas envolvidas na análise de confiabilidade existirá a necessidade de uma transformação para torná-las não correlacionadas.

A transformação de Nataf é uma metodologia de transformação de variáveis normais correlacionadas ou não em variáveis normais reduzidas estatisticamente independentes, sendo que para tal bastam a função de densidade de probabilidade marginais das variáveis aleatórias e o coeficiente de correlação equivalente entre elas. A função de densidade de probabilidade conjunta não é necessária para esse cálculo.

Considerando-se a existência de variáveis aleatórias não normais correlacionadas faz-se necessário a aplicação do Princípio da Normal Equivalente, para posterior aplicação da transformação de Nataf.

O Princípio da Normal Equivalente, realizada com as distribuições marginais das variáveis, não considera os casos de variáveis correlacionadas, sendo necessário fazer a correção dos coeficiente de correlação entre as variáveis no espaço original para coeficiente de correlação normal equivalente no momento da transformação de Nataf. Essa correção efetua-se de acordo com as expressões:

$$\rho_{ij}^E = F\rho_{ij} \quad (3.5.6)$$

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(x_i, x_j)}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} \quad (3.5.7)$$

onde

$\rho_{ij}$  – coeficiente de correlação das variáveis aleatórias;

$F$  – valor que depende dos coeficientes de correlação  $\rho_{ij}$  e dos coeficientes de variação das variáveis aleatórias envolvidas  $\delta_i$  e  $\delta_j$ .

$Cov$  – covariância entre as variáveis  $x_i$  e  $x_j$ , que torna-se nula quando as variáveis são independentes.

Vários autores estimaram valores de  $F$  para correção dos coeficientes de correlação entre as variáveis aleatórias correlacionadas conforme a expressão

3.5.6. A Tabela 3.5 mostra os fatores para essa correção quando uma das variáveis envolvidas for normal.

Tabela 3.5 – Fator  $F$  para correção dos coeficientes de correlação; HALDAR, e MAHADEVAN (2000).

FDP de $X_i$	FDP de $X_j$	F
Normal	Normal	1
Normal	Uniforme	1,023
Normal	Exponencial	1,107
Normal	Rayleigh	1,014
Normal	Tipo I (máx)	1,031
Normal	Tipo I (mín)	1,031
Normal	Lognormal	$\delta x_j / \sqrt{\ln(1 + \delta x_j^2)}$
Normal	Gamma	$1,001 - 0,007\delta x_j + 0,118\delta x_j^2$
Normal	Tipo II (máx)	$1,030 + 0,238\delta x_j + 0,364\delta x_j^2$
Normal	Tipo II (mín)	$1,031 - 0,195\delta x_j + 0,328\delta x_j^2$

A transformação de Nataf, obtenção de um vetor  $Y$  constituído por variáveis normais  $y_i$  padrões estatisticamente independentes a partir de um vetor  $X$  no espaço original constituído por variáveis normais correlacionadas ou não  $X_i$ , é obtida a partir das expressões:

$$Y = \Gamma \sigma^{-1}(X - m) \quad (3.5.8)$$

$$\Gamma = L^{-1} \quad (3.5.9)$$

onde

$\sigma$  – matriz diagonal contendo os desvios padrões  $\sigma_x$  das variáveis aleatórias normais e normais equivalentes do vetor  $X$  (desvios padrões equivalentes caso a variável seja representada por uma distribuição qualquer);

- $m$  – vetor das médias  $\mu_X$  das variáveis aleatórias normais e normais equivalentes do vetor  $X$  (médias equivalentes caso a variável seja representada por uma distribuição qualquer);
- $L$  – é a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes  $\rho_{ij}$  de correlação das variáveis de  $X$ .

Considerando-se um experimento no qual estejam envolvidas  $n$  variáveis aleatórias pode-se obter a matriz dos coeficientes de correlação entre elas:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{X_1, X_1} & \rho_{X_1, X_2} & \cdots & \rho_{X_1, X_n} \\ \rho_{X_2, X_1} & \rho_{X_2, X_2} & \cdots & \rho_{X_2, X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{X_n, X_1} & \rho_{X_n, X_2} & \cdots & \rho_{X_n, X_n} \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

Os coeficientes de correlação são dados por:

$$\rho_{X_i, X_j} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}, i = 1 \cdots n; j = 1 \cdots n \quad (3.5.11)$$

Para variáveis correlacionadas quaisquer deve-se adotar a expressão 3.5.6 para correção do coeficiente de correlação, sendo o fator  $F$  obtido na Tabela 3.5.

Definindo

$$\Gamma \sigma^{-1} = J = \frac{\partial Y}{\partial X} \quad (3.5.12)$$

onde  $J$  representa o Jacobiano da transformação, a expressão 3.5.8 pode ser escrita do seguinte modo:

$$Y = J(X - m) \quad (3.5.13)$$

### 3.6 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA

Na maioria dos casos em análise de confiabilidade apresentam-se diversas variáveis dependentes e não normais, tornando a solução das integrais de convolução, definidas pelas expressões 3.3.17 e 3.3.19, muito complexa e de difícil resolução.

A expressão geral para cálculo de probabilidade de falha é:

$$p_f = \int_{G(X) < 0} f(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n \quad (3.6.1)$$

Devido ao exposto foram desenvolvidos métodos com o objetivo de resolver essa integral, entre os quais pode-se citar:

- métodos de integração numérica;
- métodos analíticos *FORM* e *SORM*;
- simulação ou método de Monte Carlo.

#### 3.6.1 *FORM – First Order Reliability Method*

A idéia original do *FORM* se baseou no significado geométrico, no espaço reduzido, do índice de confiabilidade  $\beta$  do problema básico com variáveis normais independentes como indicado no item 3.4 e na Figura 3.6.

A avaliação aproximada da integral da expressão 3.6.1 pelo método *FORM* é possível quando a função de estado limite é uma função linear constituída de variáveis aleatórias normais, não correlacionadas.

Sendo a função de estado limite não linear, essa é substituída por uma aproximação de primeira ordem (série de Taylor) com variáveis normais equivalentes não correlacionadas.

O método possibilita o cálculo da probabilidade de falha a partir da transformação das variáveis aleatórias  $X$  (espaço original), podendo essas serem de distribuições quaisquer e dependentes entre si ou não, em variáveis

equivalentes  $y$  normais padrões e estatisticamente independentes (espaço reduzido).

Após a transformação do espaço original para o espaço reduzido escreve-se a função de estado em função dessas novas variáveis (reduzidas). Então  $G(y) = 0$ .

Na Figura 3.9 observa-se a transformação do espaço original para o espaço reduzido equivalente, onde o índice de confiabilidade  $\beta$  é a menor distância entre a origem e a superfície de falha  $G(y) = 0$  definida no espaço reduzido, correspondente à superfície de falha  $G(X) = 0$  definida no espaço original.

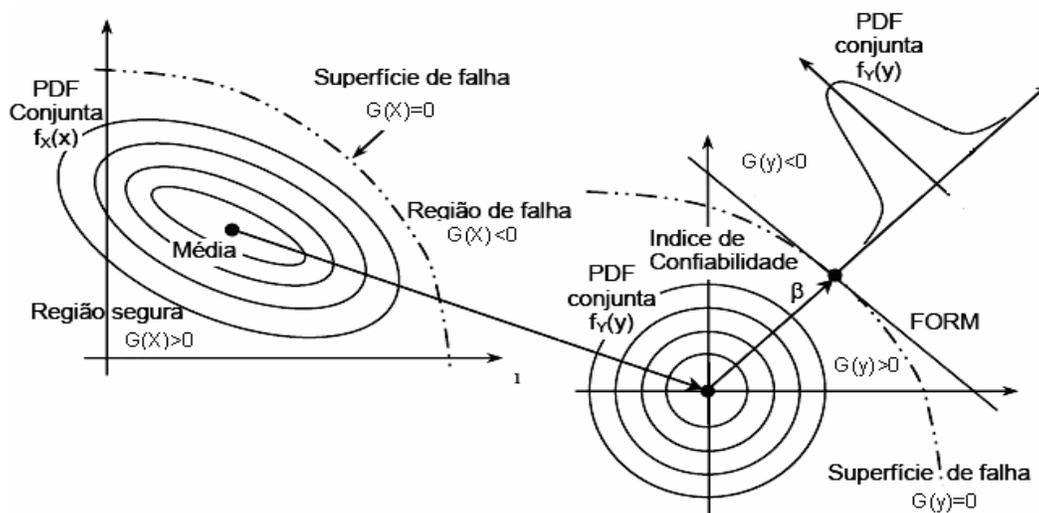


Figura 3.9 – Transformação espaço original para o espaço reduzido; CHOI e Youn (2001) *apud* LOPES (2007).

Na maioria das vezes as funções de falha, ou funções de estado limite não são lineares e as variáveis não são normais, passando a pesquisa do ponto de projeto  $y^*$  sobre a superfície de falha a constituir um dos principais desafios do método *FORM*. A Figura 3.10 ilustra a aproximação efetuada no método *FORM* para duas superfícies de falha, sendo uma côncava e uma convexa, e o índice de confiabilidade  $\beta$ .

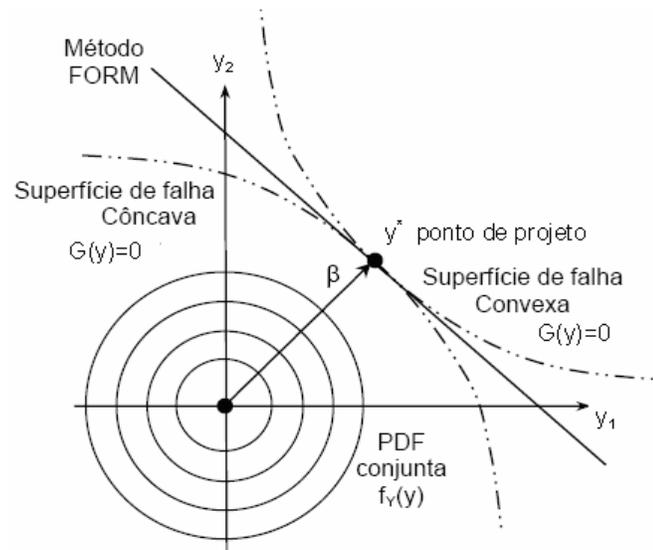


Figura 3.10 – Aproximação do método *FORM*: índice de confiabilidade  $\beta$  e superfícies côncava e convexa; CHOI e Youn (2001) *apud* LOPES (2007).

Na Figura 3.10 observa-se que para as duas superfícies de falha  $G(y) = 0$ , a côncava e a convexa, o índice de confiabilidade  $\beta$  é o mesmo, sendo mesma a distância do ponto de projeto  $y^*$  à origem do espaço reduzido. No entanto, devido a curvatura da função de falha não linear, as suas probabilidades de falha  $p_f$  são diferentes. Essa observação permite concluir que: dependendo da forma da função de falha no espaço reduzido o método *FORM*, por se tratar de uma aproximação por uma superfície linear tangente em  $y^*$ , pode ser a favor ou contra a segurança.

Uma vez calculado o índice de confiabilidade, a probabilidade de falha aproximada pode ser calculada de acordo com a expressão 3.4.22

A busca desse ponto pode ser representada por um problema de otimização (ou programação não linear) com uma restrição, tal que:

$$\begin{aligned}
 P: & \text{Minimiza } |y| \\
 & \text{sujeito a } G(y) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.6.2}$$

Trata-se de um método iterativo, onde a cada iteração a superfície de falha é aproximada por uma superfície linear tangente ao ponto de pesquisa.

O ponto  $y^*$  com a menor distância entre a superfície de falha  $G(y) = 0$  e a origem, é denominado ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas  $y$ . A distância entre esse ponto  $y^*$  e a origem no sistema de coordenadas reduzidas representa o índice de confiabilidade  $\beta$ , sendo essa consideração válida apenas no espaço das variáveis normais reduzidas não correlacionadas, assim:

$$\beta = \|y^*\| \quad (3.6.3)$$

HASOFER e LIND (1974) e RACKWITZ e FIESSLER (1978) *apud* SAGRILLO (2004) apresentaram algoritmos para solução do problema de otimização. Esse algoritmo foi desenvolvido em 1974 e posteriormente aprimorado em 1978, passando a ser comumente identificado como algoritmo HLRF.

A Figura 3.11 representa a busca do ponto de projeto  $y^*$  para um problema com duas variáveis aleatórias no espaço reduzido.

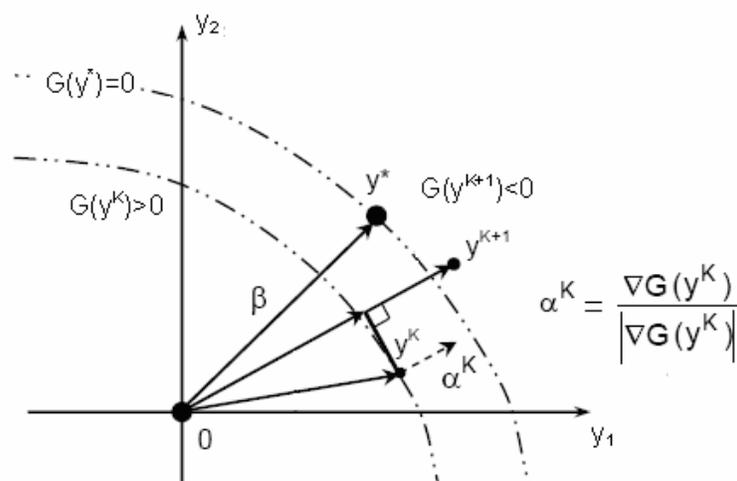


Figura 3.11 – Busca do ponto de projeto  $y^*$ ; LOPES (2007).

O algoritmo HLRF é definido pela expressão que avalia o ponto  $y^{k+1}$  em função do ponto  $y^k$ :

$$y^{k+1} = \alpha(y^k) \frac{G(y^k) - \nabla_y G(y^k) y^k}{\|\nabla_y G(y^k)\|} \quad (3.6.4)$$

sendo

$$\alpha(y^k) = - \frac{\nabla_y G(y^k)}{\|\nabla_y G(y^k)\|} \quad (3.6.5)$$

$$G(y) = G(X) \quad (3.6.6)$$

$$\nabla_y G(y) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla_x G(X) \quad (3.6.7)$$

onde

$\alpha(y^k)$  – vetor unitário normal ao plano tangente à superfície  $G(y)$  no ponto  $y^k$ ;

$G(y)$ ,  $G(X)$  – funções de falha no espaço reduzido e espaço original, respectivamente;

$\nabla_y G(y)$ ,  $\nabla_x G(X)$  – gradientes da função de falha no espaço reduzido e original, respectivamente, avaliados em  $y$  e  $X$ .

O ponto correspondente a  $y^{k+1}$  no espaço original é dado pela expressão:

$$x^{k+1} = x^k + (\mathbf{J}^{-1})^T (y^{k+1} - y^k) \quad (3.6.8)$$

O processo iterativo é repetido até a convergência do  $y^{k+1}$  para  $y^*$ , sendo o critério de convergência definido a partir da expressão:

$$\frac{\|y^* - y^{k+1}\|}{\|y^*\|} \leq \text{tolerância} \quad (3.6.9)$$

Uma vez calculado o índice de confiabilidade a probabilidade de falha aproximada pode ser calculada de acordo com a expressão 3.4.22.

### 3.6.2 *SORM – Second Order Reliability Method*

Conforme observado anteriormente no *FORM* a curvatura da função de falha não linear é desprezada, visto nesse método ser somente usada a aproximação de primeira ordem. O *SORM* torna mais preciso o resultado obtido no *FORM* a partir de informações a respeito da curvatura da função de falha. Nesse método é realizada uma aproximação por uma superfície quadrática no ponto de projeto  $y^*$ . O cálculo da probabilidade de falha a partir do *SORM* faz-se por meio da expressão:

$$p_{f2} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^2 \quad (3.6.10)$$

onde

- $k_i$  – curvaturas principais da função de falha no ponto de projeto  $y^*$ ;
- $n$  – número de variáveis aleatórias envolvidas na análise;
- $\beta$  – índice de confiabilidade obtido por meio do *FORM*.

O algoritmo HRLF pode ser utilizado tanto para o *FORM* quanto para o *SORM*, diferenciando-se apenas a partir do cálculo do ponto de projeto  $y^*$ , quando a probabilidade de falha é obtida pela expressão 3.6.10 e não pela expressão 3.4.22.

A aplicação do *FORM* ou *SORM* pressupõe a utilização de variáveis normais reduzidas não correlacionadas, sendo, portanto, no caso de existir variáveis quaisquer correlacionadas ou não correlacionadas, necessário aplicar a teoria abordada nos itens 3.5.1 e 3.5.2.

### 3.6.3 MÉTODO DE MONTE CARLO

A técnica de simulação de Monte Carlo possibilita o cálculo da probabilidade de falha a partir da definição de uma função de estado limite e uma amostra dos possíveis valores que caracterizam a violação do estado limite analisado.

Vários valores das variáveis aleatórias envolvidas na análise são gerados a partir das suas respectivas médias, desvios padrões e função densidade de probabilidade. O experimento é simulado artificialmente por meio de soluções determinísticas do problema, utilizando-se em cada ciclo de simulação um conjunto das variáveis geradas.

Os resultados dos experimentos obtidos pela simulação ou método de Monte Carlo são tratados estatisticamente, visto que esses são semelhantes às amostras obtidas experimentalmente.

Seja a função de estado limite definida pela expressão 3.4.25, onde todas as variáveis  $X_i$  são estatisticamente independentes. A simulação de Monte Carlo consiste na solução da mesma, sendo usado como valores de  $X_i$  os valores das variáveis aleatórias geradas a partir de suas médias, desvios padrões e função de densidade de probabilidade.

Os valores menores que zero obtidos na solução determinística da equação de estado limite caracterizam a falha, sendo a estimativa de probabilidade de falha definida pela expressão:

$$p_f = \frac{N_f}{N} \quad (3.6.11)$$

onde

$N_f$  – número de ciclos de simulação com valores negativos para a expressão de estado limite;

$N$  – total de ciclos de simulações.

A maior ou menor precisão da probabilidade de falha obtida com a expressão 3.6.11 é uma consequência do número de ciclos de simulação.

O valor da probabilidade de falha  $p_f$  aproxima-se do valor real quando  $N$  tende para o infinito. SHOOMAN (1968) *apud* HALDAR, A; MAHADEVAN, S (2000) apresenta a expressão para a margem de erro na aplicação da expressão 3.6.11 associada a uma probabilidade de falha real e aos ciclos de simulação:

$$\varepsilon\% = \sqrt{\frac{1 - p_f^T}{N p_f^T}} \cdot 200\% \quad (3.6.12)$$

onde

$\varepsilon\%$  – margem de erro;

$p_f^T$  – probabilidade de falha real.

Em caso de todas ou algumas das variáveis envolvidas na análise serem correlacionadas existe a necessidade de convertê-las em variáveis independentes e obter a função de falha em função das variáveis não correlacionadas.

### 3.7 COMPONENTES E SISTEMAS

Na análise de confiabilidade os termos componentes e sistema podem ter significados diferentes quando utilizados em análise estrutural.

Os termos definem na análise estrutural uma hierarquia de complexidade na qual os componentes são os membros que formam a estrutura e o sistema, a estrutura propriamente dita.

KARAMCHANDANI (1990) *apud* SAGRILO (1994) define um evento como componente se sua superfície de falha  $G(y) = 0$  é suave e tem somente um ponto de máxima densidade local de probabilidade  $p_f$  no domínio de falha. A Figura 3.12 ilustra os casos em análises de confiabilidade tratados como componentes.

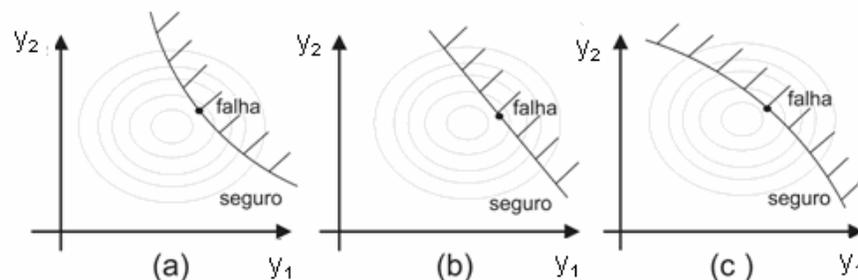


Figura 3.12 – Componentes na análise de confiabilidade; SAGRILO (1994).

Na teoria de confiabilidade o termo sistema se aplica quando a falha de um elemento puder ocorrer devido a mais de uma função de falha ou quando uma

única superfície de falha  $G(y) = 0$  não for suave ou apresentar mais de uma máxima densidade de probabilidade. A Figura 3.13 ilustra os sistemas assim definidos.

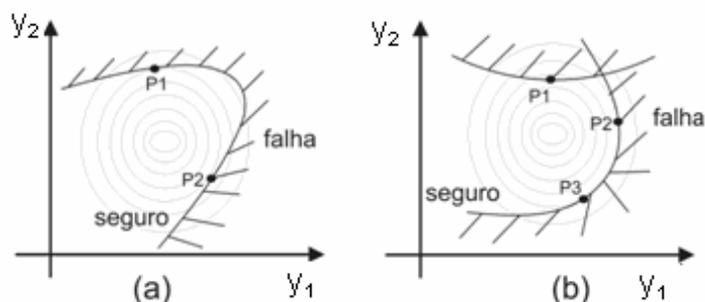


Figura 3.13 – Sistemas com mais de um ponto de máxima densidade local de probabilidade; SAGRILLO (1994).

Os sistemas podem ser classificados em série ou em paralelo. Quando a falha de um dos componentes do sistema provoca a ruptura do mesmo, esse é classificado como sistema em série; no sistema em paralelo a ruptura do mesmo ocorre a partir da falha de todos os componentes.

Como exemplo pode-se citar o componente estrutural pilar, que pode atingir o estado limite por plastificação, flambagem ou tensões elevadas, sendo o evento de falha do sistema representado pela união das probabilidades individuais, daí ser classificado como sistema em série.

A Figura 3.14 ilustra um sistema em série e um sistema em paralelo.

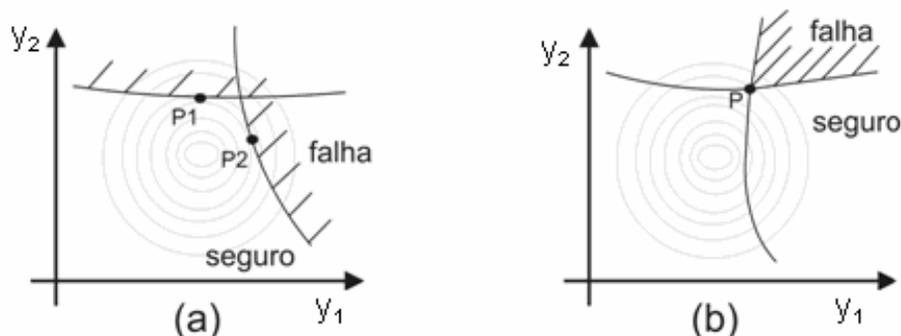


Figura 3.14 – Sistemas em série (a) e em paralelo (b) na análise de confiabilidade; SAGRILLO (1994).

A região de falha do sistema em série representa a união das regiões de falha dos componentes, e a região de falha do sistema em paralelo representa a interseção das regiões de falha dos mesmos. As probabilidades de falhas de sistemas em série  $p_f^s$  e paralelo  $p_f^p$  são dadas por:

$$p_f^s = P\left[\bigcup_{i=1}^m (G_i(y) \leq 0)\right] \quad (3.7.1)$$

$$p_f^p = P\left[\bigcap_{i=1}^m (G_i(y) \leq 0)\right] \quad (3.7.2)$$

onde  $m$  é o número de modos de ruptura possíveis de ocorrer no problema.

A probabilidade de falha de um elemento  $i$  obtida por meio do método *FORM* é dada por:

$$P_f = P[G_i(X) \leq 0] = P[G_i(y) \leq 0] = \Phi(-\beta_i) \quad (3.7.3)$$

Para um sistema em série a probabilidade de falha determinada por meio do método *FORM*, expressão 3.7.1, pode ser escrita como:

$$p_f^s = \sum_{i=1}^m P_i - \sum_{i=1}^m \sum_{k>1}^m P_{ik} + \sum_{i=1}^m \sum_{k>1}^m \sum_{l>k}^m P_{ikl} - \dots \quad (3.7.4)$$

sendo

$$P_i = P(G_i(y) \leq 0) \quad (3.7.5)$$

$$P_{ik} = P[(G_i(y) \leq 0) \cap (G_k(y) \leq 0)] \quad (3.7.6)$$

$$P_{ikl} = P[(G_i(y) \leq 0) \cap (G_k(y) \leq 0) \cap (G_l(y) \leq 0)] \quad (3.7.7)$$

O termo  $P_{ikl}$  é desprezado, pois a probabilidade de falha para os componentes individuais em estrutura são muito baixos.

A análise de confiabilidade de sistemas consiste em: a) calcular-se a probabilidade de falha utilizando-se o método *FORM* para cada modo de falha; b) avaliar a probabilidade de falha do sistema a partir da contribuição de todos os modos (confiabilidade do sistema).

As expressões 3.7.5 e 3.7.6 referem-se, respectivamente, à probabilidade de falha para cada modo de falha isoladamente e à probabilidade de falha inerente a dois modos de falha, sendo essas obtidas a partir das expressões:

$$P_i = \Phi(-\beta_i) \quad (3.7.8)$$

$$P_{ik} = \Phi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_k) + \int_0^{\rho_{ik}} \varphi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) d\rho \quad (3.7.9)$$

$$\varphi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{ik}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_i^2 + \beta_k^2 - 2\rho_{ik}\beta_i\beta_k}{1-\rho_{ik}^2}\right)\right] \quad (3.7.10)$$

onde

$\varphi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik})$  – função densidade de probabilidade bidimensional normal padrão;

$\beta_i, \beta_k$  – índice de confiabilidade dos componentes  $i$  e  $k$ ;

$\rho_{ik}$  – correlação entre os componentes  $i$  e  $k$ .

