

DANIELE DA ROCHA FONSECA

**UM NOVO MECANISMO PARA A TRANSFORMAÇÃO DE RESULTADOS
PROVENIENTES DE TESTES DE VIDA ACELERADO PARA RESULTADOS
ESTIMADOS EM UMA CONDIÇÃO NORMAL DE USO ATRAVÉS DA
UTILIZAÇÃO DA LEI DE DISTRIBUIÇÃO DE MAXWELL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, área de concentração: Tecnologia da Construção

Orientador: Prof. Daniel Ignácio de Souza Junior, Ph. D.

Niterói, RJ

2012

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de
Computação da UFF

F676 Fonseca, Daniele da Rocha.

Um novo mecanismo para a transformação de resultados provenientes de testes de vida acelerado para resultados estimados em uma condição normal de uso através da utilização de lei de distribuição de Maxwell / Daniele da Rocha Fonseca – Niterói, RJ : [s.n.], 2012.

145 f.

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal Fluminense, 2012.

Orientador: Daniel Ignácio de Souza Junior.

1. Engenharia civil. 2. Distribuição de Maxwell. 3. Viga metálica. 4. Fadiga (engenharia). I. Título.

CDD 624

DANIELE DA ROCHA FONSECA

**UM NOVO MECANISMO PARA A TRANSFORMAÇÃO DE RESULTADOS
PROVENIENTES DE TESTES DE VIDA ACELERADO PARA RESULTADOS
ESTIMADOS EM UMA CONDIÇÃO NORMAL DE USO ATRAVÉS DA
UTILIZAÇÃO DA LEI DE DISTRIBUIÇÃO DE MAXWELL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, área de concentração: Tecnologia da Construção

Aprovada em 04 de abril de 2012

Prof. Daniel Ignácio de Souza, Ph. D. (orientador)
Universidade Federal Fluminense

Prof. Assed Naked Haddad, D.Sc.
Universidade Federal Rio de Janeiro

Prof. Carlos Leornado Ramos Póvoa D. Sc.
Universidade Estadual Norte Fluminense

Prof. Rodrigo Tavares Nogueira D. Sc.
Universidade Estadual Norte Fluminense

Prof. Orlando Celso Longo, D. Sc.
Universidade Federal Fluminense

Niterói, RJ
2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas suas bênçãos, por sempre guiar meus passos e por me permitir mais esta conquista.

Ao meu orientador, Daniel Ignácio de Souza Júnior, pela amizade, incentivo e confiança em meu trabalho desde o mestrado.

Aos meus pais e meus irmãos pelo incentivo em todos os momentos da minha vida;

A todos que, direta ou indiretamente colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1.1 APRESENTAÇÃO	10
1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA	12
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1 TESTE DE VIDA ACELERADO	16
2.2. DISTRIBUIÇÕES UTILIZADAS EM TESTE DE VIDA	22
2.2.1 Distribuição Weibull	22
2.2.2 Distribuição Weibull Invertida	24
2.2.3 Distribuição Exponencial	25
2.2.4 Distribuição Normal	26
2.2.5 Distribuição Lognormal	27
2.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO ESTATÍSTICO	27
2.3.1 Método dos mínimos quadrados	28
2.3.2 Método dos momentos	28
2.3.3 Método da máxima verossimilhança	29
3 MECANISMO DE TESTES DE VIDA ACELERADO NA AVALIAÇÃO DE PRODUTOS INDUSTRIAIS.	30
3.1 ACELERAÇÃO DO MECANISMO DE CICLOS	32
3.2 MODELOS COM ACELERAÇÃO LINEAR(CONSTANTE) DURANTE TODO O TESTE DE VIDA	33
3.2.1 Aceleração de um Teste de Vida com a Distribuição de Amostragem Sendo o Modelo Exponencial	34
3.2.2 Aceleração de um Teste de Vida com a Distribuição de Amostragem Sendo o Modelo Weibull	35
3.3 MODELO DE TESTES DE VIDA COM O QUAL A TEMPERATURA É O MECANISMO PRESENTE DE ACELERAÇÃO	37
3.4 O MODELO DE ARRHENIUS	39
3.5 MODELOS DE TESTES DE VIDA COM VÁRIOS MECANISMOS OU TIPOS DE ACELERAÇÃO	41
3.5.1 O Modelo de Eyring	42
3.6 MODELOS DE DEGRADAÇÃO	43
3.7 MODELOS DE DEFORMAÇÃO OU ESTRAGO ACUMULATIVO	46
3.8 MODELOS COM TENSÕES AUMENTADAS CONTINUADAMENTE	47
3.9 OUTROS MODELOS DE ACELERAÇÃO	48
3.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE OS TIPOS DE TESTES DE VIDA ACELERADOS	49