O coeficiente de correlação entre componentes  $\rho_{ik}$  é dado por:

$$\rho_{ik} = \cos \theta_{ik} = \alpha_i^T \alpha_k \quad (3.7.11)$$

onde  $\alpha_i, \alpha_k$  são os vetores unitários normais aos planos tangentes às funções de falha  $i$  e  $k$ , respectivamente.

A Figura 3.15 ilustra duas superfícies de falha onde  $\theta_{ik}$  é o ângulo entre os vetores normais ou entre as superfícies de falha.

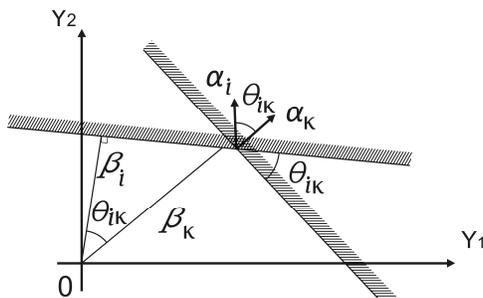


Figura 3.15 – Coeficiente de correlação  $\rho_{ik}$ ; SORENSEN (2004).

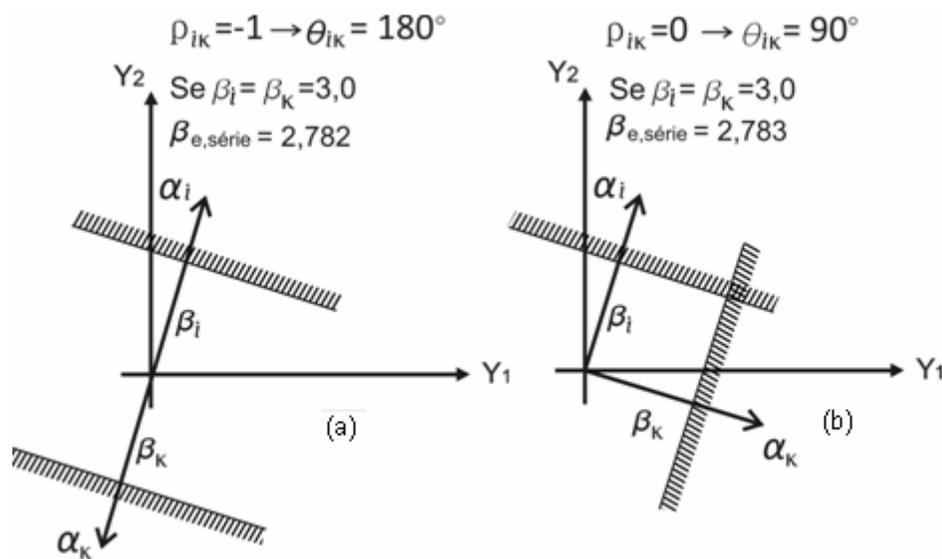
Os valores extremos de correlação entre os componentes  $\rho_{ik} = -1$  e  $\rho_{ik} = 1$ , possibilitam classificá-los em completamente independentes e totalmente dependentes. A expressão 3.7.12 define o valor dos limites de primeira ordem para um sistema onde os componentes são classificados entre totalmente dependente e estatisticamente independentes.

$$\max_{i=1}^m (P_i) \leq p_f^s \leq \sum_{i=1}^m P_i \quad (3.7.12)$$

SORENSEN (2004) apresenta estudo com o objetivo de ressaltar a relação existente entre o valor do índice de confiabilidade  $\beta$  e o coeficiente de correlação entre componente  $\rho_{ik}$ .

A Figura 3.16 mostra sistemas com dois modos de falha, onde os coeficientes de correlação entre os componentes  $\rho_{ik}$  variam entre -1 e 1. Os índices de confiabilidade de cada modo de falha são considerados iguais a 3.

Os valores obtidos para os índices de confiabilidade do sistema variando entre 2,782 e 3 ressaltam a relevância do valor do ângulo formado entre as tangentes às superfícies de falha do sistema obtido pela expressão 3.7.11.



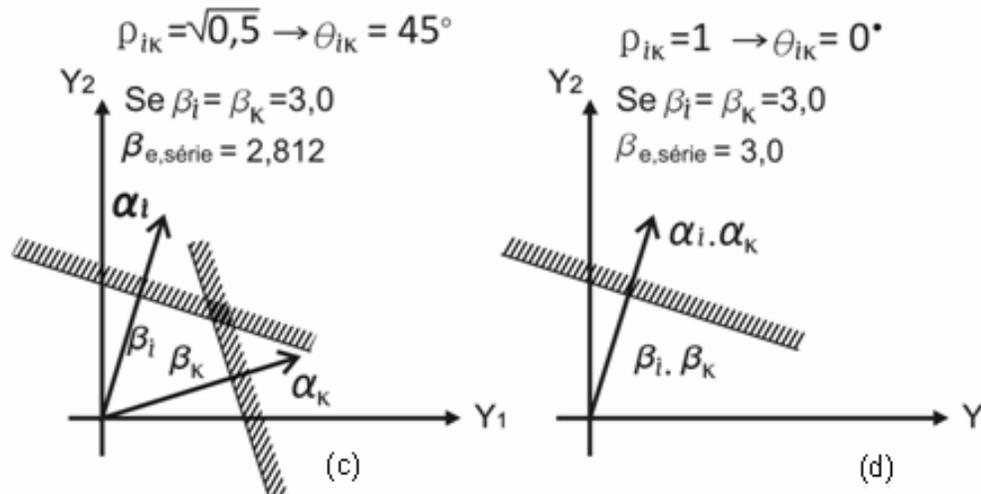


Figura 3.16 – Relação coeficiente de correlação entre  $\rho_{ik}$  e  $\beta_{e,séries}$  ;  
SORENSEN (2004).

A Tabela 3.6 mostra a variação da probabilidade de falha  $p_f^s$  e do índice de confiabilidade  $\beta^s$  em função dos valores da correlação entre os componentes  $\rho_{ik}$  dos sistemas em série da Figura 3.16.

Tabela 3.6 – valores de  $p_f^s$  e  $\beta_{e,séries}$ .

$\rho_{ik}$	$\beta_i = \beta_k$	$p_{fi}$	$p_{fk}$	$p_f^s$	$\beta_{e,séries}$
-1	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6998 \times 10^{-3}$	2,782
-0,8	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6998 \times 10^{-3}$	2,782
-0,6	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6998 \times 10^{-3}$	2,782
-0,4	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6998 \times 10^{-3}$	2,782
-0,2	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6997 \times 10^{-3}$	2,782
0	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6980 \times 10^{-3}$	2,783
0,2	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6884 \times 10^{-3}$	2,784
0,4	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,6541 \times 10^{-3}$	2,788
0,6	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,5601 \times 10^{-3}$	2,799
0,8	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$2,3277 \times 10^{-3}$	2,830
1	3,0	$0,135 \times 10^{-2}$	$0,135 \times 10^{-2}$	$1,35 \times 10^{-3}$	3,0

A Figura 3.17 ilustra a variação do índice de confiabilidade do sistema  $\beta_{e,séries}$  a partir dos valores da correlação entre os componentes  $\rho_{ik}$

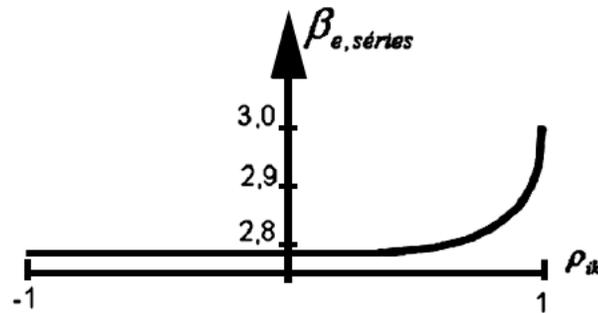


Figura 3.17 – Variação de  $\beta_{e,series}$  versus  $\rho_{ik}$ .

### 3.8 MEDIDAS DE SENSIBILIDADE

O método analítico *FORM* além de possibilitar o cálculo da probabilidade de falha por meio de transformações nas variáveis aleatórias quaisquer envolvidas na análise, possibilita obter outras medidas de grande importância na análise de confiabilidade, que são as medidas de sensibilidade. Entre outros pode-se citar o fator de importância.

O fator de importância de cada variável aleatória é definido como aquele que indica a importância relativa entre as variáveis randômicas na análise de confiabilidade em questão, sendo esse fator obtido individualmente para cada variável, assim:

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (3.8.1)$$

onde  $\alpha_i$  é cosseno diretor inerente à variável  $y_i$  do vetor normal à superfície de falha no ponto  $y^*$ , definido no espaço reduzido de acordo com a expressão

$$\alpha_i = \frac{\nabla G(y^*)_i}{|\nabla G(y^*)|} \quad (3.8.2)$$

onde  $\nabla G(y^*)_i$  é a componente do vetor gradiente da função de falha no espaço das variáveis reduzidas no ponto de projeto  $y^*$ .

A interpretação prática desse estudo consiste em se dar maior atenção às variáveis cujos fatores de importância apresentarem valores altos. As variáveis que apresentarem baixos valores de importância podem ser consideradas como determinísticas.

## 4 METODOLOGIA – DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES DE FALHA E CARACTERIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ABORDADAS

### 4.1 NOTAS INICIAIS

Esse capítulo tem como finalidade apresentar a forma de abordagem das análises de confiabilidade das vigas em concreto armado, reforçadas com CFC e solicitadas à torção pura.

São definidas as variáveis aleatórias e determinísticas envolvidas nas análises realizadas, e as equações de falha  $G_i$  que estabelecem o limite entre os domínios de falha e de segurança das vigas analisadas.

As equações de falha encontram-se em conformidade com a metodologia de reforço desenvolvida por SILVA FILHO (2007). Essa metodologia foi utilizada pelo fato de seus resultados teóricos apresentarem-se próximos aos valores experimentais, conforme mostram os valores da Tabela 2.18.

Para desenvolvimento dos estudos de confiabilidade foram utilizados o método analítico *FORM* e o método de simulação ou técnica de Monte Carlo, por meio das rotinas desenvolvidas com a utilização do programa de análise numérica – *Mathcad*.

Os resultados das análises de confiabilidade são apresentados principalmente em termos de índices de confiabilidade  $\beta_i$  relacionados a uma dada função de falha  $G_i$  e em termos de  $\beta_{sist}^n$  que é o índice de confiabilidade do sistema em série com  $n$  variáveis aleatórias.

## 4.2 ABORDAGEM DAS ANÁLISES

Cinco exemplos são apresentados no capítulo 5. As análises são conduzidas a partir das equações de falha implementadas para avaliação de seção transversal de viga de concreto armado reforçada com CFC e do método analítico *FORM*.

*Primeiro exemplo* – análise de confiabilidade de vigas maciças de concreto armado previamente reforçadas com CFC.

São analisados: a) as mudanças dos índices de confiabilidade  $\beta_i$  e  $\beta_{sist}^n$  com suas respectivas probabilidades de falha  $p_{f_i}$  e  $p_{sist}^n$  devido à variação da razão de carga variável  $r_q$ ; b) os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis envolvidas nas análises; c) a importância dos coeficientes de variação  $\delta$  e da função densidade de probabilidade FDP da carga variável  $q$ . Os valores obtidos por meio do *FORM* são posteriormente validados por meio do método de Monte Carlo.

*Segundo exemplo* – análise de confiabilidade de viga maciça de concreto armado, inicialmente sem reforço e posteriormente reforçada, com base em análise de confiabilidade, com CFC.

São analisados: a) os índice de confiabilidade  $\beta_{sist}^n$  da viga sem reforço, com suas respectivas probabilidades de falha  $p_{sist}^n$ , para as razões de carga variável  $r_q$  adotadas; b) as taxas geométricas de armadura transversal de reforço  $\rho_{ft}$  para obtenção de  $\beta_a = 3,8$ ; c) as coordenadas do ponto de projeto  $y^*$  para as razões de carga variável  $r_q$  d) os fatores parciais de segurança considerando as razões de carga variável  $r_q$  utilizadas nessa análise.

*Terceiro exemplo* – análise de confiabilidade de viga caixão de concreto armado reforçada com CFC, sob o enfoque de dois modelos probabilísticos para as variáveis aleatórias resistência do concreto e resistência do aço, e duas configurações de reforço distintas.

São analisados: a) os índices de confiabilidade  $\beta_i$  e  $\beta_{sist}^n$  com suas respectivas probabilidades de falha  $p_{f_i}$  e  $p_{sist}^n$  para as razões de carga variável  $r_q$ ,

considerando-se os dois modelos probabilísticos adotados para o aço e o concreto; b) as razões entre os valores dos índices de confiabilidade obtidos utilizando-se para o concreto e o aço as funções densidade de probabilidade Normal e Lognormal,  $\beta_i Nor$  e  $\beta_i Log$ ; c) as razões entre valores de  $\beta_{sis}^n Nor$  e  $\beta_{sis}^n Log$ ; d) razão entre os  $\beta_{sis}^n Log$  obtidos da análise das vigas quando reforçadas somente com taxa geométrica de armadura transversal ou longitudinal, sendo, no entanto,  $\rho_{ft} = \rho_{fl}$ .

*Quarto exemplo* – análise de confiabilidade de viga maciça de concreto armado previamente reforçado com CFC, considerando-se os fatores de modelagem dos efeitos de carga  $\phi_S$  e de resistência  $\phi_R$ .

São analisados: a) os índices de confiabilidade  $\beta_i$  e  $\beta_{sis}^n$  considerando-se os fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$ ; b) os fatores de importância relativa das variáveis aleatórias envolvidas na análise, considerando-se uma variação no desvio padrão do fator de modelagem de resistência  $\phi_R$ .

*Quinto exemplo* – calibração dos coeficientes parciais de segurança das solicitações permanente  $\gamma_g$  e variável  $\gamma_q$ , com o objetivo de aproximar os valores dos índices de confiabilidade obtidos para o sistema em série dos índices de confiabilidade de referência  $\beta_a$ .

São analisados: a) o dimensionamento semi-probabilístico do reforço com CFC da viga em concreto solicitada a torção, a partir das solicitações de cálculo obtidas com valores diversos dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ ; b) os índices de confiabilidade  $\beta_i$  e  $\beta_{sis}^n$  considerando-se as taxas de reforço obtidas no dimensionamento semi-probabilístico; c) as superfícies de resposta dos índices de confiabilidade  $\beta_{sis}^n$  para as várias razões de carga variável  $r_q$ ; d) os valores dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  que minimizam o erro entre os valores do índice de confiabilidade do sistema em série e o índice de confiabilidade de referência  $\beta_a$ .

### 4.3 VARIÁVEIS DETERMINÍSTICAS

Os parâmetros geométricos da seção de concreto armado são:

largura da viga –  $b$  ;

altura da viga –  $h$  ;

espessura equivalente –  $t$  ;

área equivalente –  $A_k$  ;

perímetro equivalente –  $u_k$  ;

perímetro da seção transversal –  $u$  .

Os parâmetros geométricos e mecânicos da armadura de aço são:

módulo de elasticidade do aço –  $E_s$  ;

área de armadura longitudinal de aço –  $A_{sl}$  ;

área de armadura transversal de aço –  $A_{st}$  ;

espaçamento dos estribos –  $s$  .

Os parâmetros geométricos do reforço – CFC são:

espessura do reforço –  $t_s$  ;

área do reforço transversal –  $A_{fl}$  ;

área do reforço longitudinal –  $A_{fi}$  ;

espaçamento do reforço transversal –  $s_f$  .

### 4.4 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

A seguir são definidas as variáveis aleatórias básicas relacionadas ao carregamento e à resistência. A aleatoriedade dessas variáveis é definida a partir de suas respectivas função densidade de probabilidade FDP e parâmetros estatísticos, média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  .

#### 4.4.1 Ações

A solicitação de uma estrutura é representada por meio da soma de parcelas inerentes às cargas permanentes  $g$  e variáveis  $q$ .

As cargas permanentes apresentam pequena variabilidade durante a vida útil da estrutura. ELLINGWOOD *et al.* (1980) *apud* LOPES (2007) define para esses tipos de carregamentos uma função densidade de probabilidade Normal com valor médio igual ao valor característico e coeficiente de variação  $\delta_g = 0,10$ .

Esses mesmos autores sugere para as cargas variáveis uma função densidade de probabilidade de valores extremos máximos do tipo I (Gumbel) com valor médio igual ao valor característico e coeficiente de variação  $\delta_q = 0,25$ .

Os modelos probabilísticos dos momentos de torção constituídos de carga permanentes  $T_g$  e variáveis  $T_q$  são adotados iguais aos das cargas que os constituem.

A NBR 8681 (2003) sugere a seguinte expressão para obtenção da solicitação de cálculo no E.L.U.

$$T_{sd} = \gamma_g T_g + \gamma_q T_q \quad (4.4.1)$$

onde

$T_g$  – solicitação permanente característica;

$T_q$  – solicitação variável característica;

$\gamma_g$  – coeficiente de ponderação de ações permanentes igual a 1,4, para situação normal de projetos;

$\gamma_q$  – coeficiente de ponderação de ações variáveis igual a 1,4 para situação normal de projetos;

$T_{sd}$  – momento de torção de cálculo.

Sendo o valor médio igual ao valor característico, tanto para o carregamento permanente quanto para o carregamento variável, a expressão 4.4.1 pode ser escrita como:

$$T_{sd} = 1,4(\mu T_g + \mu T_q) \quad (4.4.2)$$

onde

$\mu T_g$  – média da solicitação permanente;

$\mu T_q$  – média da solicitação variável.

Os dados dos modelos probabilísticos das solicitações permanentes e variáveis utilizadas nos exemplos do capítulo 5 encontram-se na Tabela 4.3.

#### 4.4.2 Concreto

Os parâmetros para a distribuição da resistência do concreto dependem do grau de controle de qualidade em sua produção. A NBR 12655 (2006) define para cálculo da resistência média à compressão do concreto a expressão:

$$f_{cj} = f_{ck} + 1,65\sigma_{fcm} \quad (4.4.3)$$

onde

$f_{cj}$  – resistência média do concreto à compressão prevista para a idade  $j$  dias;

$f_{ck}$  – resistência característica do concreto à compressão;

$\sigma_{fcm}$  – desvio padrão de dosagem do concreto.

A Tabela 4.1 mostra os valores para os desvios padrões em função das condições de preparo do concreto.

Tabela 4.1 – Desvio padrão em função da condição de preparo do concreto; NBR 12655 (2006).

Condição de preparo	Desvio Padrão (MPa)
Boa	4,0
Média	5,5
Ruim	7,0

O valor 1,65 da expressão 4.4.3 define a probabilidade de ocorrência de  $f_c \leq f_{ck} = 5\%$   $p(f_c \leq f_{ck}) = 0,05$ .

O JCSS (2001) sugere para a resistência à compressão do concreto a função densidade de probabilidade Lognormal.

A classe do concreto adotado nesse estudo foi considerada de boa qualidade, sendo por essa razão o seu desvio padrão  $\sigma_{fcm} = 4,0$  MPa.

A NBR 8681 (2003) estabelece para situações normais de projeto, no dimensionamento semi-probabilístico – E.L.U., o coeficiente parcial de ponderação da resistência  $\gamma_c = 1,4$  para a obtenção do valor de cálculo da resistência à compressão do concreto:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (4.4.4)$$

onde  $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do concreto.

Os dados dos modelos probabilísticos para os concretos utilizados nos exemplos do capítulo 5 encontram-se na Tabela 4.2.

#### 4.4.3 Aço

O JCSS (2001) recomenda a função densidade de probabilidade Lognormal para o aço, com coeficiente de variação de  $\delta_s = 0,05$ , e estabelece expressão para o cálculo de sua tensão média de escoamento:

$$f_{ym} = f_{yk} + 2\sigma_s \quad (4.4.5)$$

onde

$f_{ym}$  – tensão média de escoamento;

$f_{yk}$  – tensão característica de escoamento;

$\sigma_s$  – desvio padrão da tensão de escoamento, sugerido igual a 30 MPa pelo JCSS (2001).

A NBR 8681 (2003) estabelece, para situações normais de projeto, no dimensionamento semi-probabilístico – E.L.U., o coeficiente parcial de ponderação da resistência  $\gamma_s = 1,15$  para se obter o valor da tensão de escoamento de cálculo do aço:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (4.4.6)$$

onde  $f_{yd}$  é a tensão de escoamento de cálculo do aço.

O aço utilizado nos exemplos do capítulo 5 é o CA 50A, sendo por essa razão, de acordo com a expressão 4.4.5 e o desvio padrão sugerido pelo JCSS (2001), a tensão média de escoamento igual a 560 MPa.

Considerando-se a expressão 4.4.6 a tensão de escoamento de cálculo do aço para o dimensionamento semi-probabilístico adotado foi  $f_{yd} = 434,8$  MPa . O modelo probabilístico do mesmo encontra-se na Tabela 4.2.

#### 4.4.4 Compósito de Fibras de Carbono – CFC

Pelo fato de não haver até o momento normas que estabeleçam as características estatísticas dos compósitos de fibras de carbono, utilizaram-se para o cálculo da média e desvio padrão do módulo de elasticidade os valores obtidos em ensaios realizados por SILVA FILHO (2007) e SPAGNOLO (2008). Essas pesquisas utilizaram sistemas de reforço compostos por tecidos de fibras de carbono SIKAWRAP – 230 e adesivo de média viscosidade e bicomponente de pega norma SIKADUR 300.

Os valores obtidos para a média e desvio padrão foram, respectivamente,  $E_f = 256,71$  GPa e  $\sigma_f = 10,21$  GPa.

A metodologia do reforço com CFC definida por SILVA FILHO (2007) é baseada em modelo teórico fundamentado na tensão efetiva de aderência elaborado por CHEN e TENG (2003), e pressupõe a aderência total entre o CFC e o substrato de concreto.

A tensão efetiva é dada por:

$$f_{fe} = 0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f}} \sqrt{f_{cm}} \quad (4.4.7)$$

onde

- $f_{fe}$  – tensão efetiva no reforço;
- $E_f$  – módulo de elasticidade do reforço;
- $t_f$  – espessura do reforço;
- $f_{cm}$  – resistência média à compressão do concreto.

A resistência de cálculo é obtida adotando-se o fator de segurança  $\gamma_f=1,3$ , sugerido pelos autores, que divide o valor obtido pela expressão 4.4.7.

PLEYRIS *et al.* (1995) *apud* LOPES (2007) sugere para a distribuição de probabilidade a de valores extremos mínimos do tipo III (Weibull).

O dados do modelo probabilístico para o CFC utilizado nos exemplos do capítulo 5 encontra-se na Tabela 4.2.

#### 4.4.5 Fatores de Modelagem

As simplificações introduzidas nos modelos de cálculo das cargas, dos efeitos das cargas e das resistências fazem com que os mesmos tornem-se, na maioria das vezes, incompletos e inexatos. Com o propósito de considerar essas incertezas são aplicados fatores de modelagem que são tratados como variáveis aleatórias. Os fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$  multiplicam, respectivamente, as expressões de solicitação e resistência, passando as expressões 1.1.5 e 1.1.6 a serem escritas como:

$$\phi_R R - \phi_S S < 0 \quad (4.4.8)$$

$$\frac{\phi_R R}{\phi_S S} < 1 \quad (4.4.9)$$

O JCSS (2001) estabelece modelos probabilísticos para os fatores de modelagem dos efeitos de solicitação e das resistências,  $\phi_S$  e  $\phi_R$ , respectivamente.

Esses fatores de modelagem são intrínsecos ao tipo de estrutura e ao material que a compõe, no entanto, ainda não são definidos para a solicitação de momento de torção no JCSS (2001). Esse trabalho adota os fatores de modelagem inerentes ao cisalhamento.

Os dados para os modelos probabilísticos para os fatores de modelagem, utilizados nos exemplos do capítulo 5, encontram-se na Tabela 4.4.

As Tabelas 4.2, a 4.4 mostram os dados para os modelos probabilísticos das variáveis aleatórias básicas envolvidas nas análises realizadas no capítulo 5.

Tabela 4.2 – Dados dos modelos probabilísticos: resistência do concreto, do aço e do módulo de elasticidade do CFC.

Variáveis Básicas	Resistência caract.	Resistência média	Módulo elast.	Desvio padrão	Coef. variação	PDF
Concreto (MPa)	25 / 30	31,6 / 36,6		4	0,13 / 0,11	Lognormal
Aço (MPa)	500	560	–	30	0,0536	Lognormal
CFC(GPa)	–	–	256,71	10,21	0,0398	Weibull

Tabela 4.3 – Modelos probabilísticos: carregamento.

Variáveis Básicas	Valores Característico	Valores médios	Coef. variação	PDF
Solic. Perm. (kNm)	1,0	1,0	0,10	Normal
Solic. Variá. (kNm)	1,0	1,0	0,25	Gumbel

Tabela 4.4 – Modelos probabilísticos: fatores de modelagem

Variáveis Básicas	Valores Característico	Valores médios	Desvio padrão	Coef. variação	PDF
$\phi_S$	1,0	1,0	0,10	0,10	Lognormal
$\phi_R$	1,4	1,4	0,35	0,25	Lognormal

No Brasil ainda não existem disposições normativas que regulamentem os níveis de confiabilidade  $\beta$  requeridos para cada tipo de estrutura. Nesse trabalho

foi adotado o índice de confiabilidade de referência  $\beta_a = 3,8$  correspondente a uma probabilidade de falha de referência  $p_{fr} = 7,23 \times 10^{-5}$ .

Esse índice de confiabilidade foi obtido no EUROCODE EN1990 (2001), e corresponde a uma classe de consequência CC2 (média) adotada para edifícios residenciais, escolas e hotéis.

#### 4.5 FUNÇÕES DE FALHA

As funções de falha ou funções de estado foram definidas a partir das expressões apresentadas por SILVA FILHO (2007), conforme item 2.9.

A resistência à torção de um elemento estrutural reforçado com CFC em uma determinada seção transversal é considerada satisfatória quanto atendidas simultaneamente as seguintes expressões.

- 1) o momento de torção máximo resistido pela biela deve atender a

$$\overbrace{T_g + T_q}^{T_s} \leq 2\mathcal{V}f_{cm} \overbrace{\left( \frac{tA_k}{\frac{1}{\text{tg}\theta} + \text{tg}\theta} \right)}^{T_R} \quad (4.5.1)$$

- 2) o momento de torção máximo resistido pela armadura transversal e pelo reforço transversal deve atender a

$$\overbrace{T_g + T_q}^{T_s} \leq 2A_k \overbrace{\frac{1}{\text{tg}\theta} \cdot \frac{A_{st} f_{ym}}{s} + \frac{A_{ft} (2bf_{fe})}{s_f}}^{T_R} \quad (4.5.2)$$

- 3) o momento de torção máximo resistido pela armadura longitudinal e pelo reforço longitudinal deve atender a

$$\overbrace{T_g + T_q}^{T_s} \leq \overbrace{2A_k \operatorname{tg} \theta \frac{A_{sl} f_{ym}}{u_k} + \frac{A_{fl}}{u} (2bh f_{fe}) \operatorname{tg} \theta}^{T_R} \quad (4.5.3)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de inclinação da biela, calculado de acordo com a expressão 2.9.1.

Para um elemento estrutural sem reforço as parcelas referentes ao mesmo nas expressões 4.5.2 e 4.5.3 são eliminadas. A tangente do ângulo de inclinação da biela  $\operatorname{tg} \theta$ , para situação de viga sem reforço e com reforço, são, respectivamente, obtidas pelas expressões:

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{\frac{A_{sl} f_s}{s}}{\frac{A_{sl} f_s}{u_k}}} \quad (4.5.4)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{E_s A_{sl}}{9500(10f_{cm} + 8)^{\frac{1}{3}} tu_k} + \frac{E_f A_{fl}}{9500(10f_{cm} + 8)^{\frac{1}{3}} tu}}{1 + \frac{E_s A_{sl}}{9500(10f_{cm} + 8)^{\frac{1}{3}} ts} + \frac{E_f A_{fl}}{9500(10f_{cm} + 8)^{\frac{1}{3}} ts}}} \quad (4.5.5)$$

As equações de falha determinam o limite de violação de um estado limite considerando-se uma resistência  $R$  igual a uma solitação  $S$ . A partir das expressões 4.5.1 a 4.5.3 são definidas as equações de falha.

A equação de falha relativa à ruína da diagonal flexo-comprimida de concreto da viga sem reforço é:

$$G_1 = 2 \left[ 0,7 \left( 0,7 - \frac{f_c}{20} \right) \right] f_c \left[ \frac{tA_k}{\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} + \operatorname{tg} \theta} \right] - (T_g + T_q) \quad (4.5.6)$$

Para a equação de falha relativa à ruína da armadura longitudinal de aço da viga sem reforço tem-se:

$$G_2 = 2A_k \operatorname{tg} \theta \frac{A_{sl} f_s}{u_k} - (T_g + T_q) \quad (4.5.7)$$

e para a equação de falha relativa à ruína da armadura transversal de aço da viga sem reforço segue-se.

$$G_3 = 2A_k \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{A_{sl} f_s}{s} - (T_g + T_q) \quad (4.5.8)$$

O valor da  $\operatorname{tg} \theta$ , para aplicação das equações de falha definidas nas expressões 4.5.6 a 4.5.8, é obtido por meio da expressão 4.5.4.

A equação de falha relativa à ruína da biela flexo-comprimida de concreto da viga com reforço é:

$$G_4 = 2 \left[ 0,7 \left( 0,7 - \frac{f_c}{20} \right) \right] f_c \left[ \frac{tA_k}{\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} + \operatorname{tg} \theta} \right] - (T_g + T_q) \quad (4.5.9)$$

Para a equação de falha relativa à ruína da armadura longitudinal de aço e reforço longitudinal da viga com reforço tem-se:

$$G_5 = 2A_k \operatorname{tg} \theta \frac{A_{sl} f_s}{u_k} + \frac{A_{fl}}{u} 2bh \left[ \frac{0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f} \sqrt{10} f_c}}{10} \right] \operatorname{tg} \theta - (T_g + T_q) \quad (4.5.10)$$

e para a equação de falha relativa à ruína da armadura transversal de aço e reforço transversal da viga com reforço segue-se.

$$G_6 = 2A_k \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \frac{A_{st} f_s}{s} + \frac{\frac{A_{ft}}{s_f} 2bh \left[ \frac{0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f}} \sqrt{10 f_c}}{10} \right]}{\operatorname{tg}\theta} - (T_g + T_q) \quad (4.5.11)$$

O valor da  $\operatorname{tg}\theta$ , para aplicação das equações de falha definidas nas expressões 4.5.9 a 4.5.11, é obtido por meio da expressão 4.5.5.

## 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 5.1 NOTAS INICIAIS

Nesse capítulo são feitas análises de confiabilidade relativas às funções de falha apresentadas no capítulo 4 relacionadas aos E.L.U. de vigas de concreto armado reforçadas à torção pura. Também é apresentada uma calibração de fatores parciais de segurança.

As incertezas relativas às variáveis envolvidas nas análises são consideradas por meio dos modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC, das ações permanentes e variáveis, e dos fatores de modelagem de sollicitação e resistência que constam das Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4.

No primeiro exemplo são apresentados e analisados os resultados obtidos na análise de confiabilidade das vigas VT e VTL (SILVA FILHO (2007)). A análise é realizada com o método analítico *FORM* e os valores obtidos são validados por meio da simulação de Monte Carlo.

São avaliados os índices de confiabilidade  $\beta_{sist}^n$  e as respectivas probabilidades de falha  $p_{sist}^n$  inerentes aos vários valores de razão de carga variável  $r_q = \frac{q}{q+g}$ , que define o percentual de ação variável em relação à ação total que sollicita a estrutura. São obtidos também os valores dos fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias envolvidas na análise, o que possibilitou destacar entre as mesmas as mais importantes na definição da probabilidade de falha das vigas VT e VTL.

A partir dos fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias as vigas VT e VTL são reanalisadas dando às variáveis de baixos fatores de importância relativa um tratamento determinístico.

São avaliadas a importância da dispersão dos valores da ação variável em relação a sua média, e a importância da função densidade de probabilidade que melhor possa representá-la. A Figura 5.1 ilustra o desenvolvimento do exemplo 1.

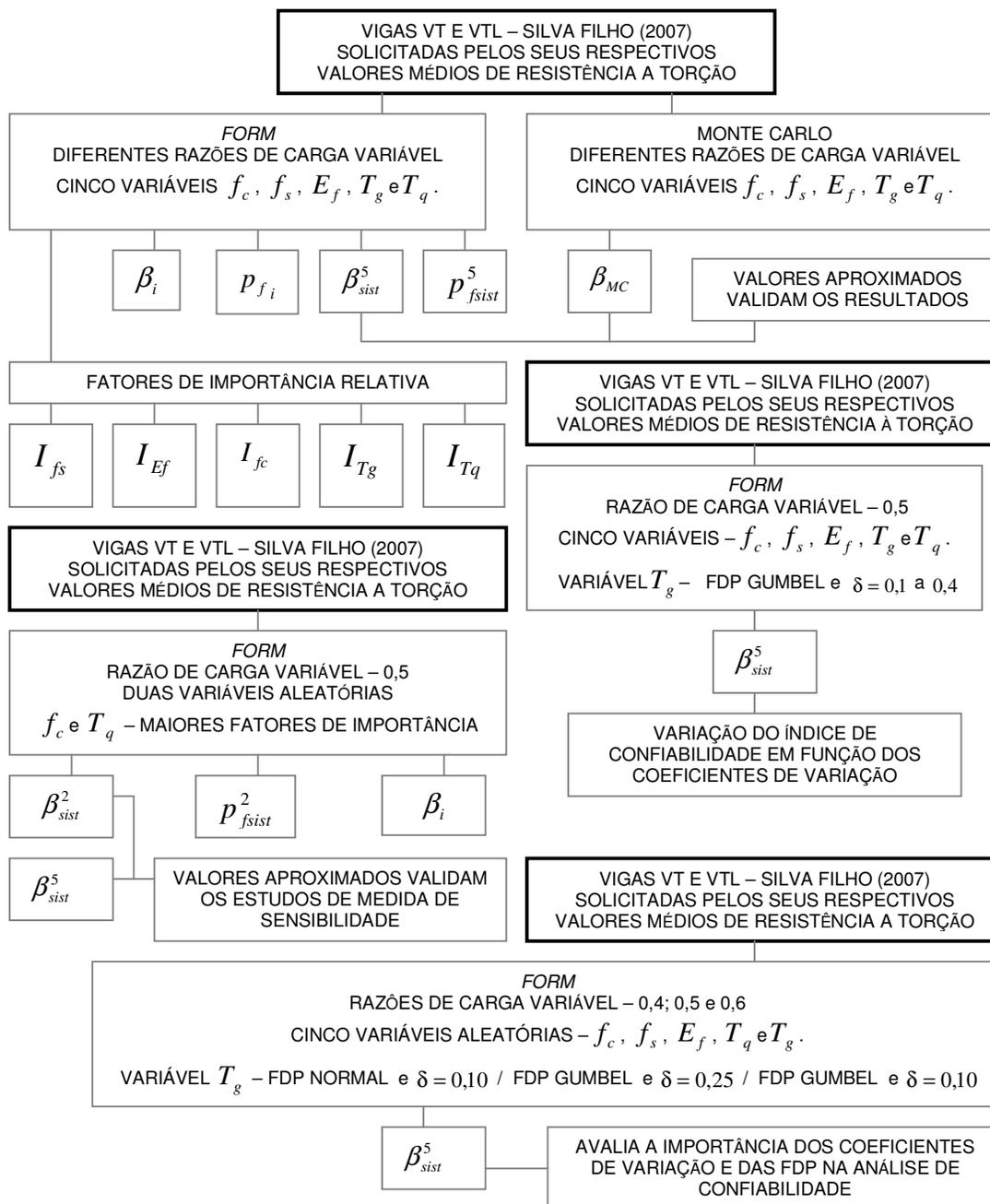


Figura 5.1 – Organograma do exemplo 1.

No segundo exemplo é efetuada inicialmente a análise de confiabilidade de uma viga maciça executada em concreto armado sem reforço, solicitada por momento de torção constituído de parcelas permanente  $T_g$  e variável  $T_q$  definidas a partir de razões de carga variável  $r_q$ .

Posteriormente a viga é reforçada com base em análise de confiabilidade, com CFC com o objetivo de elevar o seu índice de confiabilidade ao valor de referência  $\beta_a=3,80$ . Utilizando-se o método analítico *FORM* são obtidas as coordenadas do ponto de projeto  $y^*$  para cada razão de carga variável  $r_q$ .

A partir das coordenadas do ponto de projeto  $y^*$  e dos valores característicos das variáveis aleatórias são obtidos os fatores parciais de segurança das variáveis envolvidas  $\gamma$ , que aplicados segundo um enfoque semi-probabilístico fornece para a viga um índice de confiabilidade  $\beta=3,8$ .

Os valores dos fatores de importância das variáveis aleatórias: ação permanente  $I_{Tg}$  e ação variável  $I_{Tq}$  realçaram a relação entre esses e os valores dos seus respectivos fatores parciais de segurança. A Figura 5.2 ilustra o desenvolvimento do exemplo 2.

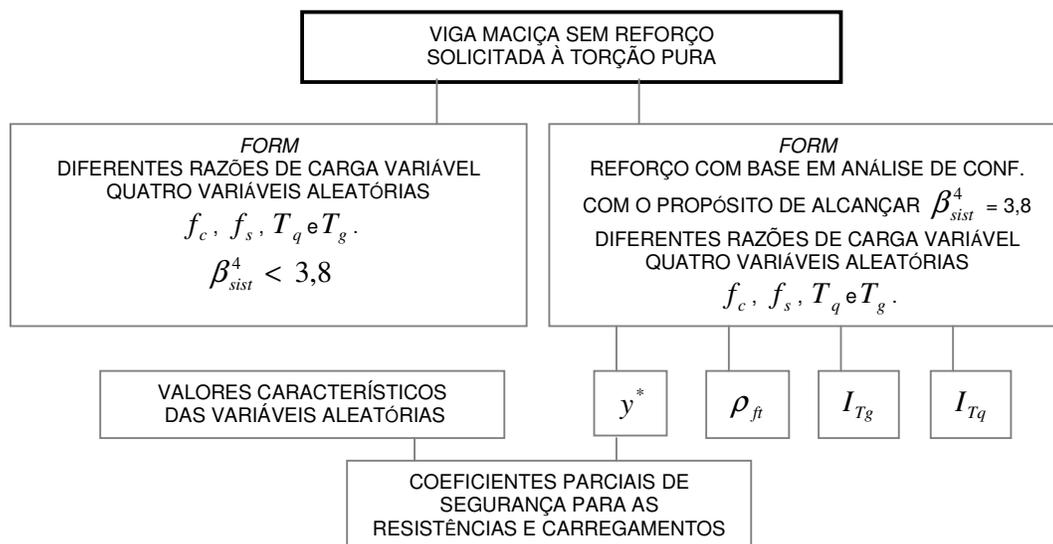


Figura 5.2 – Organograma do exemplo 2.

No terceiro exemplo são realizadas duas análises de confiabilidade da seção de uma viga caixão solicitada por um momento de torção. Nesse exemplo é utilizado o método analítico *FORM*. É avaliada a variação dos valores do índice de confiabilidade dos modos de falha  $\beta_i$  e do sistema em série  $\beta_{sist}^n$ , a partir de dois diferentes modelos probabilísticos adotados para representar as variáveis aleatórias, resistência do concreto e do aço: a) FDP Normal conforme a NBR 6118 (2007); b) FDP Lognormal conforme o JCSS (2001).

Avalia-se também os índices de confiabilidade do sistema  $\beta_{sist}^n$  dessa viga considerando-se duas tipologias de reforço: a) viga reforçada somente com  $A_{fl}$ ; b) viga reforçada somente com  $A_{ft}$ . A Figura 5.3 ilustra o desenvolvimento do exemplo 3.

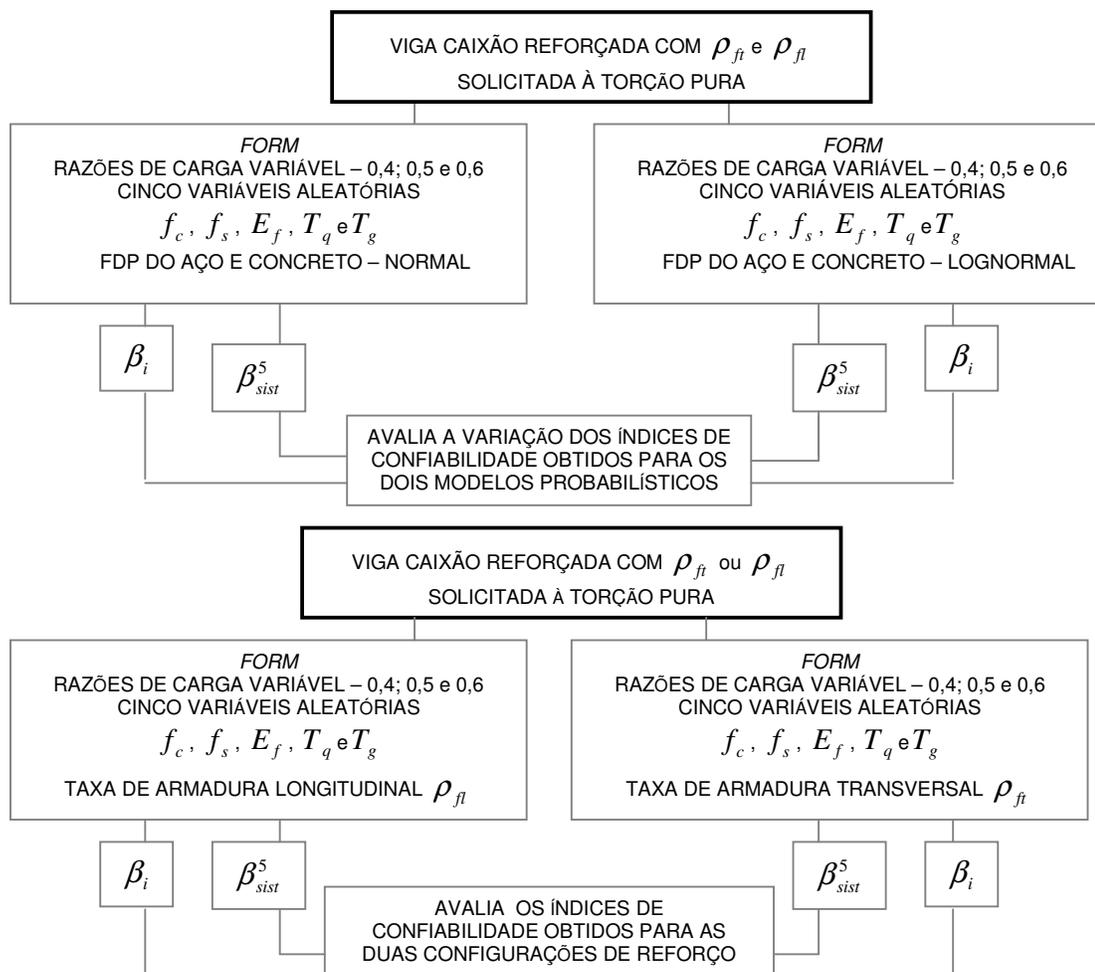


Figura 5.3 – Organograma do exemplo 3.

No quarto exemplo é realizada análise de confiabilidade na qual incertezas inerentes à modelagem são consideradas, a partir dos fatores de modelagem dos efeitos de solicitação  $\phi_S$  e de resistência  $\phi_R$ . A viga analisada é a VTL do exemplo 1. Nesse exemplo utiliza-se o método analítico *FORM*, a partir do qual obtém-se os fatores de importância das variáveis aleatórias envolvidas.

Os resultados realçam a consequência da utilização dos fatores de modelagem. São avaliadas as variações dos índices de confiabilidade  $\beta_i$  e  $\beta_{sist}^n$ , a importância da dispersão dos valores de variável  $\phi_R$  em relação ao seu valor médio e a variação dos valores dos fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias envolvidas nessa análise. A Figura 5.4 ilustra o desenvolvimento do exemplo 4.

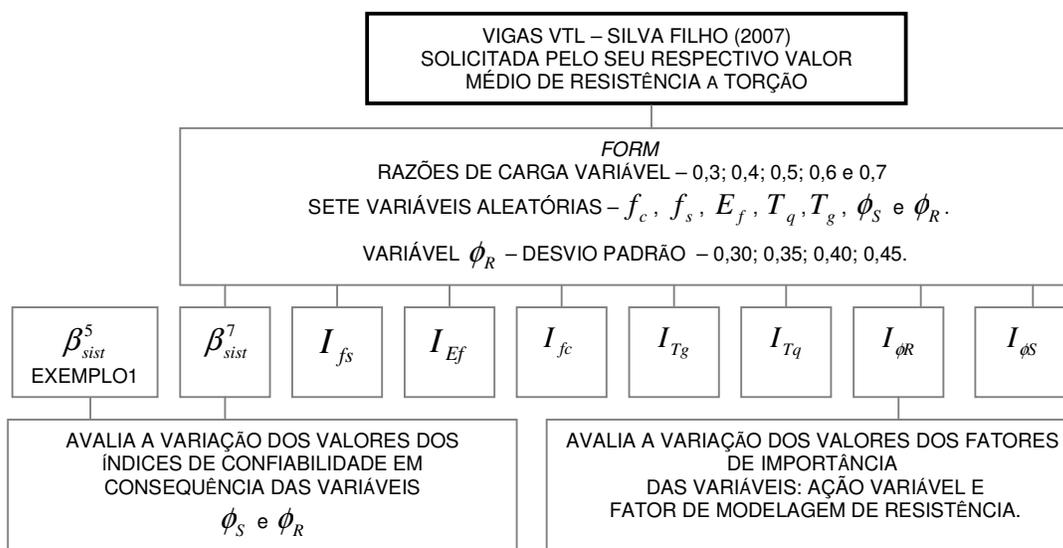


Figura 5.4 – Organograma do exemplo 4.

No quinto exemplo, conduziu-se a análise com o objetivo de calibrar os coeficientes parciais de segurança das solicitações permanente  $\gamma_g$  e variável  $\gamma_q$ . São calculadas pelo método semi-probabilístico as armaduras de reforço longitudinal  $A_{fl}$  e transversal  $A_{ft}$  inerentes a 112 valores de momento de torção

de cálculo  $T_{sd}$ , gerados a partir de valores atribuídos aos coeficientes parciais de segurança das solicitações permanente  $\gamma_g$  e variável  $\gamma_q$  (1,2; 1,3; 1,4 e 1,5).

Os índices de confiabilidades do sistema em série  $\beta_{sist}^n$  são calculados, utilizando-se o método analítico *FORM*, considerando-se os valores de  $A_{ft}$  e  $A_{fi}$  previamente obtidos por meio do método semi-probabilístico. Utilizando-se interpolação polinomial de Lagrange são geradas as superfícies de resposta em termos de índice de confiabilidade aproximada para todas as razões de carga variável  $r_q$  analisadas.

A partir de FABER (2009) define-se a calibração dos coeficientes parciais de segurança que minimizam o erro entre os valores dos índices de confiabilidade obtidos na análise  $\beta_{sist}^n$  e o índice referência  $\beta_a$ . A Figura 5.5 ilustra o desenvolvimento do exemplo 5.

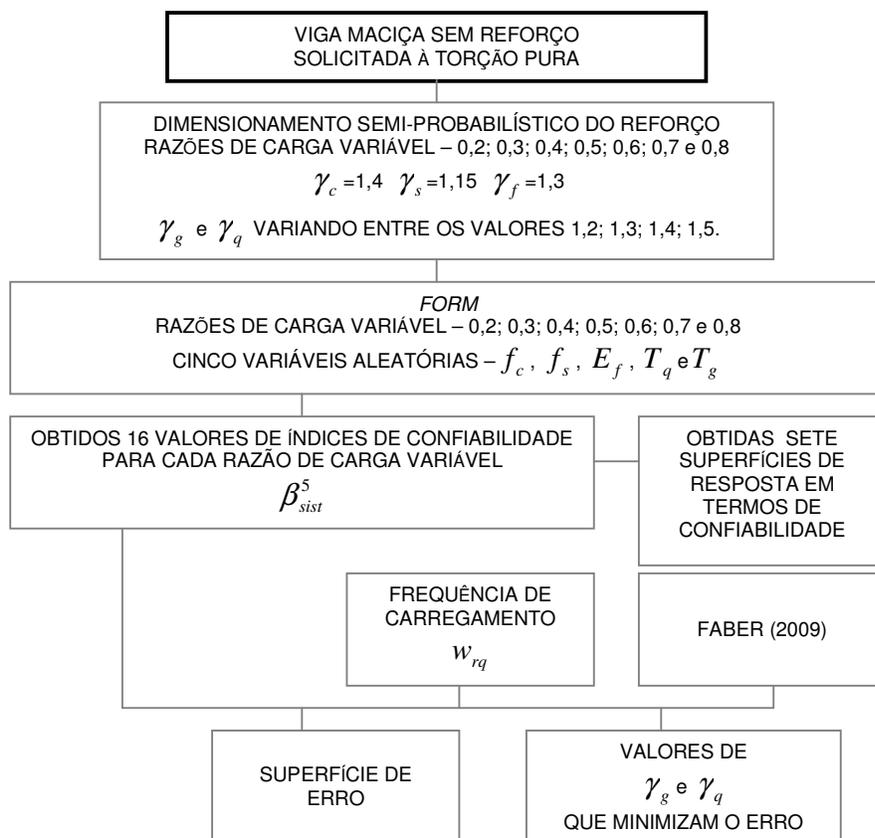


Figura 5.5 – Organograma do exemplo 5.

Em todos os exemplos foi adotada a metodologia de reforço desenvolvida por SILVA FILHO (2007).

## 5.2 VIGAS VT E VTL

Esses exemplos têm como objetivo a análise de confiabilidade das vigas utilizadas por SILVA FILHO (2007) solicitadas à torção pura, executadas em concreto armado e reforçadas com CFC.

As configurações de reforço foram as mesmas utilizadas pelo autor nas vigas das séries VT e VTL, respectivamente, reforçadas com armadura transversal de CFC e armadura transversal e longitudinal de CFC, ilustradas na Figuras 2.18 a 2.20.

Inicialmente obteve-se por meio do método semi-probabilístico as resistências de cálculo  $T_{rd}$  das vigas VT e VTL.

A Tabela 5.1 mostra os valores dos momentos resistentes de cálculo  $T_{rd-Biela}$ ,  $T_{rd-Long}$  e  $T_{rd-Trans}$  das vigas VT e VTL reforçadas com CFC, assim como as parcelas de momentos resistentes referentes às armaduras longitudinais e transversais de aço,  $T_{rd-sl}$  e  $T_{rd-st}$ , e CFC,  $T_{rd-fl}$  e  $T_{rd-ft}$ , que os constituem.

Tabela 5.1 – Resistências de cálculo das vigas VT e VTL (kNm), reforçadas com CFC.

Vigas	$T_{rd-Biela}$	$T_{rd-sl}$	$T_{rd-fl}$	$T_{rd-st}$	$T_{rd-ft}$	$T_{rd-Long}$	$T_{rd-Trans}$
VT	26,34	29,46	0	20,95	9,31	29,46	30,26
VTL	26,26	28,01	4,13	22,03	4,90	32,14	26,93

Os respectivos valores dos momentos resistentes de cálculo  $T_{rd-Biela}$  (Tabela 5.1) das vigas VT e VTL foram transformados, a partir da expressão 4.4.2, em valores médios de resistências, 18,81 kNm e 18,75 kNm.

Esses valores foram considerados, para fins de análise de confiabilidade, como constituídos por parcelas de solicitação variável  $T_q$  e permanente  $T_g$ .

Os modelos probabilísticos das variáveis aleatórias utilizadas nesse exemplo são mostrados nas Tabelas 4.2 e 4.3 e transcritos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Valores para os modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações, exemplo1.

Variáveis Básicas	Resist. caract.	Resist. média	Módulo elast.	Desvio padrão	Coef. variação	FDP
Concreto (MPa)	30	36,6	–	4	0,11	Lognormal
Aço (MPa)	500	560	–	30	0,0536	Lognormal
CFC (GPa)	–	–	256,72	10,21	0,0398	Weibull
Solic. Perm. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,25	Gumbel

Os valores das solicitações são variáveis em consequência das razões de carga variável  $r_q$  adotadas, e os seus valores característicos são considerados iguais aos seus valores médios.

As equações de falha utilizadas são as definidas pelas expressões 4.5.9, 4.5.10 e 4.5.11.

São obtidos os índices de confiabilidade  $\beta_i$  inerente a cada modo ou equação de falha  $G_i$  e suas respectivas probabilidades de falha  $p_{f_i}$ , o índice de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^n$  e a sua respectiva probabilidade de falha  $p_{fsist}^n$ , e os fatores de importância das variáveis aleatórias  $I$  envolvidas nessa análise.

Utilizou-se nessa análise o método analítico *FORM*, e para validação dos valores do índice de confiabilidade  $\beta_i$  obtidos utilizou-se a simulação de Monte Carlo, obtendo-se assim o  $\beta_{MC}$ .

Os valores do  $\beta_{MC}$  para as razões de carga variável  $r_q$  iguais a 0,10; 0,20 e 0,30 não foram informados devido a reduzida probabilidade de falha do sistema e, portanto, a necessidade de um elevado número de simulações.

As Tabelas 5.3 e 5.4 mostram, respectivamente, os resultados da análise de confiabilidade das séries VT e VTL para todas as razões de carga variável  $r_q$  adotadas: a) índices de confiabilidade de cada modo de falha  $\beta_4, \beta_5$  e  $\beta_6$  com suas respectivas probabilidades de falha  $p_{f4}, p_{f5}$  e  $p_{f6}$ , b) índice de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^5$  e suas respectivas probabilidades de

falha  $p_{fsist}^5$ . Os valores dos índices de confiabilidades  $\beta_i$  e  $\beta_{MC}$ , obtidos, respectivamente, pelo método analítico *FORM* e simulação de Monte Carlo apresentam-se muito próximos, validando-se assim os resultados obtidos nessa análise. A consideração de  $n=5$  é consequência de serem admitidas nessa análise cinco variáveis aleatórias  $f_c, E_f, f_s, T_g$  e  $T_q$ .

Tabela 5.3 – Resultados de análise de confiabilidade: viga série VT.

Funções de Falha $G_i$	$r_q = \frac{q}{q+g}$	$\beta_i$	$\beta_{MC}$	$p_{fi}$	$\beta_{sist}^5$	$p_{fsist}^5$
Biela $G_4$	0,10	6,42	—	$6,64 \times 10^{-11}$	6,42	$6,64 \times 10^{-11}$
A. Long. $G_5$		7,43	—	$5,31 \times 10^{-14}$		
A. Tran. $G_6$		9,01	—	0		
Biela $G_4$	0,20	5,82	—	$3,01 \times 10^{-9}$	5,78	$3,63 \times 10^{-9}$
A. Long. $G_5$		6,07	—	$6,31 \times 10^{-10}$		
A. Tran. $G_6$		6,91	—	$2,47 \times 10^{-12}$		
Biela $G_4$	0,30	5,04	—	$2,26 \times 10^{-7}$	4,95	$3,68 \times 10^{-7}$
A. Long. $G_5$		5,11	—	$1,58 \times 10^{-7}$		
A. Tran. $G_6$		5,72	—	$5,11 \times 10^{-9}$		
Biela $G_4$	0,40	4,46	4,61	$4,07 \times 10^{-6}$	4,33	$7,32 \times 10^{-6}$
A. Long. $G_5$		4,45	4,50	$4,13 \times 10^{-6}$		
A. Tran. $G_6$		4,95	4,83	$3,53 \times 10^{-7}$		
Biela $G_4$	0,50	4,01	4,00	$2,98 \times 10^{-5}$	3,89	$4,93 \times 10^{-5}$
A. Long. $G_5$		3,98	3,95	$3,47 \times 10^{-5}$		
A. Tran. $G_6$		4,41	4,28	$5,12 \times 10^{-6}$		
Biela $G_4$	0,60	3,66	3,75	$1,25 \times 10^{-4}$	3,53	$2,06 \times 10^{-4}$
A. Long. $G_5$		3,60	3,58	$1,54 \times 10^{-4}$		
A. Tran. $G_6$		3,99	4,04	$3,23 \times 10^{-5}$		
Biela $G_4$	0,70	3,37	3,42	$3,69 \times 10^{-4}$	3,26	$5,57 \times 10^{-4}$
A. Long. $G_5$		3,31	3,31	$4,62 \times 10^{-4}$		
A. Tran. $G_6$		3,66	3,66	$1,24 \times 10^{-4}$		
Biela $G_4$	0,80	3,13	3,16	$8,56 \times 10^{-4}$	3,04	$1,17 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_5$		3,06	3,06	$1,08 \times 10^{-3}$		
A. Tran. $G_6$		3,39	3,40	$3,44 \times 10^{-4}$		
Biela $G_4$	0,90	2,93	2,95	$1,67 \times 10^{-3}$	2,86	$2,09 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_5$		2,86	2,88	$2,09 \times 10^{-3}$		
A. Tran. $G_6$		3,16	3,16	$7,69 \times 10^{-4}$		

Tabela 5.4 – Resultados de análise de confiabilidade: viga série VTL.

Funções de Falha $G_i$	$r_q = \frac{q}{q+g}$	$\beta_i$	$\beta_{MC}$	$p_{f_i}$	$\beta_{sist}^5$	$p_{fsist}^5$
Biela $G_4$	0,10	6,42	–	$6,79 \times 10^{-11}$	6,42	$6,80 \times 10^{-11}$
A. Long. $G_5$		8,96	–	0		
A. Tran. $G_6$		7,35	–	$9,80 \times 10^{-14}$		
Biela $G_4$	0,20	5,81	–	$3,07 \times 10^{-9}$	5,72	$5,24 \times 10^{-9}$
A. Long. $G_5$		6,97	–	$1,54 \times 10^{-12}$		
A. Tran. $G_6$		5,87	–	$2,23 \times 10^{-9}$		
Biela $G_4$	0,30	5,04	–	$2,28 \times 10^{-7}$	4,84	$6,65 \times 10^{-7}$
A. Long. $G_5$		5,82	–	$2,98 \times 10^{-9}$		
A. Tran. $G_6$		4,90	–	$4,72 \times 10^{-7}$		
Biela $G_4$	0,40	4,46	4,48	$4,11 \times 10^{-6}$	4,20	$1,31 \times 10^{-5}$
A. Long. $G_5$		5,06	–	$2,15 \times 10^{-7}$		
A. Tran. $G_6$		4,25	4,30	$1,05 \times 10^{-5}$		
Biela $G_4$	0,50	4,00	4,01	$3,19 \times 10^{-5}$	3,74	$9,17 \times 10^{-5}$
A. Long. $G_5$		4,49	4,41	$3,51 \times 10^{-6}$		
A. Tran. $G_6$		3,77	3,79	$8,14 \times 10^{-5}$		
Biela $G_4$	0,60	3,66	3,62	$1,26 \times 10^{-4}$	3,39	$3,42 \times 10^{-4}$
A. Long. $G_5$		4,08	4,10	$2,18 \times 10^{-5}$		
A. Tran. $G_6$		3,42	3,39	$3,09 \times 10^{-4}$		
Biela $G_4$	0,70	3,37	3,37	$3,71 \times 10^{-4}$	3,12	$9,01 \times 10^{-4}$
A. Long. $G_5$		3,76	3,73	$8,66 \times 10^{-5}$		
A. Tran. $G_6$		3,14	3,11	$8,55 \times 10^{-4}$		
Biela $G_4$	0,80	3,13	3,15	$8,60 \times 10^{-4}$	2,90	$1,87 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_5$		3,48	3,44	$2,49 \times 10^{-4}$		
A. Tran. $G_6$		2,90	2,89	$1,86 \times 10^{-3}$		
Biela $G_4$	0,90	2,93	2,93	$1,68 \times 10^{-3}$	2,70	$3,29 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_5$		3,25	3,23	$5,72 \times 10^{-4}$		
A. Tran. $G_6$		2,70	2,70	$3,44 \times 10^{-3}$		

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram, respectivamente, a variação do índice de confiabilidade obtido a partir do método analítico *FORM* versus variação da razão de carga variável  $r_q$  para as vigas VT e VTL.

A partir dessas figuras pode-se observar que o acréscimo da razão  $r_q$  faz com que ocorra um decréscimo no índice de confiabilidade dos modos de ruptura

das vigas  $\beta_i$  e do sistema em série  $\beta_{sist}^5$ , acarretando assim um acréscimo na probabilidade de falha dos mesmos  $p_{fsist}^5$ .

Para fins ilustrativos adotou-se a classe de confiabilidade RC2 e um período de retorno de 50 anos mostrados na Tabela 3.2. Assim sendo, definiu-se um índice de confiabilidade de referência  $\beta_a = 3,8$ , cuja probabilidade de falha correspondente é  $p_f = 7,2 \times 10^{-5}$ .

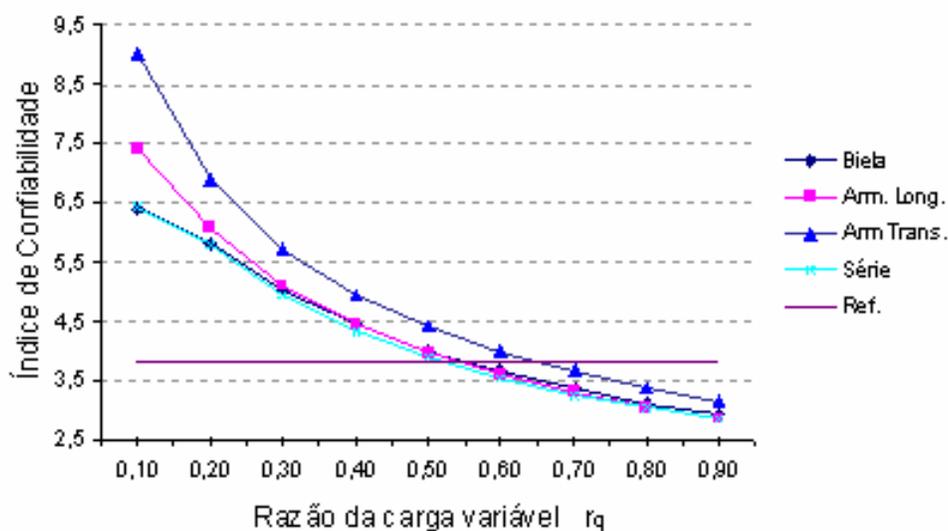


Figura 5.6 – Índice de confiabilidade *versus* razão de carga var.  $r_q$ , viga VT.

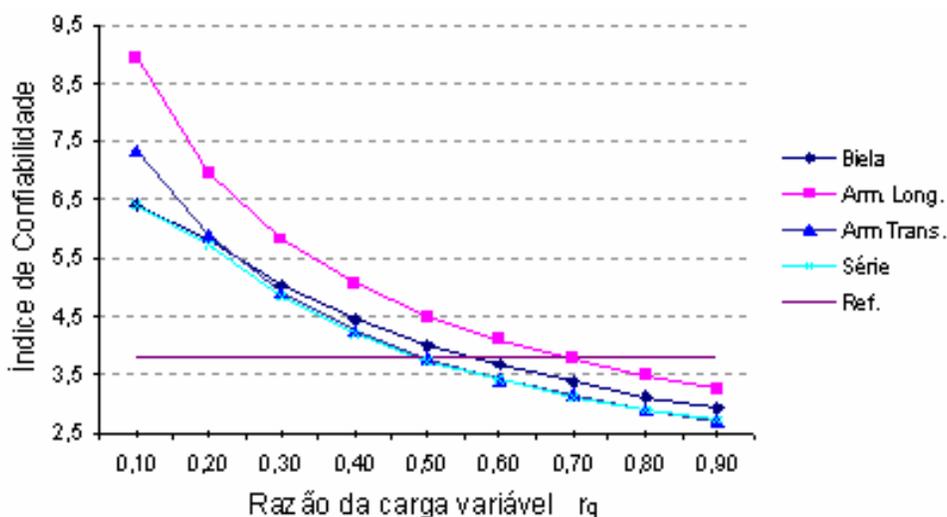


Figura 5.7 – Índice de confiabilidade *versus* razão de carga var.  $r_q$ , viga VTL.

Observa-se que as vigas VT e VTL têm os seus índices de confiabilidade de referência  $\beta_a$  alcançados quando a razão  $r_q$  encontra-se no entorno de 0,50; indicando assim que o tratamento semi-probabilístico de acordo com a NBR 6118 (2007), aplicado à metodologia de reforço elaborada por SILVA FILHO (2007), fornece valores de índices de confiabilidade aceitáveis para estruturas solicitadas por carregamentos constituídos com parcelas de carga variável de cerca de 50% do seu valor total.

O decréscimo dos valores dos índices de confiabilidade com o aumento da razão  $r_q$  (Figuras 5.6 e 5.7) é uma consequência do tratamento dado pela NBR 6118 (2007) às ações variáveis e permanentes que solicitam a estrutura. Essa norma adota no método semi-probabilístico, para ações normais, coeficientes de ponderação de ações  $\gamma_g = 1,4$  e  $\gamma_q = 1,4$ , sem considerar a diferença entre os modelos probabilísticos existentes entre as mesmas: FDP e coeficiente de variação  $\delta$ .

A partir das análises de confiabilidade realizadas por meio do método analítico *FORM*, foi possível elaborar o estudo de medida de sensibilidade com o objetivo de destacar a importância relativa das variáveis no valor do índice de confiabilidade  $\beta_i$  de cada modo de falha analisado.

As Tabelas 5.5 a 5.7 mostram os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis na análise de confiabilidade da viga VT, respectivamente, para a biela flexo-comprimida, armadura longitudinal (aço e reforço CFC) e armadura transversal (aço e reforço CFC).

Tabela 5.5 – Fatores de importância: biela flexo-comprimida, VT.

Biela $G_4$	Razão de carga variável $r_q$								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
$I_{fs}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$I_{Ef}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$I_{fc}$	0,613	0,346	0,213	0,156	0,123	0,102	0,087	0,076	0,067
$I_{Tg}$	0,323	0,125	0,052	0,027	0,014	0,008	0,004	0,001	–
$I_{Tq}$	0,064	0,529	0,735	0,817	0,862	0,890	0,909	0,923	0,932

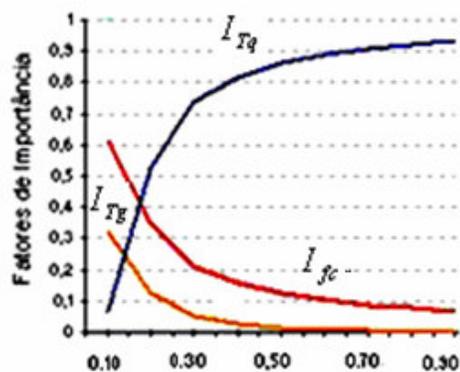
Tabela 5.6 – Fatores de importância: armadura longitudinal, VT.

$A_{sl}+CFC$ $G_5$	Razão de carga variável $r_q$								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
$I_{fs}$	0,365	0,153	0,101	0,076	0,062	0,052	0,045	0,040	0,035
$I_{Ef}$	0,001	–	–	–	–	–	–	–	–
$I_{fc}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$I_{Tg}$	0,419	0,110	0,051	0,027	0,015	0,008	0,004	0,001	–
$I_{Tq}$	0,215	0,736	0,849	0,897	0,924	0,940	0,951	0,959	0,964

Tabela 5.7 – Fatores de importância: armadura transversal, VT.

$A_{st}+CFC$ $G_6$	Razão de carga variável $r_q$								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
$I_{fs}$	0,155	0,065	0,044	0,033	0,027	0,023	0,020	0,017	0,016
$I_{Ef}$	0,006	0,001	0,001	0,001	–	–	–	–	–
$I_{fc}$	0,015	0,005	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
$I_{Tg}$	0,322	0,085	0,041	0,022	0,012	0,007	0,003	0,001	–
$I_{Tq}$	0,503	0,844	0,911	0,942	0,958	0,969	0,975	0,980	0,983

A Figura 5.8 ilustra os fatores de importância relativa  $I$  versus variação da razão de carga variável  $r_q$  para a viga VT (Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7). Foram consideradas para cada modo de falha as três variáveis cujos valores de importância  $I$  mostram-se mais significativos: biela de concreto –  $I_{fc}$ ,  $I_{Tg}$  e  $I_{Tq}$ ,  $A_{sl}+CFC$  –  $I_{fs}$ ,  $I_{Tg}$  e  $I_{Tq}$ ,  $A_{st}+CFC$  –  $I_{fs}$ ,  $I_{Tg}$  e  $I_{Tq}$ .



a) Biela

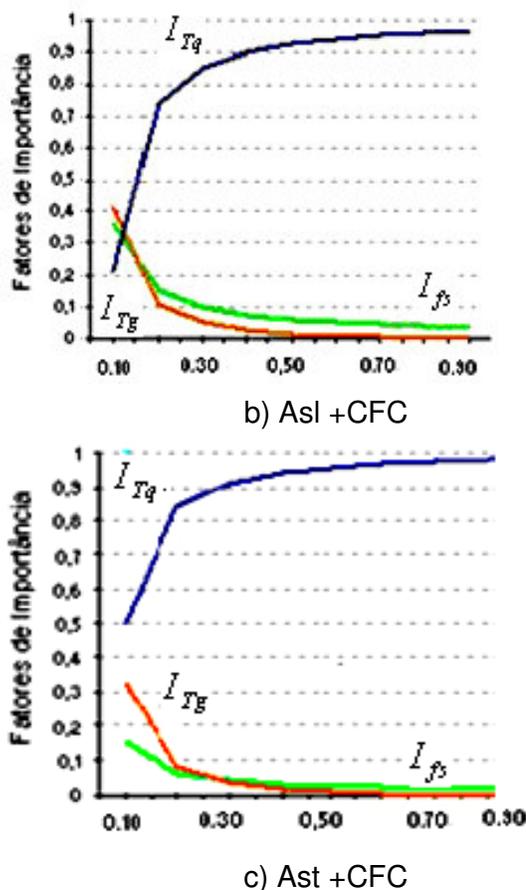


Figura 5.8 – Fatores de importância  $I$  versus razão de carga var.  $r_q$ , VT.

As Tabelas 5.8 a 5.10 mostram os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis na análise de confiabilidade da viga VTL, respectivamente, para a biela flexo-comprimida, armadura longitudinal (aço e reforço CFC) e armadura transversal (aço e reforço CFC).

Tabela 5.8 – Fatores de importância: biela flexo-comprimida, VTL.

Biela	Razão de carga variável $r_q$								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
$G_4$									
$I_{fs}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$I_{Ef}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$I_{fc}$	0,613	0,346	0,213	0,156	0,123	0,102	0,087	0,076	0,067
$I_{Tg}$	0,323	0,125	0,052	0,027	0,014	0,008	0,004	0,001	–
$I_{Tq}$	0,064	0,529	0,735	0,817	0,862	0,890	0,909	0,923	0,932

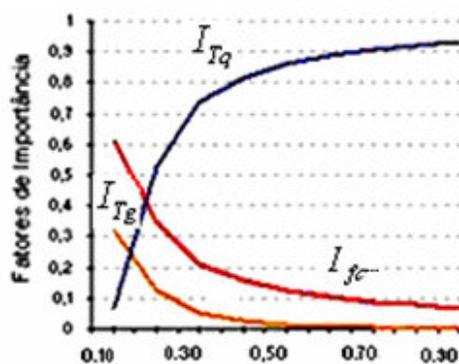
Tabela 5.9 – Fatores de importância: armadura longitudinal, VTL.

$A_{sl}+CFC$ $G_5$	Razão de carga variável $r_q$								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
$I_{fs}$	0,257	0,107	0,072	0,055	0,045	0,038	0,033	0,029	0,026
$I_{Ef}$	0,003	0,001	–	–	–	–	–	–	–
$I_{fc}$	0,003	0,001	0,001	–	–	–	–	–	–
$I_{Tg}$	0,337	0,084	0,040	0,021	0,012	0,006	0,003	0,001	–
$I_{Tq}$	0,400	0,808	0,887	0,923	0,943	0,956	0,964	0,970	0,974

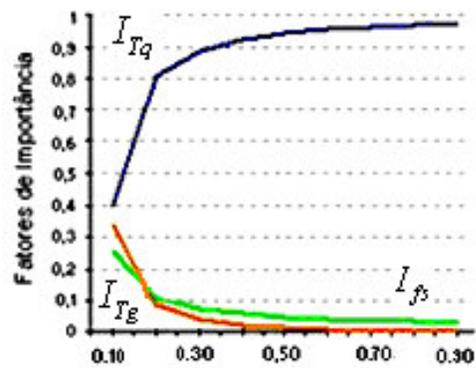
Tabela 5.10 – Fatores de importância: armadura transversal, VTL.

$A_{st}+CFC$ $G_6$	Razão de carga variável $r_q$								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
$I_{fs}$	0,244	0,098	0,065	0,049	0,040	0,033	0,029	0,025	0,023
$I_{Ef}$	0,003	0,001	0,001	–	–	–	–	–	–
$I_{fc}$	0,006	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	–	–
$I_{Tg}$	0,448	0,116	0,055	0,029	0,016	0,009	0,004	0,002	–
$I_{Tq}$	0,299	0,782	0,879	0,920	0,943	0,957	0,966	0,972	0,976

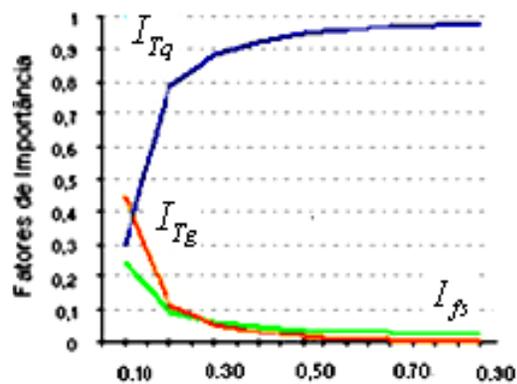
A Figura 5.9 ilustra os fatores de importância relativa  $I$  versus variação da razão de carga variável  $r_q$  para a viga VTL (Tabelas 5.8, 5.9 e 5.10). Foram consideradas para cada modo de falha as três variáveis cujos valores de importância  $I$  mostram-se mais significativos: biela de concreto –  $I_{fc}$ ,  $I_{Tg}$  e  $I_{Tq}$ ,  $A_{sl}+CFC$  –  $I_{fs}$ ,  $I_{Tg}$  e  $I_{Tq}$ ,  $A_{st}+CFC$  –  $I_{fs}$ ,  $I_{Tg}$  e  $I_{Tq}$ .



a) Biela



b) Asl +CFC



c) Ast+CFC

Figura 5.9 – Fatores de importância  $I$  das *versus* razão de carga var.  $r_q$ , VTL.

As Figuras 5.10 a 5.15 ilustram percentualmente os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis consideradas para a elaboração das Figuras 5.3 e 5.4, para as razões de carga variável  $r_q$  iguais a 0,10; 0,5 e 0,9.

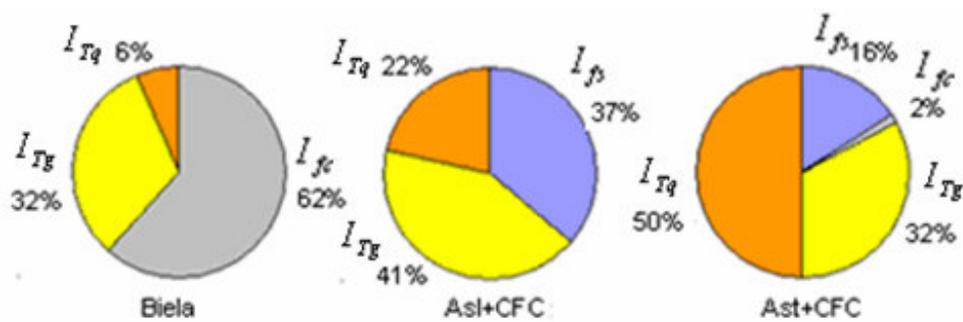


Figura 5.10 – Fatores de importância  $r_q = 0,10$ , viga VT.

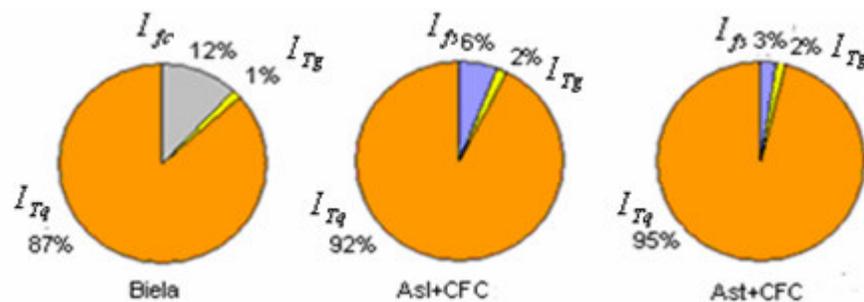


Figura 5.11 – Fatores de importância  $r_q = 0,50$ , viga VT.

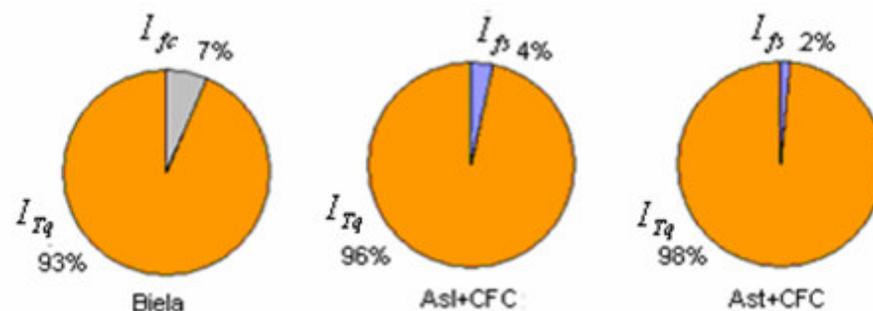


Figura 5.12 – Fatores de importância  $r_q = 0,90$ , viga VT.

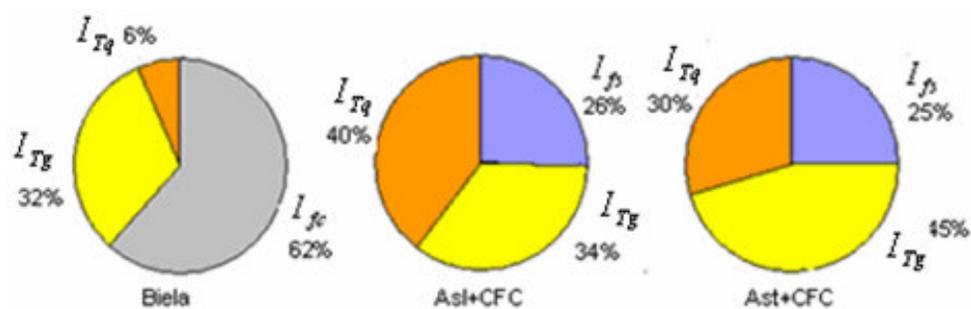


Figura 5.13 – Fatores de importância  $r_q = 0,10$ , viga VTL.

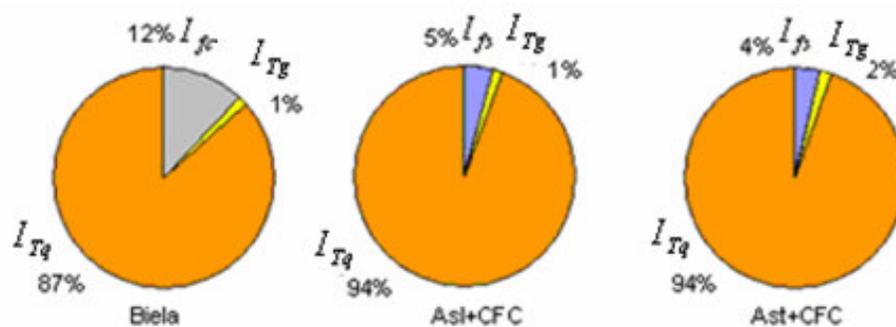


Figura 5.14 – Fatores de importância  $r_q = 0,50$ , viga VTL.

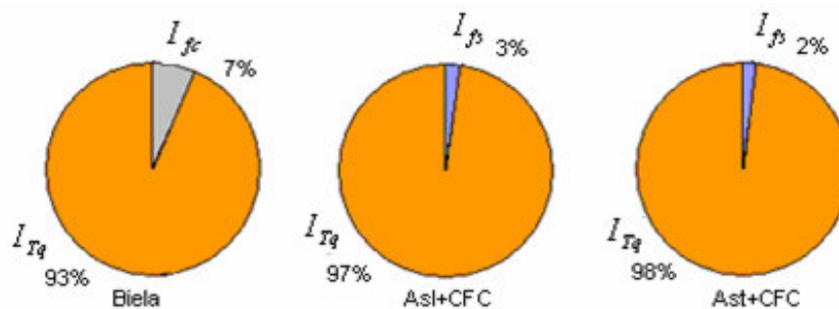


Figura 5.15 – Fatores de importância  $r_q = 0,90$ , viga VTL.

A partir dos valores mostrados nas Tabelas 5.5 a 5.10 e com as Figuras 5.10 a 5.15 pode-se constatar que: a) o fator de importância de todas as variáveis, inclusive o da variável resistência do concreto  $I_{fc}$ , na análise da biela de concreto decresce com o aumento da razão de carga variável  $r_q$ , devido ao grande coeficiente de variação  $\delta_q$  e à FDP Gumbel da mesma; b) os fatores de importância relativa  $I$  de todas as variáveis na análise da biela de concreto mantiveram-se praticamente iguais nas vigas VT e VTL; c) os fatores de importância da variável módulo de elasticidade do CFC  $I_{Ef}$  mantiveram-se reduzidos em todas as análises, não obstante à razão de carga variável  $r_q$ , devendo-se esse fato ao baixo coeficiente de variação  $\delta_{Ef}$  da mesma; d) o acréscimo do fator de importância da variável resistência do aço  $I_{fs}$  nas análises A<sub>sl</sub>+CFC e A<sub>st</sub>+CFC em relação a análise biela de concreto.

Conclui-se ser relevante a importância da solicitação variável  $T_q$  na análise de confiabilidade das vigas VT e VTL. Os seus fatores de importância  $I_{Tq}$  atingem grandes valores em relação às demais variáveis envolvidas para razões de carga variável  $r_q$  regularmente encontradas em projetos estruturais, confirmando-se assim a importância de se considerar coeficientes parciais de segurança específicos para ações permanentes e variáveis.

O baixo valor do fator de importância de variáveis em análise de confiabilidade possibilita um tratamento determinístico às mesmas. Assim sendo,

as vigas VT e VTL foram reanalisadas considerando-se apenas a aleatoriedade da solicitação variável  $T_q$  e da resistência do concreto  $f_c$ .

As demais variáveis foram consideradas determinísticas e o carregamento utilizado nessa análise foi o referente à razão de carga variável  $r_q = 0,50$ .

A Tabela 5.11 mostra os valores dos índices de coeficiente  $\beta_{sist}^2$  e  $\beta_{sist}^5$ , obtidos na análise de confiabilidade das vigas VT e VTL, com a utilização do método analítico *FORM*, respectivamente, com duas variáveis aleatórias  $f_c$  e  $T_q$  e cinco variáveis aleatórias  $f_c, E_f, T_q, T_g$  e  $f_s$ .

Tabela 5.11 – Resultados da análise de confiabilidade:  $\beta_{sist}^2$  e  $\beta_{sist}^5$ .

Vigas	Funções de Falha $G_i$	$\beta_i$ 2 var	$\beta_i$ 5 var	$\beta_{sist}^2$	$p_{fsist}^2$	$\beta_{sist}^5$	$p_{fsist}^5$
VT	Biela $G_4$	4,04	4,01	4,00	$3,15 \times 10^{-5}$	3,90	$4,88 \times 10^{-5}$
	A. Long. $G_5$	4,14	3,97				
	A. Tran. $G_6$	4,50	4,41				
VTL	Biela $G_4$	4,03	4,00	3,84	$6,05 \times 10^{-5}$	3,74	$9,17 \times 10^{-5}$
	A. Long. $G_5$	4,63	4,49				
	A. Tran. $G_6$	3,88	3,77				

A partir dos dados da Tabela 5.11 constata-se que os valores dos índices de confiabilidade  $\beta_i$  referente a cada equação de falha  $G_i$ , os índices de confiabilidade do sistema  $\beta_{sist}^2$  e  $\beta_{sist}^5$ , e suas respectivas probabilidades de falha  $p_{fsist}^2$  e  $p_{fsist}^5$ , diferenciam-se pouco entre si, em consequência dos baixos fatores de importância das variáveis aleatórias cujos valores foram considerados determinísticos.

Os valores obtidos validam os estudos realizados com os fatores de importância das variáveis.

Conforme anteriormente observado, o acréscimo da probabilidade de falha das vigas VT e VTL em decorrência do aumento da parcela de ação variável é uma consequência do tratamento distinto dado por meio da análise probabilística, onde são considerados os respectivos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias envolvidas. Assim sendo, conduziu-se estudo com o objetivo de

ressaltar a importância do coeficiente de variação  $\delta_q$  e da FDP da ação variável  $q$ .

Esse estudo foi realizado considerando-se as mesmas configurações de reforço das vigas VT e VTL e os mesmos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias (Tabela 5.2), excetuando-se o das solicitações variáveis  $T_q$  cujos valores são definidos na Tabela 5.12. Utilizou-se nesse estudo o método analítico *FORM*.

Tabela 5.12 – Solicitações variáveis (kNm).

Análises	Valores Característicos	Valores médios	Coef. variação	FDP
A	1,0	1,0	0,10 a 0,40	Gumbel
B	1,0	1,0	0,10	Normal
	1,0	1,0	0,25	Gumbel
	1,0	1,0	0,10	Gumbel

A análise A foi conduzida com o objetivo de ilustrar a importância do valor dos coeficientes de variação  $\delta_q$  em uma análise de confiabilidade, sendo considerado o carregamento cuja razão de carga variável é  $r_q = 0,50$ .

As Figuras 5.16 e 5.17 mostram os índices de confiabilidade *versus* coeficiente de variação para as vigas VT e VTL, respectivamente. Observa-se (análise A) que a maior ou menor dispersão dos valores da solicitação variável  $T_g$  em torno do seu valor médio, definida segundo o seu coeficiente de variação  $\delta_q$ , conduz, respectivamente, a valores menores ou maiores de índices de confiabilidade estrutural.

Esse aspecto ressalta os valores elevados dos fatores de importância relativa das ações variáveis  $I_{Tq}$ , pois essas apresentam, segundo o JCSS (2001), um coeficiente de variação igual a 0,25.

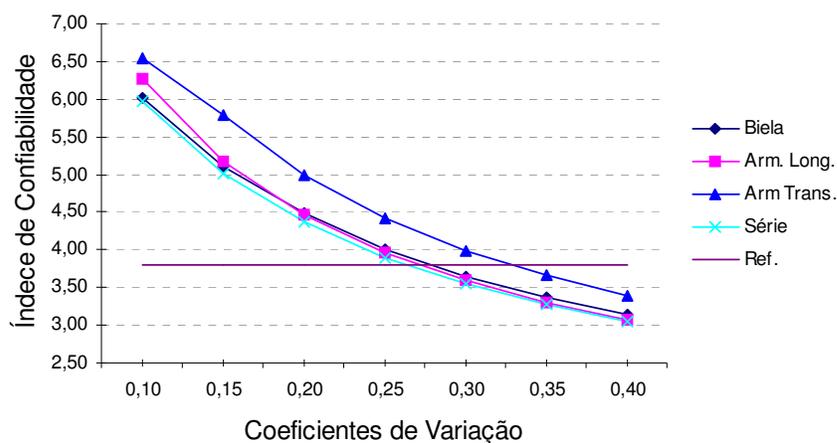


Figura 5.16 – índices de confiabilidade *versus* coeficiente de variação da ação variável  $\delta_q$  – Viga VT.

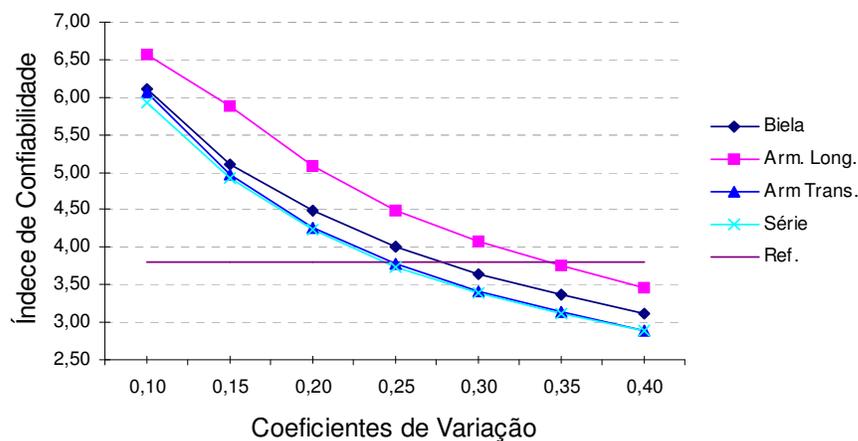


Figura 5.17 – índices de confiabilidade *versus* coeficiente de variação da ação variável  $\delta_q$  – Viga VTL.

A análise B tem como objetivo ilustrar a importância do modelo probabilístico adotado para as ações variáveis (Tabela 5.12). Nessa análise os carregamentos considerados foram aqueles cujas razões de carga variável  $r_q$  são iguais a 0,40; 0,50 e 0,60.

A Figura 5.18 mostra a variação dos índices de confiabilidade das vigas VT e VTL, em decorrência da variação da razão de carga variável  $r_q$  para os três modelos probabilísticos adotados para as ações variáveis  $q$ .

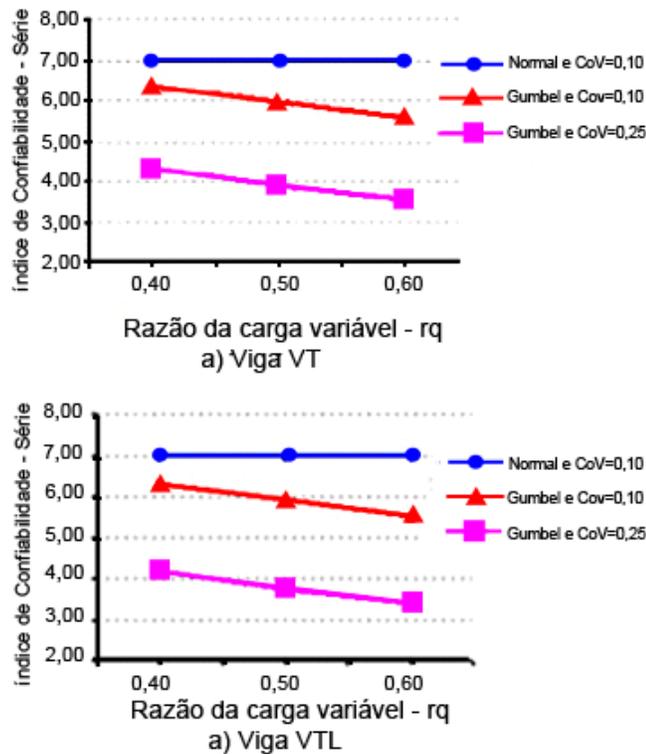


Figura 5.18 – índices de confiabilidade *versus* razão de carga variável  $r_q$ , Vigas VT e VTL.

Os diferentes valores obtidos para os índices de confiabilidade com a mesma razão de carga variável  $r_q$  (Figura 5.18), realçam a relevância do modelo probabilístico adotado para a ação variável  $q$ .

Os valores obtidos quando as ações variáveis foram representadas a partir de uma FDP Gumbel com coeficientes de variação  $\delta_q$  iguais a 0,10 e 0,25 mostram, conforme anteriormente observado, o decréscimo do índice de confiabilidade e consequente aumento da probabilidade de falha da estrutura em decorrência do acréscimo do coeficiente de variação.

Os valores obtidos nas análises, onde os coeficientes de variação  $\delta_q = 0,10$  e as funções densidades de probabilidade FDP foram a Normal e a Gumbel, mostram o decréscimo dos mesmos a partir do acréscimo da razão de carga variável  $r_q$ , ao se adotar, conforme sugestão do JCSS (2001), essa última para representar as ações variáveis  $q$  na análise de confiabilidade estrutural.

### 5.3 VIGA MACIÇA EM CONCRETO ARMADO

Nesse exemplo é realizada uma análise de confiabilidade de uma viga de seção maciça de concreto armado, inicialmente sem reforço e posteriormente reforçada para atender a um índice de confiabilidade pré- estabelecido.

A Figura 5.19 mostra as características geométricas da viga de concreto armado analisada nesse exemplo.

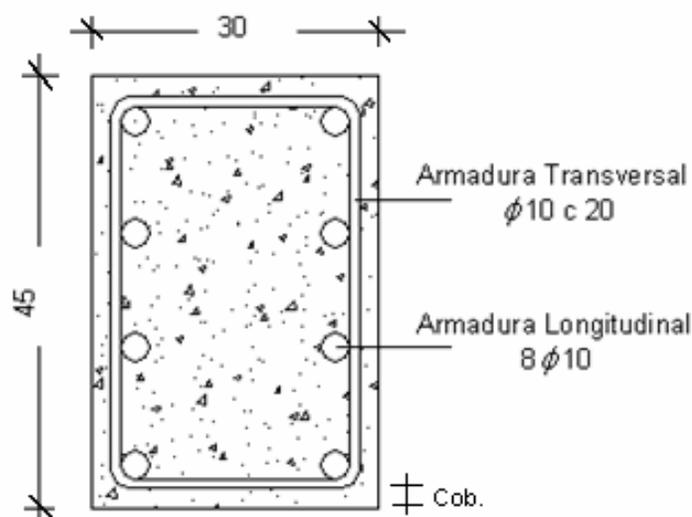


Figura 5.19 – Características geométricas da viga analisada.

Essa análise considerou uma solicitação de momento de torção de valor médio igual a 30 kNm, sendo esse constituído por parcelas variáveis de carga permanente  $g$  e ação variável  $q$ , definidas em função das razões de carga variável  $r_q$  adotadas.

A análise constituiu-se de duas etapas: inicialmente, ainda sem reforço, foram obtidos os índices de confiabilidade do sistema em série e as respectivas probabilidades de falha dos mesmos para as várias razões de carga variável  $r_q$ , posteriormente foram dimensionadas com base em análise de confiabilidade, segundo a metodologia desenvolvida por SILVA FILHO (2007), as taxas geométricas de armadura transversal de reforço  $\rho_{ft}$  com o objetivo de alcançar o índice de confiabilidade de referência  $\beta_a = 3,8$ .

Utilizou-se nessa análise o método analítico *FORM*.

Os valores dos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias utilizados nesse exemplo são definidos nas Tabelas 4.2 e 4.3 e transcritos na Tabela 5.13.

Tabela 5.13 – Valores para os modelos probabilísticos do concreto, do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações; JCSS(2001), exemplo 2.

Variáveis Básicas	Resist. caract.	Resist. média	Desvio padrão	Coef. variação	FDP
Concreto (MPa)	25	31,6	4	0,13	Lognormal
Aço (MPa)	500	560	30	0,0536	Lognormal
Solic. Perm. (kNm)	1,0	1,0	–	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm)	1,0	1,0	–	0,25	Gumbel

Os estudos teórico-experimentais com vigas de concreto armado reforçadas com CFC mostram que a ruptura do reforço ocorre a partir do descolamento do mesmo.

Os resultados obtidos no exemplo anterior destacam os baixos valores dos fatores de importância relativa  $I_{Ef}$ , possibilitando um tratamento determinístico para a variável módulo de elasticidade  $E_f$ .

Inicialmente foram obtidos os índices de confiabilidade  $\beta_{sist}^4$  e as respectivas probabilidades de falha  $p_{fsist}^4$  da viga de concreto armada sem reforço (Figura 5.14).

Para essa primeira etapa da análise foram utilizadas as equações de falha definidas pelas expressões 4.5.4, 4.5.6, 4.5.7 e 4.5.8.

A Tabela 5.14 mostra os resultados obtidos na análise de confiabilidade da viga sem reforço.

Tabela 5.14 – Resultados da análise da viga sem reforço.

Funções de Falha $G_i$	$T_q$ (kNm)	$T_g$ (kNm)	$r_q = \frac{q}{q+g}$	$\beta_{sist}^4$	$p_{fsist}^4$
'Biela $G_1$	3	27	0,10	2,73	$3,13 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					

Continuação da Tabela 5.14

Funções de Falha $G_i$	$T_q$ (kNm)	$T_g$ (kNm)	$r_q = \frac{q}{q+g}$	$\beta_{sist}^4$	$p_{fsist}^4$
Biela $G_1$	6	24	0,20	2,65	$4,04 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					
Biela $G_1$	9	21	0,30	2,37	$8,98 \times 10^{-3}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					
Biela $G_1$	12	18	0,40	2,09	$1,82 \times 10^{-2}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					
Biela $G_1$	15	15	0,50	1,87	$3,09 \times 10^{-2}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					
Biela $G_1$	18	12	0,60	1,69	$4,60 \times 10^{-2}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					
Biela $G_1$	21	9	0,70	1,54	$6,24 \times 10^{-2}$
A. Long. $G_2$					
A. Tran. $G_3$					

A partir dos valores mostrados na Tabela 5.14 observa-se o decréscimo do índice de confiabilidade e o acréscimo da probabilidade de falha da viga sem reforço, isso em consequência do aumento da razão de carga variável  $r_q$ , ratificando-se os resultados obtidos na análise das vigas VT e VTL.

A Figura 5.20 mostra o gráfico índice de confiabilidade *versus* razão de carga variável  $r_q$  a partir do qual pode-se observar o decréscimo da confiabilidade da viga sem reforço, em consequência de uma maior parcela de solicitação variável na viga.

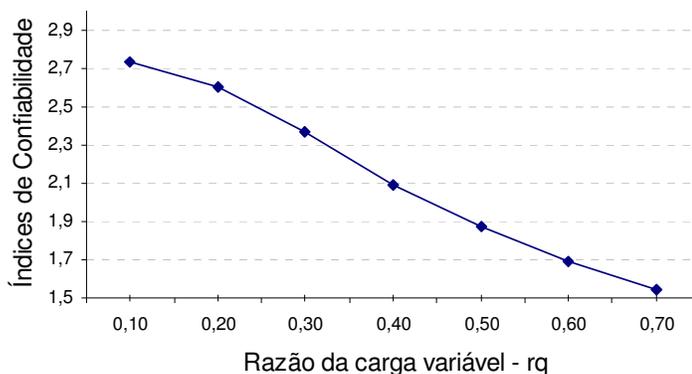


Figura 5.20 – Probabilidade de falha *versus* razão de carga variável  $r_q$ .

Os valores dos índices de confiabilidade obtidos para o sistema em série  $\beta_{sist}^4$  para a viga sem reforço mostraram-se inferiores ao índice de confiabilidade de referência  $\beta_a = 3,8$ , ressaltando-se dessa forma a necessidade de aplicação de reforço.

Assim sendo, prosseguiu-se à segunda etapa da análise onde obteve-se por meio da análise de confiabilidade, as taxas geométricas de armadura transversal de reforço  $\rho_{ft}$ , com o objetivo de elevar o índice de confiabilidade da viga analisada.

Nessa etapa utilizou-se as equações de falha definidas pelas expressões 4.5.5, 4.5.9, 4.5.10 e 4.5.11.

A Tabela 5.15 mostra os resultados obtidos na análise de confiabilidade da viga com reforço. Nessa são mostrados os valores das taxas geométricas de armadura transversal de reforço  $\rho_{ft}$ , assim como os índices de confiabilidade  $\beta_i$  para os modos de falha, e os índices de confiabilidade do sistema  $\beta_{sist}^4$  com suas respectivas probabilidades de falha  $p_{fsist}^4$ , referentes às várias razões de carga variável  $r_q$  adotadas.

Observa-se que os valores dos índices de confiabilidade e probabilidade de falha do sistema em série são, respectivamente, iguais a 3,8 e  $7,23 \times 10^{-5}$  para todas as razões de carga variável  $r_q$ , em consequência da taxa geométrica  $\rho_{ft}$  crescente de reforço de CFC.

Tabela 5.15 – Resultados de análise da viga com reforço.

Funções de Falha $GU_i$	$T_q$ (kNm)	$T_g$ (kNm)	$r_q = \frac{q}{q+g}$	$\rho_{ft}$ (%)	$\beta_i$ c/ref.	$\beta_{sist}^4$ c/ref.	$p_{fsist}^4$ c/ref.
Biela GU <sub>4</sub>	3	27	0,10	0,045	7,67	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,98		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					3,81		
Biela GU <sub>4</sub>	6	24	0,20	0,068	7,08	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,80		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					4,06		
Biela GU <sub>4</sub>	9	21	0,30	0,223	6,19	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,80		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					5,11		
Biela GU <sub>4</sub>	12	18	0,40	0,471	5,49	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,80		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					4,88		
Biela GU <sub>4</sub>	15	15	0,50	0,818	4,92	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,80		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					4,94		
Biela GU <sub>4</sub>	18	12	0,60	1,283	4,44	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,80		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					4,69		
Biela GU <sub>4</sub>	21	9	0,70	1,892	4,02	3,80	$7,23 \times 10^{-5}$
A. Long. GU <sub>5</sub>					3,80		
A. Tran. GU <sub>6</sub>					4,39		

Na Figura 5.21 observa-se o decréscimo do índice de confiabilidade  $\beta_{sist}^4$  da viga sem reforço em decorrência do acréscimo da razão de carga variável  $r_q$  - (Tabela 5.14), e o acréscimo dos mesmos até o valor de referência  $\beta_a$ , alcançado por meio da taxa geométrica de armadura transversal variável de reforço  $\rho_{ft}$  (Tabela 5.15).

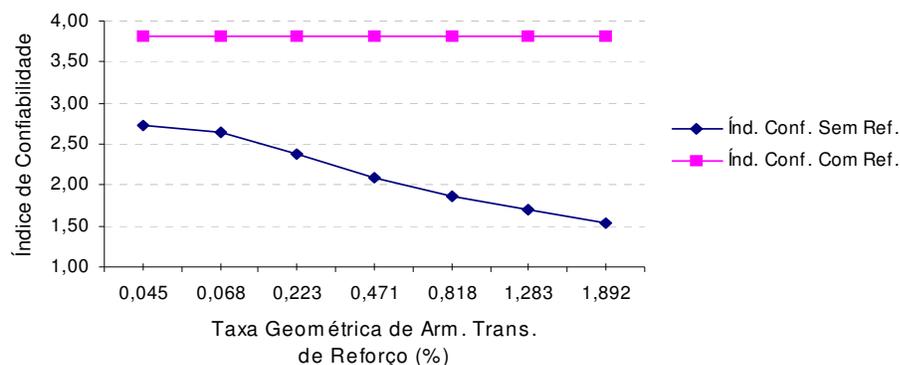


Figura 5.21 – Índice de confiabilidade *versus* taxa geométrica do reforço.

A partir da análise realizada pelo método analítico *FORM* foi possível obter as coordenadas do ponto mais próximo entre a superfície de falha  $G(y) = 0$  e a origem no espaço das variáveis reduzidas, o ponto de projeto  $y^*$ .

A pesquisa desses pontos tem como objetivo a definição dos fatores parciais de segurança das variáveis aleatórias envolvidas na análise realizada para cada razão de carga variável  $r_q$ . Os fatores parciais  $\gamma$  são obtidos para o modo de falha definidor da taxas geométricas de armadura transversal de reforço  $\rho_{ft}$ , ou seja, o modo de falha que apresenta o menor índice de confiabilidade ou maior probabilidade de falha. A Tabela 5.16 mostra os resultados para os modos de falha  $G_i$  e as coordenadas do ponto de projeto  $y^*$  obtidos nessa pesquisa para todas as razões de carga variável  $r_q$ .

Tabela 5.16 – Coordenadas do ponto de projeto  $y^*$ .

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	$\beta_i$	$f_s^*$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c^*$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$T_g^*$ (kNm)	$T_q^*$ (kNm)
A. Tran. $G_6$	0,10	3,81	50,45	3,03	35,27	3,84
A. Long. $G_5$	0,20	3,80	50,86	3,13	28,69	12,07
A. Long. $G_5$	0,30	3,80	52,16	3,13	23,37	21,93
A. Long. $G_5$	0,40	3,80	52,78	3,13	19,29	30,89
A. Long. $G_5$	0,50	3,80	53,15	3,13	15,72	39,48
A. Long. $G_5$	0,60	3,80	53,39	3,13	12,38	49,90
A. Long. $G_5$	0,70	3,80	53,56	3,13	9,18	56,23

A partir dos valores mostrados na Tabela 5.16 conclui-se que os valores de projeto das resistências,  $f_s^*$  e  $f_c^*$ , e os valores de projeto das solicitações,  $T_g^*$  e  $T_q^*$ , apresentam-se diferentes em relação aos valores característicos dos mesmos.

A Tabela 5.17 mostra os valores dos fatores parciais de segurança obtidos a partir dos valores característicos das resistências e solicitações.

Tabela 5.17 – Fatores parciais de segurança.

$r_q$	$\frac{f_{yk}}{f_s^*}$	$\frac{f_{ck}}{f_c^*}$	$\frac{T_g^*}{T_g}$	Fator de Import. $I_{T_g}$	$\frac{T_q^*}{T_q}$	Fator de Import. $I_{T_q}$
0,10	0,99	0,82	1,31	0,649	1,28	0,092
0,20	0,98	0,80	1,20	0,265	2,01	0,519
0,30	0,96	0,80	1,11	0,088	2,44	0,795
0,40	0,95	0,80	1,07	0,036	2,57	0,884
0,50	0,94	0,80	1,05	0,016	2,63	0,922
0,60	0,94	0,80	1,03	0,007	2,66	0,941
0,70	0,93	0,80	1,02	0,003	2,68	0,952

Os valores da Tabela 5.17 mostram que a resistência de projeto do aço  $f_s^*$  e do concreto  $f_c^*$  são maiores que os seus respectivos valores característicos,  $f_{yk}$  e  $f_{ck}$ , aproximadamente 5% para o aço e 20% para o concreto. Os valores de projeto para as ações permanentes  $T_g^*$  mostram-se maiores que os seus valores característicos  $T_g$ , sendo esses próximos para maiores razões de carga variáveis  $r_q$ . Ainda com relação às ações permanentes verifica-se que independente das razões  $r_q$  os valores obtidos para os fatores parciais de segurança são menores que o estabelecido na NBR 8681 (2003). As ações variáveis apresentam-se com valores de projeto  $T_q^*$  bastante elevados em relação aos seus valores característicos  $T_q$ , superando na maioria dos casos das razões  $r_q$  o valor estabelecido na NBR 8681 (2003).

As Figuras 5.22 e 5.23 ilustram, respectivamente, a variação dos valores obtidos para os fatores parciais de segurança e os fatores de importância *versus* razão de carga variável  $r_q$  para as solicitações permanentes e variáveis.

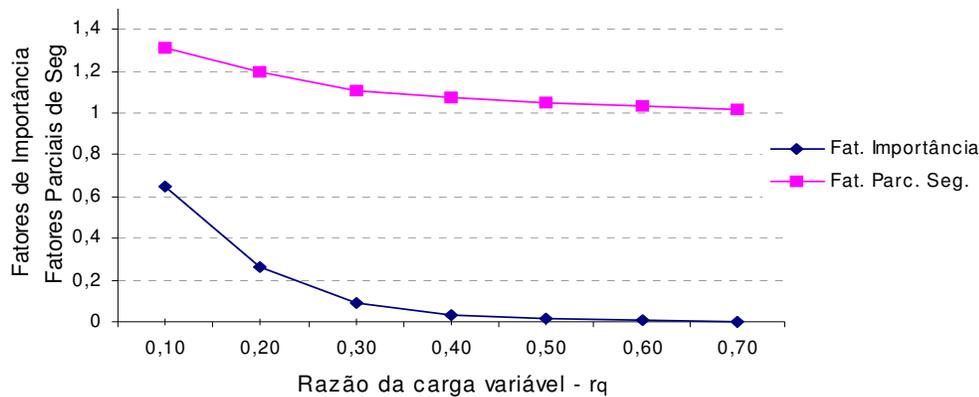


Figura 5.22 – Fatores parciais de segurança  $\gamma_g$  e de importância das solicitações permanentes  $I_{Tg}$  *versus* razão de carga variável  $r_q$ .

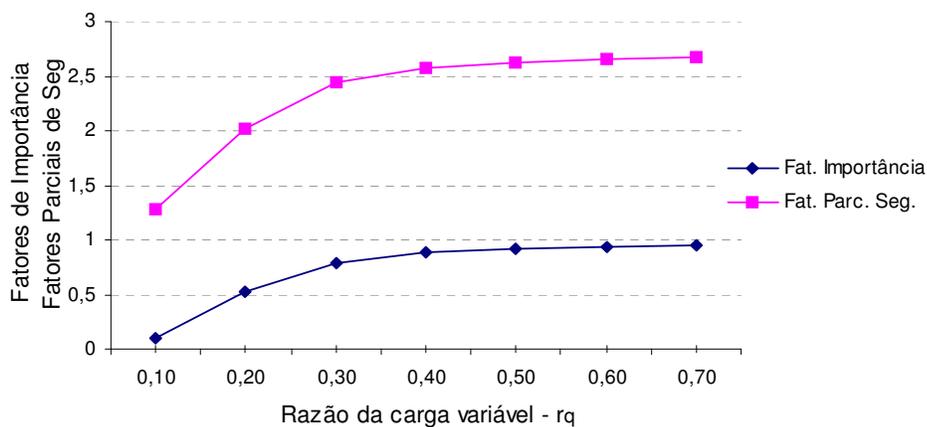


Figura 5.23 – Fatores parciais de segurança e de importância das solicitações variáveis  $I_{Tq}$  *versus* razão de carga variável  $r_q$ .

Um dimensionamento pelo método semi-probabilístico utilizando-se os coeficientes parciais de segurança, calculados com os valores das coordenadas de projeto  $y^*$  e os valores característicos das resistências e solicitações (Tabela 5.17), conduz ao valor de índice de confiabilidade  $\beta_a = 3,8$  para todas as hipóteses de carregamento analisadas.

## 5.4 VIGA CAIXÃO

Esse exemplo tem como objetivo fazer a análise de confiabilidade de uma viga caixão reforçada com CFC, a partir de dois diferentes modelos probabilísticos adotados para representar as variáveis aleatórias, resistência do concreto e do aço. A NBR 6118 (2007) considera a resistência do concreto e do aço representada a partir de uma FDP Normal e o JCSS (2001) a partir de uma FDP Lognormal.

Estuda-se também a variação dos índices de confiabilidade do sistema em série, considerando-se a viga reforçada a partir de duas configurações distintas de reforço: armadura longitudinal ou armadura transversal

Os dados dos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias utilizados são mostrados nas Tabelas 4.2 e 4.3 e transcritos na Tabela 5.18, sendo, no entanto, na primeira análise desse exemplo as variáveis resistência do concreto e do aço representadas também a partir da FDP Normal.

Tabela 5.18 – Valores para os modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações, exemplo 3.

Variáveis Básicas	Resist. caract.	Resist. média	Módulo elast.	Desvio padrão	Coef. variação	FDP
Concreto (MPa)	25	31,6	–	4	0,13	Lognormal
Aço (MPa)	500	560	–	30	0,0536	Lognormal
CFC (GPa)	–	–	256,71	10,21	0,0398	Weibull
Solic. Perm.(kNm)	1,0	1,0	–	–	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,25	Gumbel

Os valores das ações são variáveis em consequência das razões de carga variável  $r_q$ , sendo os seus valores característico e médio iguais.

A Figura 5.24 mostra as características geométricas e a configuração do reforço em aço e CFC da viga caixão analisada nesse exemplo.

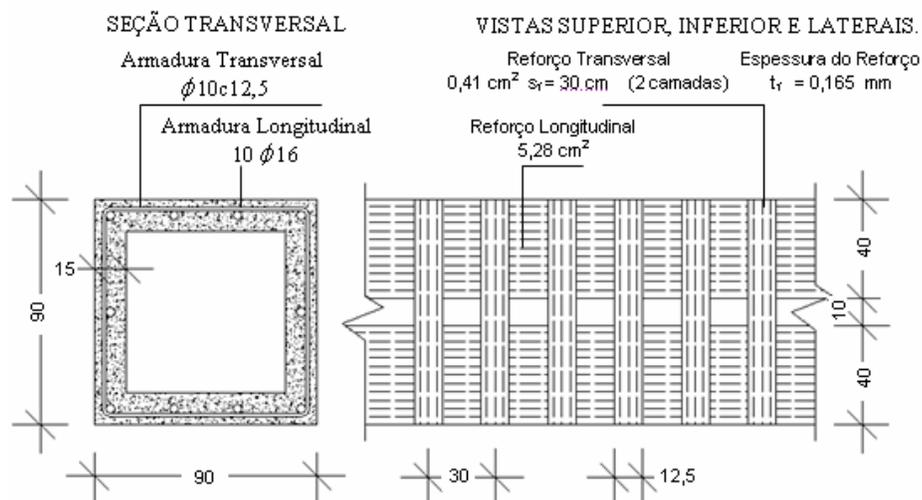


Figura 5.24 – Características geométricas e configuração de reforço em aço e CFC da viga analisada.

A viga mostrada na Figura 5.24 é solicitada por um momento de torção cujo valor médio é 280 kNm. O momento é constituído por parcelas de ação permanente e variável, e as razões de carga variável  $r_q$  adotadas nessa análise são 0,40; 0,50 e 0,60. A Tabela 5.19 mostra os valores dos índices de confiabilidades dos modos de falha  $\beta_i$  e do sistema em série  $\beta_{sist}^5$  obtidos a partir das análises de confiabilidade realizadas por meio do método analítico *FORM*: a) resistências do concreto e do aço representada a partir da FDP Normal; b) resistências do concreto e do aço representada a partir da FDP Lognormal.

Tabela 5.19 – Índices de confiabilidade.

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	(a) $\beta_i$	(a) $\beta_{sist}^5$	(b) $\beta_i$	(b) $\beta_{sist}^5$	$\frac{\beta_i \text{ Nor}}{\beta_i \text{ Log}}$	$\frac{\beta_{sist}^5 \text{ Nor}}{\beta_{sist}^5 \text{ Log}}$
		Normal	Normal	Lognormal	Lognormal		
Biela $G_4$	0,40	6,61	4,23	5,94	4,23	1,11	1,00
A. Long. $G_5$		4,39		4,39		1,00	
A. Tran. $G_6$		4,23		4,23		1,00	
Biela $G_4$	0,50	6,48	3,72	5,80	3,72	1,12	1,00
A. Long. $G_5$		3,90		3,90		1,00	
A. Tran. $G_6$		3,76		3,75		1,00	
Biela $G_4$	0,60	6,41	3,48	5,54	3,38	1,16	1,03
A. Long. $G_5$		3,69		3,54		1,04	
A. Tran. $G_6$		3,57		3,41		1,05	

A partir dos resultados obtidos nas análises (Tabela 5.19) observa-se que para os modos de falha onde a resistência do aço é considerada,  $G_5$  e  $G_6$ , a representação das variáveis aleatórias resistências do concreto e do aço por meio de uma FDP Normal ou Lognormal é pouco afetada, chegando a variação do índice de confiabilidade a um valor máximo de 5%.

Para o modo de falha onde a resistência do concreto é considerada,  $G_4$ , a variação entre os índices de confiabilidade é mais significativa chegando a um valor máximo de 16%.

A variação nos valores dos índices de confiabilidade para os modos de falha mostrou-se maior para os maiores valores de razão de carga variável  $r_q$ . Os índices de confiabilidade do sistema em série não apresentaram, nessas análises, variação significativa nos seus valores.

Estudos com vigas reforçadas com CFC mostram maior eficiência do reforço transversal em relação ao reforço longitudinal.

Nesse exemplo, também são feitos estudos onde a viga caixão é reforçada por duas diferentes configurações de reforço: a) viga longitudinalmente reforçada com CFC; b) viga transversalmente reforçada com CFC.

A taxa geométrica de armadura longitudinal  $\rho_{fl}$  é igual à taxa geométrica de armadura transversal de reforço, igual  $\rho_{fl} = 0,1\%$ , sendo as demais características geométrica e mecânica mantidas inalteradas em relação ao estudo anterior.

Os modelos probabilísticos adotados para o concreto e o aço são os do JCSS (2001).

A Tabela 5.20 mostra os valores obtidos para os índices de confiabilidade dos modos de falha  $\beta_i$  e do sistema em série  $\beta_{sist}^5$ .

Tabela 5.20 – Índices de confiabilidade dos modos de falha e do sistema em série

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	$\beta_i$ ( $A_{fl}$ )	$\beta_{sist}^5$ ( $A_{fl}$ )	$\beta_i$ ( $A_{fl}$ )	$\beta_{sist}^5$ ( $A_{fl}$ )
Biela $GU_4$	0,40	6,55	3,02	6,54	3,19
A. Long. $GU_5$		4,09		3,20	
A. Tran. $GU_6$		3,02		3,99	

Continuação da Tabela 5.20

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	$\beta_i$ ( $A_{fl}$ )	$\beta_{sist}^5$ ( $A_{fl}$ )	$\beta_i$ ( $A_{fi}$ )	$\beta_{sist}^5$ ( $A_{fi}$ )
Biela GU <sub>4</sub>	0,50	6,43	2,69	6,40	2,85
A. Long. GU <sub>5</sub>		3,63		2,85	
A. Tran. GU <sub>6</sub>		2,69		3,55	
Biela GU <sub>4</sub>	0,60	6,42	2,59	6,42	2,73
A. Long. GU <sub>5</sub>		3,45		2,73	
A. Tran. GU <sub>6</sub>		2,59		3,37	

Observa-se a partir dos dados da Tabela 5.20 o decréscimo do índices de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^5$  com a acréscimo da razão de carga variável  $r_q$ , ressaltando-se, no entanto maior valor para mesmos quando a viga é reforçada transversalmente.

## 5.5 FATORES DE MODELAGEM

Esse exemplo tem como objetivo avaliar as consequências da aplicação dos fatores de modelagem de efeito de carga  $\phi_s$  e de resistência  $\phi_R$ , tomados como variáveis aleatórias na análise de confiabilidade da seção transversal de uma viga solicitada a torção pura reforçada com CFC.

O fator de modelagem de efeito de carga  $\phi_s$  procura levar em conta as incertezas envolvidas nos modelos de análise que modelam a transferência das cargas aplicadas para os esforços solicitantes. Em geral esses modelos usam a análise linear elástica que não leva em conta a fissuração e outros efeitos não lineares.

O fator de modelagem de resistência  $\phi_R$  procura levar em conta as incertezas envolvidas nos modelos de resistência dos elementos estruturais.

A viga analisada nesse exemplo foi a da série VTL, adotada nos estudos de SILVA FILHO (2007), cuja configuração de reforço é ilustrada nas Figuras 2.18 e 2.20.

Os modelos probabilísticos das variáveis aleatórias utilizados são mostrados na Tabela 5.21, transcritos das Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4.

Tabela 5.21 – Valores para os modelos probabilísticos das resistências do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC, das ações e dos fatores de modelagem, exemplo 4.

Variáveis Básicas	Resist. caract.	Resist. média	Módulo elast.	Desvio padrão	Coef. variação	PDF
Concreto (MPa)	30	36,6	–	4	0,11	Lognormal
Aço (MPa)	500	560	–	30	0,0536	Lognormal
CFC (GPa)	–	–	256,71	10,21	0,0398	Weibull
Solic Perm. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,25	Gumbel
$\phi_S$	1,0	1,0	–	0,10	0,10	Lognormal
$\phi_R$	1,4	1,4	–	0,35	0,25	Lognormal

Os valores característicos  $\mu$  e  $\sigma$  das variáveis aleatória  $\phi_S$  e  $\phi_R$  conferem maior relevância à variável  $\phi_R$ , sendo, portanto, dada ênfase à mesma nas análises conduzidas nesse exemplo.

A partir das equações de falha definidas pelas expressões 4.5.9, 4.5.10 e 4.5.11 foram obtidos os índices de confiabilidade  $\beta_i$  para cada modo de falha  $G_i$  e o índice de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^7$ . A utilização do método analítico *FORM* possibilitou a obtenção dos fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias envolvidas.

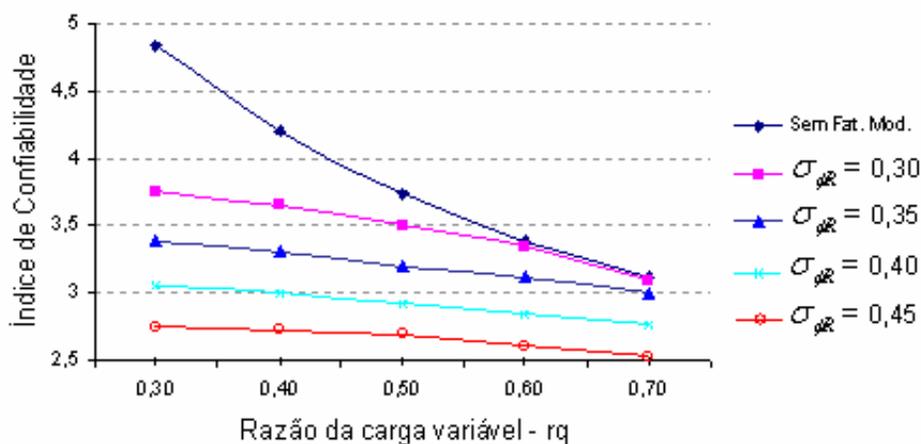
Essa análise considera a aleatoriedade das sete variáveis, cujos modelos probabilísticos são mostrados na Tabela 5.21 e também uma variação nos valores do desvio padrão do fator de modelagem de resistência  $\phi_R$ .

A Tabela 5.2.2 mostra os valores obtidos na análise de confiabilidade conduzida no exemplo 1 para a viga VTL (Tabela 5.4), onde os fatores de modelagem não foram considerados, e os valores obtidos nessa análise onde os mesmos foram considerados. Apresenta-se na mesma os resultados obtidos a partir da variação do desvio padrão  $\sigma_{\phi_R}$  da variável fator de modelagem de resistência  $\phi_R$ .

Tabela 5.22 – Índices de confiabilidade.

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	Sem Fat. Mod. (Tab.5.5)		Fat. Mod. $\sigma_{\phi R} = 0,30$		Fator Mod. $\sigma_{\phi R} = 0,35$		Fator. Mod. $\sigma_{\phi R} = 0,40$		Fator Mod. $\sigma_{\phi R} = 0,45$	
		$\beta_i$	$\beta_{sist}^5$	$\beta_i$	$\beta_{sist}^7$	$\beta_i$	$\beta_{sist}^7$	$\beta_i$	$\beta_{sist}^7$	$\beta_i$	$\beta_{sist}^7$
Biela $G_4$	0,30	5,04	4,84	3,99	3,76	3,59	3,38	3,24	3,06	2,94	2,75
A. Long. $G_5$		5,82		4,36		3,91		3,53		3,20	
A. Tran. $G_6$		4,90		3,78		3,38		3,06		2,75	
Biela $G_4$	0,40	4,46	4,20	3,87	3,65	3,51	3,31	3,20	3,00	2,92	2,72
A. Long. $G_5$		5,06		4,21		3,82		3,47		3,16	
A. Tran. $G_6$		4,25		3,66		3,31		3,00		2,72	
Biela $G_4$	0,50	4,00	3,74	3,72	3,51	3,41	3,20	3,12	2,92	2,87	2,70
A. Long. $G_5$		4,49		4,03		3,69		3,38		3,10	
A. Tran. $G_6$		3,77		3,51		3,21		2,93		2,70	
Biela $G_4$	0,60	3,66	3,39	3,56	3,36	3,29	3,12	3,04	2,85	2,80	2,60
A. Long. $G_5$		4,08		3,84		3,56		3,28		3,03	
A. Tran. $G_6$		3,42		3,36		3,13		2,85		2,62	
Biela $G_4$	0,70	3,37	3,12	3,41	3,10	3,17	3,00	2,95	2,76	2,73	2,53
A. Long. $G_5$		3,76		3,67		3,42		3,18		2,95	
A. Tran. $G_6$		3,14		3,11		3,00		2,76		2,55	

A Figura 5.25 ilustra a variação dos índices de confiabilidade do sistema em série *versus* variação da razão de carga variável para todos os valores de desvio padrão  $\sigma_{\phi R}$  considerados nessa análise.

Figura 5.25 – Índice de confiabilidade *versus* razão de carga variável  $r_q$ .

A partir dos dados da Figura 5.25 conclui-se que a consideração dos fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$  na análise de confiabilidade aumenta significativamente a probabilidade de falha avaliada de uma estrutura.

Para os modelos probabilísticos adotados do JCSS (2001), onde o desvio padrão é  $\sigma_{\phi_R} = 0,35$ , a redução do índice de confiabilidade do sistema para as razões de carga variável  $r_q = 0,4$ ;  $r_q = 0,5$  e  $r_q = 0,6$  são, respectivamente, 27%, 17% e 9% (Tabela 5.22). Observa-se que o decréscimo nos valores do índice de confiabilidade são mais significativos para as menores razões de carga variável  $r_q$ , devido ao fato dos fatores de importância do fator de modelagem da resistência  $I_{\phi_R}$  diminuírem com o acréscimo das razões  $r_q$ , conforme mostram as Tabelas 5.23 a 5.26.

A variação do desvio padrão da variável aleatória  $\phi_R$  possibilita observar a importância de bem definir-se a dispersão da variável em torno da média.

A Figura 5.26 mostra a variação dos valores dos índices de confiabilidade do sistema em série *versus* variação do desvio padrão da variável aleatória  $\phi_R$ .

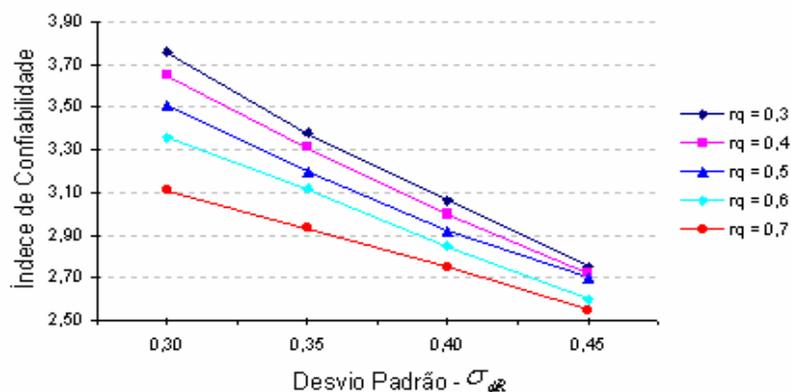


Figura 5.26 – Índice de confiabilidade sistema em série *versus* variação do desvio padrão  $\sigma_{\phi_R}$  da variável aleatória  $\phi_R$ .

Observa-se que o índice de confiabilidade decresce acentuadamente com o aumento do desvio padrão da variável  $\phi_R$  para todos os valores de razão de carga variável  $r_q$ . Os dados das Tabelas 5.23 a 5.26 mostram os fatores de importância das variáveis aleatórias consideradas nas análises com valores de desvio padrão  $\sigma_{\phi_R} = 0,30$ ,  $\sigma_{\phi_R} = 0,35$ ,  $\sigma_{\phi_R} = 0,40$  e  $\sigma_{\phi_R} = 0,45$ .

Tabela 5.23 – Fatores de importância das variáveis aleatórias com  $\sigma_{\phi R} = 0,30$ .

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	$I_{fs}$	$I_{Ef}$	$I_{fc}$	$I_{Tg}$	$I_{Tq}$	$I_{\phi S}$	$I_{\phi R}$
Biela $G_4$	0,30	–	–	0,081	0,049	0,124	0,136	0,610
A. Long. $G_5$		0,030	–	–	0,048	0,145	0,143	0,635
A. Tran. $G_6$		0,026	–	–	0,052	0,129	0,145	0,648
Biela $G_4$	0,40	–	–	0,072	0,027	0,236	0,122	0,542
A. Long. $G_5$		0,026	–	–	0,026	0,270	0,125	0,553
A. Tran. $G_6$		0,023	–	–	0,030	0,244	0,129	0,573
Biela $G_4$	0,50	–	–	0,062	0,014	0,339	0,107	0,477
A. Long. $G_5$		0,023	–	–	0,013	0,373	0,109	0,482
A. Tran. $G_6$		0,020	–	–	0,016	0,349	0,113	0,502
Biela $G_4$	0,60	–	–	0,055	0,007	0,418	0,095	0,425
A. Long. $G_5$		0,020	–	–	0,006	0,447	0,097	0,430
A. Tran. $G_6$		0,018	–	–	0,008	0,428	0,100	0,446
Biela $G_4$	0,70	–	–	0,049	0,003	0,476	0,086	0,386
A. Long. $G_5$		0,018	–	–	0,003	0,501	0,087	0,390
A. Tran. $G_6$		0,016	–	–	0,003	0,488	0,090	0,402

Tabela 5.24 – Fatores de importância das variáveis aleatórias com  $\sigma_{\phi R} = 0,35$ .

Funções de Falha	$r_q$	$I_{fs}$	$I_{Ef}$	$I_{fc}$	$I_{Tg}$	$I_{Tq}$	$I_{\phi S}$	$I_{\phi R}$
Biela $G_4$	0,30	–	–	0,066	0,044	0,088	0,113	0,689
A. Long. $G_5$		0,025	–	–	0,044	0,099	0,118	0,715
A. Tran. $G_6$		0,021	–	–	0,047	0,090	0,119	0,723
Biela $G_4$	0,40	–	–	0,060	0,027	0,172	0,105	0,636
A. Long. $G_5$		0,022	–	–	0,026	0,193	0,108	0,650
A. Tran. $G_6$		0,020	–	–	0,029	0,175	0,110	0,666
Biela $G_4$	0,50	–	–	0,054	0,015	0,262	0,095	0,574
A. Long. $G_5$		0,020	–	–	0,014	0,288	0,097	0,581
A. Tran. $G_6$		0,018	–	–	0,016	0,266	0,099	0,601
Biela $G_4$	0,60	–	–	0,048	0,007	0,340	0,086	0,518
A. Long. $G_5$		0,018	–	–	0,007	0,365	0,087	0,523
A. Tran. $G_6$		0,016	–	–	0,008	0,345	0,089	0,541
Biela $G_4$	0,70	–	–	0,044	0,003	0,402	0,078	0,473
A. Long. $G_5$		0,016	–	–	0,003	0,425	0,079	0,477
A. Tran. $G_6$		0,015	–	–	0,004	0,408	0,081	0,492

Tabela 5.25 – Fatores de importância das variáveis aleatórias com  $\sigma_{\phi R} = 0,40$ .

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	$I_{fs}$	$I_{Ef}$	$I_{fc}$	$I_{Tg}$	$I_{Tq}$	$I_{\phi S}$	$I_{\phi R}$
Biela $G_4$	0,30	–	–	0,054	0,039	0,066	0,095	0,747
A. Long. $G_5$		0,020	–	–	0,039	0,072	0,098	0,771
A. Tran. $G_6$		0,018	–	–	0,041	0,067	0,098	0,776
Biela $G_4$	0,40	–	–	0,051	0,025	0,128	0,090	0,706
A. Long. $G_5$		0,019	–	–	0,024	0,141	0,092	0,723
A. Tran. $G_6$		0,017	–	–	0,026	0,129	0,093	0,734
Biela $G_4$	0,50	–	–	0,047	0,014	0,202	0,083	0,653
A. Long. $G_5$		0,018	–	–	0,014	0,221	0,085	0,663
A. Tran. $G_6$		0,016	–	–	0,015	0,204	0,086	0,679
Biela $G_4$	0,60	–	–	0,043	0,008	0,274	0,077	0,600
A. Long. $G_5$		0,016	–	–	0,007	0,294	0,077	0,605
A. Tran. $G_6$		0,014	–	–	0,008	0,275	0,079	0,623
Biela $G_4$	0,70	–	–	0,039	0,003	0,335	0,070	0,552
A. Long. $G_5$		0,015	–	–	0,003	0,355	0,071	0,556
A. Tran. $G_6$		0,013	–	–	0,004	0,338	0,073	0,572

Tabela 5.26 – Fatores de importância das variáveis aleatórias com  $\sigma_{\phi R} = 0,45$ .

Funções de Falha $G_i$	$r_q$	$I_{fs}$	$I_{Ef}$	$I_{fc}$	$I_{Tg}$	$I_{Tq}$	$I_{\phi S}$	$I_{\phi R}$
Biela $G_4$	0,30	–	–	0,045	0,034	0,051	0,080	0,790
A. Long. $G_5$		0,017	–	–	0,034	0,055	0,082	0,812
A. Tran. $G_6$		0,015	–	–	0,035	0,052	0,083	0,815
Biela $G_4$	0,40	–	–	0,043	0,023	0,099	0,077	0,759
A. Long. $G_5$		0,016	–	–	0,022	0,107	0,079	0,775
A. Tran. $G_6$		0,014	–	–	0,024	0,099	0,079	0,783
Biela $G_4$	0,50	–	–	0,040	0,014	0,159	0,073	0,715
A. Long. $G_5$		0,015	–	–	0,013	0,171	0,074	0,726
A. Tran. $G_6$		0,014	–	–	0,014	0,159	0,075	0,738
Biela $G_4$	0,60	–	–	0,037	0,007	0,220	0,068	0,667
A. Long. $G_5$		0,014	–	–	0,007	0,236	0,069	0,674
A. Tran. $G_6$		0,013	–	–	0,008	0,220	0,070	0,689
Biela $G_4$	0,70	–	–	0,035	0,004	0,278	0,063	0,621
A. Long. $G_5$		0,013	–	–	0,003	0,294	0,064	0,626
A. Tran. $G_6$		0,012	–	–	0,004	0,278	0,065	0,641

A partir dos dados das Tabelas 5,8 a 5.10 e das Tabelas 5.23 a 5.26, que mostram os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias envolvidas na análise de confiabilidade da viga VTL, sem a consideração do fator de modelagem dos efeitos de carga  $\phi_s$  e do fator de modelagem de resistência  $\phi_R$ , respectivamente, e com a consideração dos mesmos, obteve-se as Figuras 5.27, 5.28 e 5.29. Essas Figuras mostram, respectivamente, para os modos de falha da biela flexo-comprimida, armadura longitudinal de aço e CFC e armadura transversal de aço e CFC a variação dos fatores de importância relativa da ação variável  $I_{Tq}$  e do fator de modelagem da resistência  $I_{\phi R}$  versus razão de carga variável  $r_q$ , para todos os valores de desvio padrão  $\sigma_{\phi R}$  analisados.

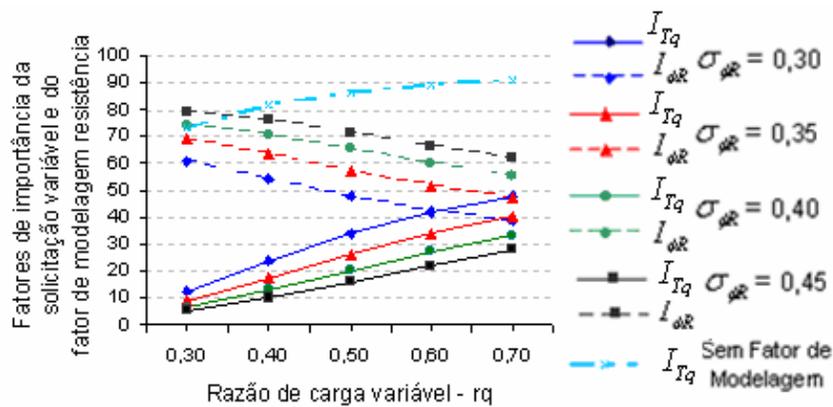


Figura 5.27 – Fatores de importância de  $I_{Tq}$  e  $I_{\phi R}$  versus razão de carga variável  $r_q$  para o modo de falha da biela.

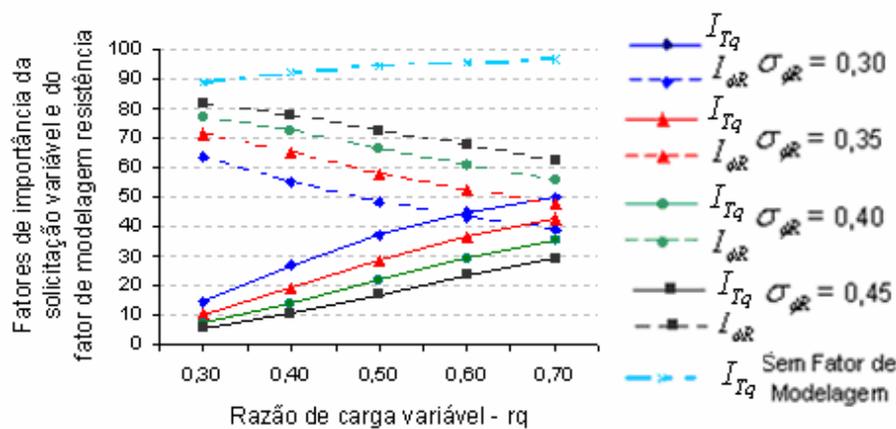


Figura 5.28 – Fatores de importância de  $I_{Tq}$  e  $I_{\phi R}$  versus razão de carga variável  $r_q$  para o modo de falha da armadura longitudinal.

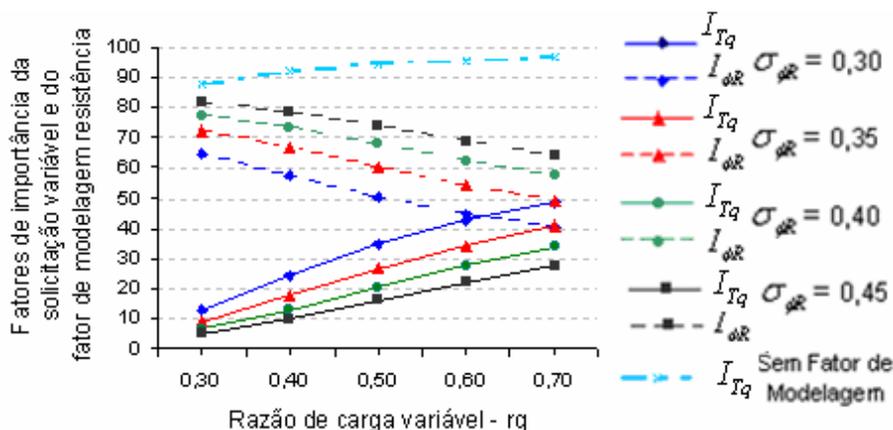


Figura 5.29 – Variação dos fatores de importância de  $I_{Tq}$  e  $I_{\phi R}$  versus razão de carga variável  $r_q$  para o modo de falha da armadura transversal.

A partir das Figuras 5.27 a 5.29 observa-se que ocorre decréscimo para os fatores de importância do  $I_{\phi R}$  e acréscimo no fator de importância  $I_{Tq}$  em consequência do acréscimo da razão de carga variável  $r_q$ .

A majoração dos fatores de importância  $I_{Tq}$ , torna-se menos significativa a partir da consideração dos fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$  na análise.

A variação percentual entre os valores dos fatores de importância  $I_{Tq}$  obtidos na análise sem a consideração dos fatores de modelagem (Tabelas 5.8 a 5.10), e os obtidos na análise que considera os fatores de modelagem a partir dos modelos probabilísticos adotados do JCSS (2001), onde o desvio padrão é  $\sigma_{\phi R} = 0,35$  (Tabela 5.24), são para os valores extremos das razões de carga variável analisados,  $r_q = 0,30$  e  $r_q = 0,70$ , iguais a 735% e 126%; 796% e 127%; 877% e 137%, respectivamente, para os modos de falha da biela, armadura longitudinal e transversal.

Não obstante a consideração dos fatores de modelagem, os fatores de importância relativa  $I_{Tq}$  da solicitação variável  $T_q$  crescem com o valor da razão de carga variável  $r_q$ , sendo esse acréscimo mais acentuado na análise onde os fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$  foram considerados.

Observa-se também o decréscimo dos fatores de importância relativa  $I_{\phi_R}$  da variável aleatória  $\phi_R$  com o acréscimo da razão de carga variável  $r_q$ . Na análise que considera os fatores de modelagem a partir dos modelos probabilísticos adotados do JCSS (2001), onde o desvio padrão é  $\sigma_{\phi_R} = 0,35$  (Tabela 5.24) a variação percentual entre os valores dos fatores de importância de  $\phi_R$  obtidos para os valores extremos das razões de carga variável analisados,  $r_q = 0,30$  e  $r_q = 0,70$ , são iguais a 46%, 50% e 47%, respectivamente, para os modos de falha da biela, armadura longitudinal e transversal.

Os valores dos fatores de importância relativa  $I_{\phi_R}$  da variável fator de modelagem de resistência  $\phi_R$  são acrescidos em consequência do acréscimo do desvio padrão da mesma.

## 5.6 CALIBRAÇÃO DE FATORES PARCIAIS DE SEGURANÇA.

A NBR 6118 (2007) e o ACI 318-05 consideram a aleatoriedade das solicitações permanentes e variáveis a partir de coeficientes parciais de segurança que direrem significativamente: NBR 6118 (2007) –  $\gamma_g = 1,4$  e  $\gamma_q = 1,4$  e ACI 318-05 –  $\gamma_g = 1,2$  e  $\gamma_q = 1,6$ .

Esse exemplo tem como objetivo avaliar os valores dos coeficientes parciais de segurança das solicitações permanentes e variáveis,  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ , que minimizem o erro entre o índice de confiabilidade  $\beta_{sist}^n$ , obtido a partir da análise do sistema em série com  $n$  variáveis aleatórias, e o índice de confiabilidade de referência  $\beta_a = 3,8$ .

A Figura 5.30 mostra o detalhe da seção transversal da viga de concreto armado, solicitada por momento de torção  $T_{sk} = 100$  kNm constituído por parcelas de ação permanente e variável caracterizadas pelas razões de carga variável  $0,2 \leq r_q \leq 0,8$ .

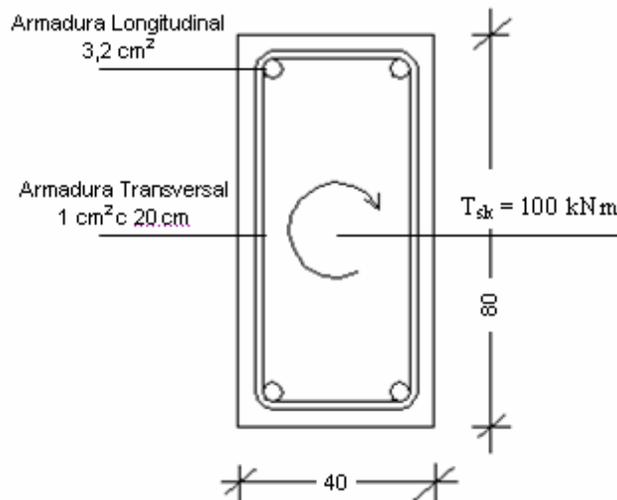


Figura 5.30 – Seção transversal da viga de concreto armado.

O estudo foi conduzido a partir do dimensionamento semi-probabilístico do reforço longitudinal  $A_{fl}$  e transversal  $A_{ft}$  de acordo com SILVA FILHO (2007).

A Tabela 5.27 mostra os valores dos coeficientes parciais de segurança utilizados no dimensionamento semi-probabilístico.

Tabela 5.27 – Coeficientes parciais de segurança.

Variáveis	Coeficientes
Concreto	$\gamma_c = 1,40$
Aço	$\gamma_s = 1,15$
CFC	$\gamma_f = 1,30$
Ação Perm.	$\gamma_g = 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$
Ação Variáv.	$\gamma_q = 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$

Os coeficientes parciais de segurança das solicitações permanente  $\gamma_g$  e variável  $\gamma_q$  deram origem a 16 valores de momento de torção de cálculo  $T_{sd}$  para cada razão de carga variável  $r_q$  (0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8), totalizando assim 112 dimensionamentos semi-probabilísticos de reforço com CFC. Esses momentos foram obtidos a partir da expressão 4.4.1.

Após o dimensionamento semi-probabilístico foram realizadas análises de confiabilidade, obtendo-se os 112 índices de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^5$ , referentes às áreas de reforço longitudinal  $A_{fl}$  e transversal  $A_{ft}$  calculadas.

Os dados dos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias utilizados na análise de confiabilidade são mostrados na Tabela 5.28, transcritos das Tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 5.28 – Valores dos modelos probabilísticos das resist. do concreto e do aço, do módulo de elasticidade do CFC e das ações perm. e variável, exemplo 5.

Variáveis Básicas	Resist. caract.	Resist. média	Módulo elast.	Desvio padrão	Coef. variação	PDF
Concreto (MPa)	25	36,6	–	4	0,11	Lognormal
Aço (MPa)	500	560	–	30	0,0536	Lognormal
CFC(GPa)	–	–	256,71	10,21	0,0398	Weibull
Solic. Perm. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,10	Normal
Solic Varia. (kNm)	1,0	1,0	–	–	0,25	Gumbel

Os valores das solicitações variáveis e permanentes são variáveis em consequência das razões de carga variável  $r_q$  sendo, no entanto, os seus valores característicos considerados iguais aos seus valores médios.

Com os valores dos índices de confiabilidade do sistema calculados em função dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ , mostrados na Tabela 5.27, foi possível, a partir da interpolação polinomial de Lagrange definida pela expressão 5.6.1, obter a função aproximada da superfície de resposta em termo de índice de confiabilidade para todas as razões de carga variável  $r_q$  analisadas, seguindo-se:

$$Sup\beta_{rq}(\gamma_g, \gamma_q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i(\gamma_g) l_j(\gamma_q) \beta_{rq}(\gamma_{gi}, \gamma_{qj}) \quad (5.6.1)$$

sendo

$$l_i(\gamma_g) = \frac{(\gamma_g - \gamma_{g1})(\gamma_g - \gamma_{g2}) \dots (\gamma_g - \gamma_{gi-1})(\gamma_g - \gamma_{gi+1}) \dots (\gamma_g - \gamma_{gn})}{(\gamma_{gi} - \gamma_{g1})(\gamma_{gi} - \gamma_{g2}) \dots (\gamma_{gi} - \gamma_{gi-1})(\gamma_{gi} - \gamma_{gi+1}) \dots (\gamma_{gi} - \gamma_{gn})} \quad (5.6.2)$$

$$l_j(\gamma_q) = \frac{(\gamma_q - \gamma_{q1})(\gamma_q - \gamma_{q2}) \dots (\gamma_q - \gamma_{qj-1})(\gamma_q - \gamma_{qj+1}) \dots (\gamma_q - \gamma_{qn})}{(\gamma_{qj} - \gamma_{q1})(\gamma_{qj} - \gamma_{q2}) \dots (\gamma_{qj} - \gamma_{qj-1})(\gamma_{qj} - \gamma_{qj+1}) \dots (\gamma_{qj} - \gamma_{qn})} \quad (5.6.3)$$

onde

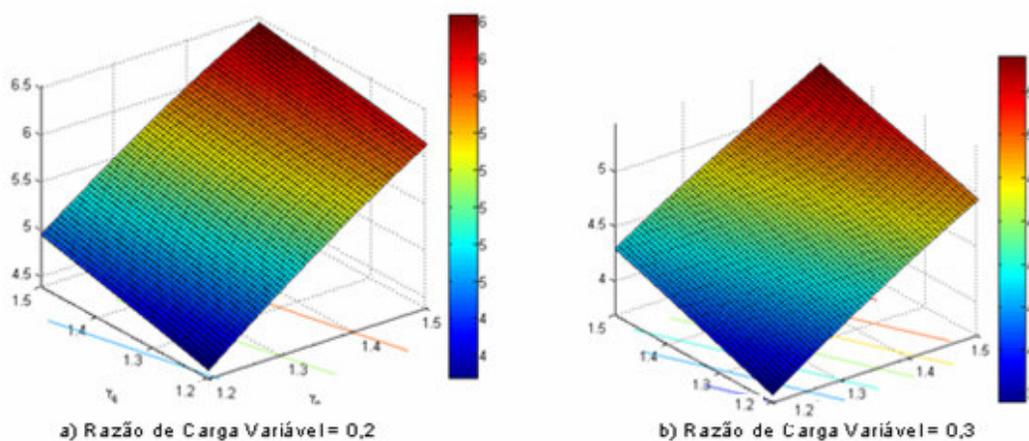
$Sup\beta_{rq}(\gamma_g, \gamma_q)$  – superfície de resposta em termo de índice de confiabilidade obtida a partir dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ , referente a uma dada razão  $r_q$ ;

$l_i(\gamma_g)$  – polinômio de Lagrange definido a partir dos coeficientes parciais de segurança das ações permanentes  $\gamma_g$ , sendo nesse estudo  $i=1\dots 4$ ;

$l_j(\gamma_q)$  – polinômio de Lagrange definido a partir dos coeficientes parciais de segurança das ações variáveis  $\gamma_q$ , sendo nesse estudo  $j=1\dots 4$ .

$\beta_{rq}(\gamma_{gi}, \gamma_{qj})$  – índice de confiabilidade do sistema obtido em função dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ , referente às razões  $r_q$ .

A Figura 5.31 mostra as superfícies de resposta em termos de índice de confiabilidade aproximadas  $Sup\beta_{rq}(\gamma_g, \gamma_q)$ , obtidas a partir da interpolação polinomial de Lagrange para as várias razões de carga variável  $r_q$ .



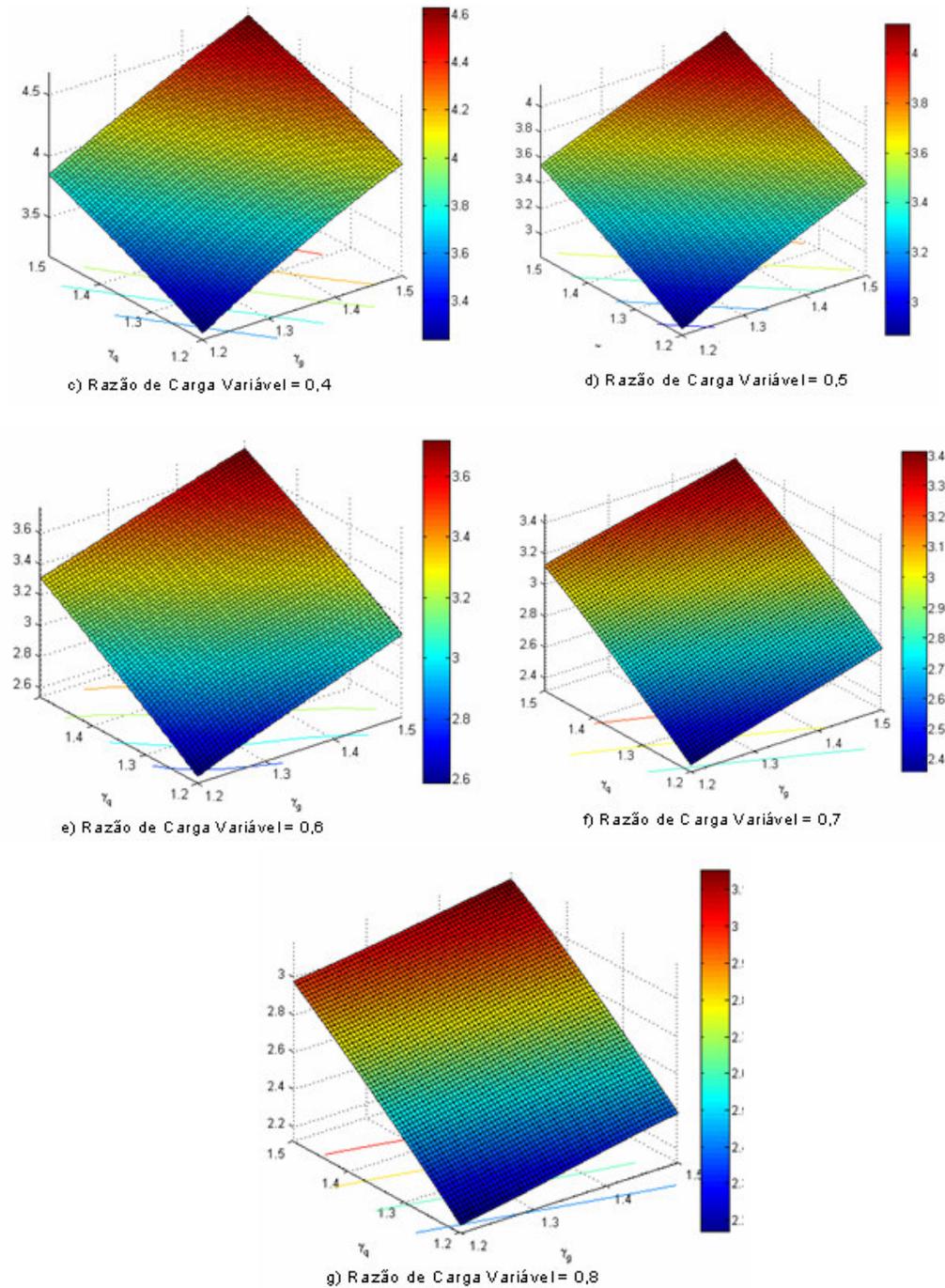


Figura 5.31 – Superfícies de resposta em termos de índice de confiabilidade.

A partir da Figura 5.31 verifica-se a variação do índice de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^5$ , em consequência das parcelas de carga permanente e

variável que compõem o carregamento e os valores dos coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  adotados na análise.

As experiências em projetos de estrutura mostram que as razões de carga variável  $r_q$  mais frequentes são as de valores 0,4; 0,5 e 0,6. Assim sendo, foi elaborado estudo com o objetivo de estabelecer as frequências relativas de carregamento  $w_{rq}$ , referente a todas as razões de carga variável  $r_q$  analisadas.

Nesse estudo as frequências dos carregamentos foram representadas a partir de uma função densidade de probabilidade Normal com média  $\mu = 0,5$  e desvio padrão  $\sigma = 0,12$ .

Os valores característicos dessa variável aleatória  $\mu$  e  $\sigma$  foram arbitrados de forma a aumentar a probabilidade das mesmas assumirem valores entre as razões de carregamentos 0,4 e 0,6. A Figura 5.32 representa a variável frequência de carregamento com a probabilidade da mesma assumir valores entre 0,4 e 0,6 é 0,595.



Figura 5.32 – Função densidade de probabilidade da frequência de carregamento.

Na Tabela 5.29 observa-se os valores das frequências relativas  $w_{rq}$  obtidas para as razões de carga variáveis  $r_q$  desse estudo.

Tabela 5.29 – Frequências relativas dos carregamentos.

$r_q$	$w_{rq}$
0,2	0,015
0,3	0,083
0,4	0,235
0,5	0,332
0,6	0,235
0,7	0,083
0,8	0,015

A partir dos dados da Tabela 5.29 observa-se que o somatório das frequências relativas dos carregamentos, cujas razões  $r_q$  encontram-se entre 0,2 e 0,8, e 0,4 e 0,6 são, respectivamente, iguais a 0,998 e 0,80. Os valores das frequências relativas para os carregamentos cujas razões são menores ou maiores, respectivamente, que 0,2 e 0,8, são desconsiderados nessa análise por apresentarem valores muito próximos de 0.

A calibração dos coeficientes parciais de segurança é definida a partir de um problema de otimização. Esses coeficientes são calibrados de tal forma que os índices de confiabilidade do sistema  $\beta_{sist}^n$ , ou a correspondente probabilidade de falha  $p_{sist}^n$ , apresentem-se o mais próximo possível dos valores de referência, que nesse trabalho são adotados, respectivamente,  $\beta_a = 3,8$  e  $p_{fr} = 7,2 \times 10^{-5}$ , então:

$$\min W(\gamma_g, \gamma_q) = \sum_{rq=1}^7 w_{rq} (\beta_{rq}(\gamma_{gi}, \gamma_{qj}) - \beta_a)^2 \quad (5.6.4)$$

onde

$W(\gamma_g, \gamma_q)$  – superfície de erro obtida em função dos fatores parciais de segurança;

$w_{rq}$  – fator de frequência do carregamento (Tabela 5.29).

O mínimo da expressão 5.6.4, assim como os valores dos coeficientes parciais de segurança das solicitações permanentes  $\gamma_g$  e variáveis  $\gamma_q$ , que levam a esse valor são 0,165; 1,22 e 1,50, respectivamente. Esses valores foram obtidos por meio de rotina desenvolvida no programa de análise numérica – *Mathcad*, sendo consideradas as restrições  $1,2 \leq \gamma_g \leq 1,5$  e  $1,2 \leq \gamma_q \leq 1,5$ .

Os valores obtidos diferem dos valores utilizados no dimensionamento semi-probabilístico segundo a NBR 6118 (2007), onde os coeficientes parciais de segurança  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  são iguais a 1,4.

A Figura 5.33 mostra o desenvolvimento da superfície de erro, na qual observa-se a variação do erro existente entre os valores dos índices de

confiabilidade do sistema obtidos em função dos vários coeficientes parciais de segurança  $\beta_{rq}(\gamma_{gi}, \gamma_{aj})$  e o índice de confiabilidade de referência  $\beta_a$ . Desse modo ratifica-se o valor do mínimo da função e os valores dos coeficientes parciais de segurança que o define.

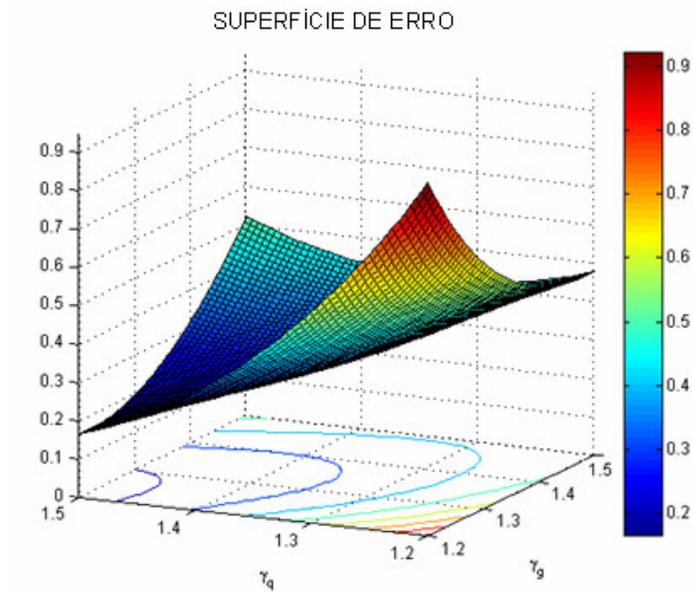


Figura 5.33 – Superfícies de erros.

## 6 CONCLUSÕES E PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 CONCLUSÕES

Em consonância com o objetivo desse trabalho foram elaborados exemplos de análise de confiabilidade em vigas de concreto armado solicitadas à torção pura e reforçadas com compósito de fibra de carbono segundo a metodologia desenvolvida por SILVA FILHO (2007). A partir desses pôde-se obter conclusões relevantes inerentes à segurança das estruturas, conforme a seguir:

Exemplo1: vigas maciças em concreto armado, previamente reforçadas, e solicitadas pelos seus respectivos valores médios de resistência, compostos por parcelas de cargas permanente e variável,  $g$  e  $q$ .

O aumento da parcela inerente a carga variável, não obstante ao valor constante do carregamento total, acarreta decréscimo dos índices de confiabilidade dos modos de falha  $\beta_i$  e do sistema em série  $\beta_{sist}^5$ , fazendo com que ocorra, conseqüentemente, o acréscimo da probabilidade de falha  $p_{fsist}^5$  da estrutura.

Os valores dos índices de confiabilidade  $\beta_{sist}^5$  obtidos a partir do tratamento semi-probabilístico da NBR 6118 (2007) aplicado à metodologia de reforço de SILVA FILHO (2007) mostram inconsistência nos coeficientes parciais de segurança adotados, fornecendo valores abaixo do valor de referência  $\beta_a = 3,8$  para carregamentos compostos por razões carga variável  $r_q$  superiores a aproximadamente 50%.

O decréscimo do índice de confiabilidade  $\beta_{sist}^5$  a partir do acréscimo da parcela de carga variável é consequência da função densidade de probabilidade de valores extremos PDF que a representa e do seu elevado valor de coeficiente de variação  $\delta_q$ .

Os fatores de importância relativa  $I$  das variáveis aleatórias diferentes de  $T_q$  envolvidas na análise decrescem em função do acréscimo da parcela de carga variável que compõe o carregamento em todos os estudos de sensibilidade. Esse fato justifica-se pelo elevado valor do coeficiente de variação  $\delta_q$  da carga variável e pela função densidade de probabilidade que a representa.

O tratamento determinístico das variáveis cujos fatores de importância relativa  $I$  mostraram-se reduzidos conduz a valores de índices de confiabilidade  $\beta_{sist}^2$  muito próximos dos  $\beta_{sist}^5$  obtidos na análise onde todas as variáveis são consideradas, realçando dessa forma a importância do estudo de medida de sensibilidade.

Exemplo2: viga maciça em concreto armado inicialmente sem reforço e posteriormente reforçada probabilisticamente com o objetivo de alcançar o índice de confiabilidade de referência  $\beta_a = 3,8$ , sob a solicitação de um momento de torção constituído de parcelas de cargas permanente e variável.

Decréscimo do índice de confiabilidade da estrutura sem o reforço em decorrência do acréscimo da parcela de carga variável que constitui o carregamento total.

A taxa geométrica de reforço necessária à obtenção de um determinado índice de confiabilidade de referência  $\beta_a$  é majorada a partir do acréscimo da parcela de carga variável do carregamento.

A partir de dimensionamento baseado em confiabilidade da taxa geométrica de reforço observou-se que as resistências de projeto do aço e do concreto são maiores que os seus valores característicos, ressaltando dessa forma incoerência ao adotar, respectivamente, os valores 1,15 e 1,4 no dimensionamento semi-probabilístico do mesmo.

Os valores de projeto das ações permanentes e variáveis mostraram-se maiores que os seus respectivos valores característicos, sendo esse, no entanto acrescidos em função da elevação dos valores dos seus fatores de importância relativa. O valor 1,4 mostrou-se excessivo para obtenção dos valores de projeto das cargas permanentes e insuficiente para obtenção dos valores de projeto das cargas variáveis no dimensionamento semi-probabilístico do reforço.

Exemplo 3: viga caixão em concreto armado, previamente reforçada, e sob a solicitação de um momento de torção constituído de parcelas de cargas permanente e variável.

A representação das variáveis aleatórias resistências do aço e do concreto a partir de uma função densidade de probabilidade FDP Normal, ao invés de uma FDP Lognormal, proporciona variação insignificante no valor do índice de confiabilidade do sistema em série  $\beta_{sist}^5$ . A variação dos valores dos índices de confiabilidade mostrou-se mais expressiva para os modos de falha onde a resistência do concreto é considerada.

Vigas reforçadas transversalmente mostraram maior índice de confiabilidade para o sistema considerado em série  $\beta_{sist}^5$  do que as vigas reforçadas longitudinalmente.

Exemplo 4: viga maciça em concreto armado, previamente reforçada, e solicitada pelo seu respectivo valor médio de resistência composto por parcelas de carga permanente e variável.

A introdução dos fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$  na análise de confiabilidade afeta significativamente os valores dos índices de confiabilidade ou probabilidade de falha da estrutura.

A maior dispersão do valor da variável  $\phi_R$  em torno do seu valor médio provoca grande decréscimo no índice de confiabilidade da estrutura.

A redução do índice de confiabilidade após introdução dos fatores de modelagem  $\phi_S$  e  $\phi_R$  é maior para carregamentos onde a razão de carga variável  $r_q$  é menor, em consequência do alto valor do fator de importância  $I_{\phi_R}$  da variável

fator de modelagem de resistência  $\phi_R$  que decresce com o aumento da parcela de carga variável do carregamento total.

O fator de importância da carga variável  $I_{Tq}$  eleva-se com o acréscimo da parcela de carga variável, mantendo-se, no entanto inferior ao fator de importância  $I_{\phi R}$  para a maioria dos casos analisados.

Exemplo 5: viga maciça em concreto armado reforçada semi-probabilisticamente, utilizando-se os coeficientes parciais de segurança a seguir:  $\gamma_c=1,40$ ;  $\gamma_s=1,15$ ;  $\gamma_f=1,30$ ;  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  variando entre os valores 1,2; 1,3; 1,4; 1,5. A viga é solicitada por momento de torção onde as razões de carga variável variam entre os valores 0,2 a 0,8.

A adoção de coeficientes parciais de segurança variado no dimensionamento semi-probabilístico possibilitou obter valores de índices de confiabilidade acima ou abaixo dos adotados como referência nesse trabalho ( $\beta_a = 3,8$ ), para todas as razões de carga variável  $r_q$  adotadas.

Superfícies de resposta em termo do índice de confiabilidade  $\beta(\gamma_g, \gamma_k)$  foram geradas com o uso do polinômios de lagrangeanos.

Os valores dos coeficientes parciais de segurança das solicitações permanente e variáveis,  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  que levam a valor de índice de confiabilidade mais próximo do índice de referência  $\beta_a = 3,8$ ; obtidos segundo as restrições,  $1,2 \leq \gamma_g \leq 1,5$  e  $1,2 \leq \gamma_q \leq 1,5$ ., diferenciam-se dos adotados na NBR 6118 (2007), ( $\gamma_g = \gamma_q = 1,4$ ).

## 6.2 PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

Considerando-se que a análise de confiabilidade tem como propósito a avaliação do nível de segurança de uma estrutura a partir da consideração da aleatoriedade de todas as variáveis envolvidas na metodologia de dimensionamento da mesma, e que o estado da arte das pesquisas de vigas reforçadas com CFC solicitadas por momento de torção são todavia incipientes,

apresenta-se a seguir algumas propostas de trabalhos futuros que possibilitarão um aprofundamento do tema desenvolvido nesse trabalho.

### **Reforço**

Estudo teórico-experimental que avalie a parcela de contribuição do reforço de CFC em vigas ligadas à lajes, considerando formas diferenciadas de ancoragem do mesmo.

Estudo teórico-experimental que avalie a ação combinada momento de torção e força cortante.

### **Análise de confiabilidade**

Aprofundamento no estudo do modelo probabilístico da carga variável que contemple a sua composição a partir das parcelas de longa e curta duração.

Análises experimentais que possibilitem uma definição mais criteriosa das propriedades estatísticas dos compósitos de fibra de carbono e vidro, tanto em termos de resistência como de aderência ao concreto.

Definição apropriada à torção dos modelos probabilísticos dos fatores de modelagem de efeito de carga e resistência.

Aprofundamento no estudo dos modelos probabilísticos inerentes à frequência relativa do carregamento variável.

Aperfeiçoamento do estudo de calibração dos coeficientes parciais de segurança das ações permanente e variável, por meio de ampliação do espaço  $\gamma_g$ ,  $\gamma_q$  e consideração de mais elementos no somatório que define a expressão 5.6.4.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de Estrutura de Concreto – Procedimentos: NBR 6118. Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

\_\_\_\_\_. Concreto – Preparo, controle e recebimento: NBR 12655. Rio de Janeiro, Brasil, 2006.

\_\_\_\_\_. Ações e Seguranças nas Estruturas – Procedimento: NBR 8681. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE “*Building Code Requirements for Structural Concrete*”. Notes on ACI 318–99. Detroit, USA, 1999.

\_\_\_\_\_. “*Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structure*”. Notes on ACI 440–01. USA, 2001.

\_\_\_\_\_. “*Building Code Requirements for Structural Concrete*”. Notes on ACI 318–05. USA, 2005.

AUSTRALIAN STANDARD FOR CONCRETE STRUCTURE, AS 3600 (2001).

ALMEIDA, A. F. “Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade de Pórticos Planos em Concreto Armado” – Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2008.

AMELI, M.; RONAGH, H. R.; DUX, P. F. “*Experimental Investigations on FRP Strengthening of Beams in Torsion*” School of Engineering – University of Queensland – Brisbane, Australia.

AMELI, M.; RONAGH, H. R. “*Treatment of Torsion of Reinforced Concrete Beams in Current Structural Standards*” *Asian Journal of Civil Engineering (building and housing)* Vol. 8, No. 5 (2007), p. 507 – 519.

AOKI, N. “Segurança e Confiabilidade de Fundação Profunda” Congresso de Pontes e Estruturas – ABPE, Rio de Janeiro. (2005).

APRILE, A.; BENEDETTI, A. *Coupled Flexural-Shear Design of R/C Beams Strengthened with FRP. Composites: Part B*, n. 35, p.1-25, 2004.

ARAÚJO, J. M. “A Confiabilidade no projeto de Pilares de Concreto Armado” Teoria e Prática na Engenharia Civil, No. 2. FURG, Rio Grande,(2001), p. 1-8.

\_\_\_\_\_ “Curso de Concreto Armado” , Vol. 1, ed. Dunas. 2003.

CHEN, J. F. TENG, J. G. “*Anchorage strength models for FRP and steel plate bonded to concrete.*” *J. Struct Eng ASCE* 2001; 127 (7); 784 – 91.

\_\_\_\_\_ “*Shear Capacity of FRP – Strengthened RC Beams: FRP Debonding. Construction and Building Materials*”, Vol. 17, 2003a, p. 27 – 41.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). *Eurocode: Basis of structural Design – EN 1990*, Brussels, 2002.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). *Eurocode 2: Design of Concrete Structures – EN 1992 –1–1*, Brussels, 2002.

FIB. “*Externally Bonded FRP Reinforcement for RC Structures*”. Lausanne, 2000 *Bulletin* 14.

FABER, M. H. “*Risk and Safety in Engineering*” – *Lecture Notes* – Zurich, 2009.

GHOBARAH, A; GHORBEL, M. N; CHIDIAC, S. E. “*Upgrading Torsional Resistance of Reinforced Concrete Beams Using Fiber-Reinforced Polymer.*” *Journal of Composites for Construction*, v. 6, n. 4, p. 257-263, nov. 2002.

GIFFORD. W. D. “*Risk Analysis and the Acceptable Probability of Failure* 2004.

GOMES, A. C. “Análise de Confiabilidade Estrutural de Uma Viga em Concreto Armado Submetida à Ação Combinada de Cisalhamento e Torção Pelo Método de Monte Carlo” – Trabalho Final de Graduação , DME / UFRJ. 2008.

GULVANESSIAN, H; CALGARO, J. A; HOLICKÝ, M. “*Designers` Guide to EN 1990 Eurocode: Basis of Structural Design*” ed. Thomas Telford. London, 2002.

HALDAR, A; MAHADEVAN, S. *“Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis”* ed. John Wiley & Sons. 2000.

\_\_\_\_\_ *“Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design”* ed. John Wiley & Sons. 2000.

HART, G. C. *“Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering”*. Prentice – Hall, New Jersey, 1982.

HENRIQUES, A. A. R. *“Aplicação de Novos Conceitos de Segurança no Dimensionamento do Betão Estrutural”* – Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia do Porto. 1998.

HIL, A. K. Y.; AL-MAHAIDI, R. *“An Experimental and Numerical Investigation on Torsional Strengthening of Solid and Box-section RC Beams Using CFRP Laminates. Composites Structures”*, v. 75, n. 1 p. 213-221, set. 2006.a.

\_\_\_\_\_ *“Experimental Investigation on Torsional Behavior of Solid and Box-Section RC Beams Strengthened with CFRP Using Photogrammetry. Journal of Composites for Construction”*, v. 10, n. 4, p. 321-329, jul. 2006.b.

\_\_\_\_\_ *“Torsion Capacity of CFRP Strengthened Reinforced Concrete Beams. Journal of Composites for Construction”*, v. 11, n. 1, p. 71-80, jan. 2007.

HSU, T. T. C. *“Unified Theory of Reinforced Concrete”*. 1.ed. Florida: CRC Press, 1993. 313p.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. *JCSS: Probabilistic Model Code*.2001.

LOPES, M. T. A. *“Análise de Confiabilidade de Estruturas Aplicada ao Projeto de Reforço à Força Cortante de Vigas em Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono”* – Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2007.

MELCHERS, R. E. *“Structural Reliability Analysis and Prediction”* New York, John Wiley & Sons. 2002.

MENEGHEL, J. M. *“Análise Experimental da Aderência entre Concreto e Compósitos com Tecido de Fibras de Carbono”* – Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2005.

MERLIN, A. J. *“Análise Probabilística do Comportamento ao Longo do Tempo de Elementos Parcialmente Pré-moldado com Ênfase em Flechas de Lajes com Armação Treliçada”* – Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade Federal de São Paulo. 2006.

NOGUEIRA, H. A. T. “Avaliação da Confiabilidade de Pilares Curtos em Concreto Armado Projetados Segundo a NBR 6118:2003” – Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia Universidade Federal Minas Gerais. 2006.

PACHECO, C. O. “Verificação Experimental de Aderência CFC-Concreto por meio de Ensaio Tração-Compressão” – Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2006.

PANCHACHARAM, S; BELARBI, A. “*Torsional Behavior of Reinforced Concrete Beam Strengthened with FRP Composites*” – First FIB Congress, Osaka, Japan, 2002.

PALIGA, C. M. “Análise Probabilística de Vigas de Concreto Armado Recuperadas à Flexão, Através do Método de Monte Carlo Utilizando um Modelo de Elementos Finitos” – Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2008.

SALOM, P. R.; GERGELY, J; YOUNG, D. T. “*Torsional Retrofit of Spandrel Beams with Composites Laminates*”. *Structures e Buildings*, v. 157, p.69-76. 2004b.

SANTOS, S. H. C.; EBOLI, C. R. “Análise de um Pórtico de Concreto Armado Utilizando os Conceitos de Confiabilidade Estrutural.”: IBRACON. Projeto de Estrutura de Concreto, Volume VI, p. 142-155.

SAGRILO, L. V. S. “Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando os Métodos Analíticos FORM e SORM” – Tese de doutorado, COPPE/UFRJ do Rio de Janeiro. 1994.

\_\_\_\_\_ “Confiabilidade Estrutural” – COPPE/UFRJ, Notas de aula, Rio de Janeiro, 2004.

SÁNCHEZ FILHO, E. S.; SILVA FILHO, J. J. H. “*Strengthening Design of Rectangular Reinforced Concrete Beams in Torsion with Carbon Fiber Composites*”. In: *IV HPC - IV INTERNATIONAL ACI/CANMET CONFERENCE on Quality of Concrete Structures and Recent Advances in Concrete Materials and Testing*, Olinda. p. 688-699. 2005.

SILVA FILHO, J. J. H.; SÁNCHEZ FILHO, E. S.; VELASCO, M. S. L. “Análise de Vigas de Concreto Armado Reforçadas à Torção com Compósitos de Fibra de Carbono.” In: Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro. Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. p. 1-16. 2005.

\_\_\_\_\_ “Dimensionamento e Análise do Comportamento de Vigas de Concreto Armado Reforçadas com Compósitos de Fibra de Carbono Solicitadas à Torção.” In: VI Simpósio EPUSP Estruturas de Concreto, São Paulo. p. 1117-1131. 2006.a.

SILVA FILHO, J. J. H. “Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono” – Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2007.

SORENSEN, J. D. “*Structural Reliability Theory And Risk Analysis*”. Aalborg, 2004. Disponível em: <http://www.civil.auc.dk/~i6cfrier/ls/>. Acesso em 10 de maio de 2006.

SOARES, R. C.; VENTURINI, W. S. “Introdução à Análise de Confiabilidade” – São Carlos, 2001.

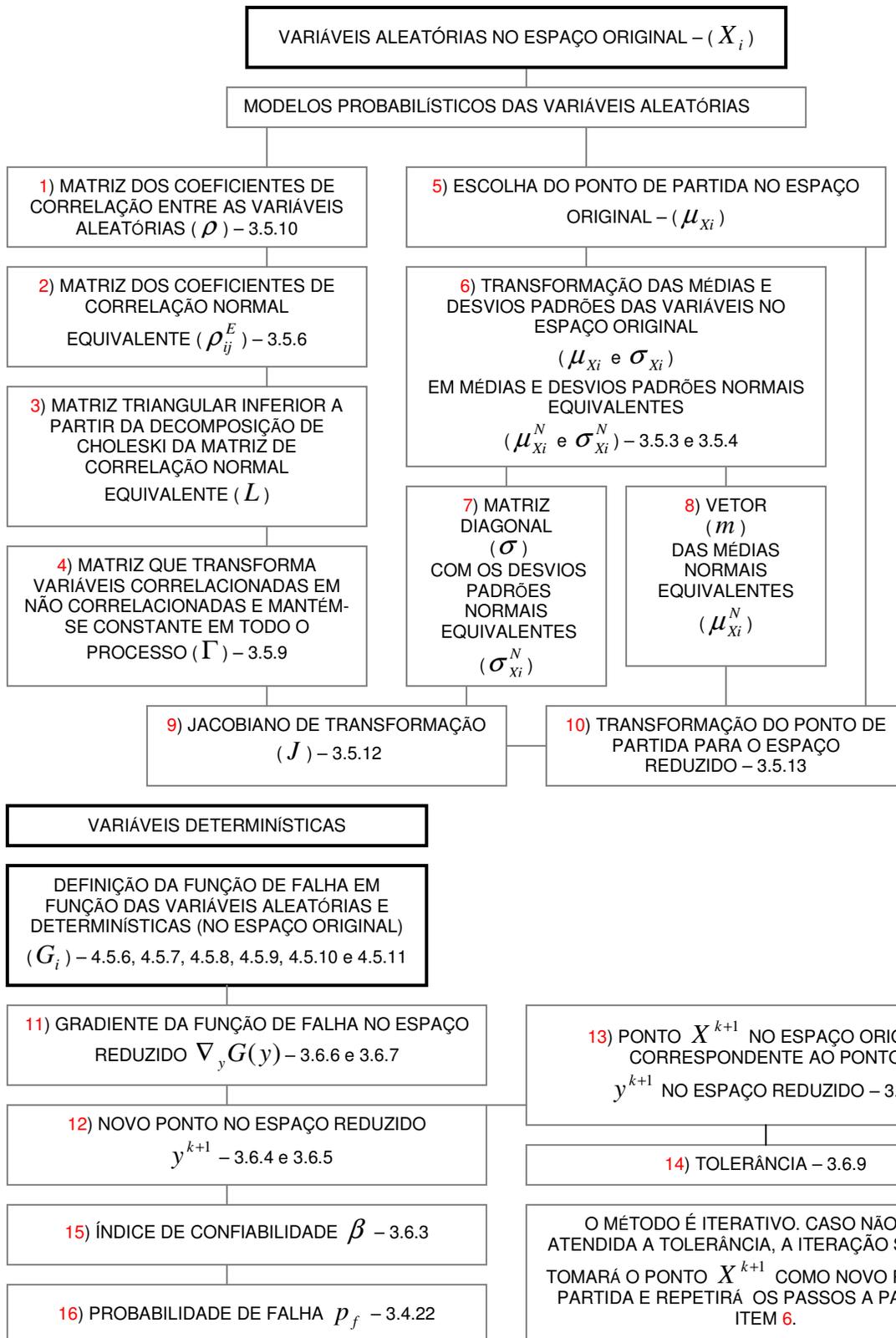
SPAGNOLO, JUNIOR, L. A. “Estudo Experimental do Reforço à Força Cortante de Vigas de Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono” – Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2008.

VAZ, L.E. “Confiabilidade Estrutural” – DME, Escola Politécnica, UFRJ, Notas de aula, Rio de Janeiro, 2010.

VROUWENVELDER, T. “*Reliability Based Code Calibration – The use of the JCSS Probabilistic Model Code*”. *Workshop on Code Calibration, March 21/22, Zurich.*

## ANEXO A

### FLUXOGRAMA DO MÉTODO *FORM* GENERALIZADO



## AVALIAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA DO SISTEMA EM SÉRIE