4 METODOLOGIA E COMPONENTES UTILIZADOS NESSE ESTUDO.....	51
4.1 DISTRIBUIÇÕES DA FAMÍLIA DE VALORES EXTREMOS WEIBULL E WEIBULL INVERTIDA DE TRÊS PARÂMETROS	51
4.2 O FATOR DE ACELERAÇÃO	52
4.3 AS SITUAÇÕES DO TESTE DE HIPÓTESES.....	55
4.4 O TESTE DE VIDA SEQUENCIAL.....	56
4.5 O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA PARA OS MODELOS WEIBULL E WEIBULL INVERTIDO DE TRÊS PARÂMETROS: TRUNCAGEM POR FALHAS	58
4.6 O TAMANHO ESPERADO DA AMOSTRA DO TESTE DE VIDA SEQUENCIAL PARA EFEITO DE TRUNCAGEM.....	68
4.7 OS VALORES ESPERADOS DOS MODELOS DE TRÊS PARÂMETROS WEIBULL E WEIBULL INVERTIDO.....	75
5 APLICAÇÃO DO EMPREGO DO AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA EM RELAÇÃO À RESISTÊNCIA À FRICÇÃO.....	78
5.1 PARA O MODELO WEIBULL INVERTIDO DE TRÊS PARÂMETROS.....	79
5.1.1 Um procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem no caso do modelo Weibull Invertido.	86
5.2 PARA O MODELO WEIBULL DE TRÊS PARÂMETROS.....	87
5.2.1 Um procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem no caso do modelo Weibull.....	92
5.3 VALORES ESPERADOS PARA A VIDA MÉDIA DO AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA, EM HORAS, QUANDO SUBMETIDO À FRICÇÃO.....	94
6 APLICAÇÃO DO EMPREGO DO AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA EM RELAÇÃO À RESISTÊNCIA À FADIGA NÃO INDUZIDA.	98
7 CONCLUSÕES.....	103
REFERÊNCIAS.....	106
ANEXO	110

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: Aplicação de nível constante da tensão	19
Figura 2.2: Aplicação da tensão em diferentes níveis	20
Figura 2.3: Aplicação de nível progressivo de tensão	21
Figura 2.4. Aplicação tensão alternada	21
Figura 2.5 Aplicação da tensão aleatória	21
Figura 5.1 Teste de vida sequencial para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros.	85
Figura 5.2. Teste de vida sequencial com o mecanismo de truncagem para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros.....	86
Figura 5.3. Teste de vida sequencial para o modelo Weibull de três parâmetros.	92
Figura 5.4. Teste de vida sequencial com o mecanismo de truncagem para o modelo Weibull de três parâmetros.	93
Figura 5.5 Curva da função densidade do modelo Weibull de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, quando submetido à fricção.	97
Figura 5.6. Curva da função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, quando submetido à fricção.	97
Figura 6.1. Curva da função densidade do modelo Weibull de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, em relação à resistência à fadiga não induzida.	100
Figura 6.2. Curva da função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, em relação à resistência à fadiga não induzida.	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Exemplos de Materiais de desempenho e variáveis de Estresse.....	19
Tabela 5.1. Tempos de falhas (horas) das unidades de trilhos sob uma temperatura de uso acelerada de 480 K (graus Kelvin).	79
Tabela 5.2. Tempos de falhas (horas) das unidades de trilhos sob uma temperatura de uso acelerada de 520 K (graus Kelvin).	79
Tabela 5.3. Tempos estimado de falhas (horas) das unidades de trilhos em uma condição normal de uso de 296 Kelvins. Modelo Weibull Invertido.....	82
Tabela 5.4. Limites do teste de vida para o modelo Weibull Invertido.....	85
Tabela 5.5. Tempos estimados de falhas (horas) das unidades de trilhos sem uma condição normal de uso de 296 Kelvins. Modelo Weibull.	89
Tabela 5.6. Limites do teste de vida para o modelo Weibull	91
Tabela 5.7. Estimadores dos três parâmetros das distribuições de amostragem Weibull Invertido e Weibull na condição normal de uso de 296 Kelvins.....	93
Tabela 6.1. Tempos estimados de falhas (ciclos) das unidades de trilhos em uma condição acelerada de uso de 10.800 ciclos por hora.	98
Tabela 6.2. Tempos estimados de falhas (ciclos) das unidades de trilhos em uma condição normal de uso de 40 ciclos por hora.	99

RESUMO

Esta tese tem como objetivo desenvolver um novo mecanismo para a transformação de resultados provenientes de testes de vida acelerado para resultados estimados em uma condição normal de uso através da utilização da lei de distribuição de Maxwell. O modelo desenvolvido é uma aplicação combinada de testes de vida sequencial com truncagem e teste de vida acelerado a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção, quando utilizado na fabricação de trilhos no Brasil, sendo a característica de interesse que se deseja determinar será a resistência à fricção, e também empregada já há vários anos na fabricação de vigas metálicas, nesse caso sendo a característica de interesse o limite de resistência à fadiga. Para estimarmos os três parâmetros dos modelos Weibull e Weibull Invertido, utilizaremos um estimador de máxima verossimilhança "maximum likelihood" para uma condição de teste de vida truncado por falhas.

Palavras-Chaves: modelo aceleração, teste de vida sequencial, distribuição de Maxwell, estimador de máxima verossimilhança.

ABSTRACT

The main objective of this work is to apply a combined approach of a sequential life testing and an accelerated life testing to a new type of friction-resistant low alloy-high strength steel used in Brazil. One possible way to translate test results obtained under accelerated conditions to normal using conditions could be through the application of the "Maxwell Distribution Law." When this steel is used in the fabrication of rails, the characteristic of interest is the resistance to friction. When used in the production of steel beams, the characteristic of interest is now the limit of resistance to fatigue. To estimate the three parameters of the two underlying sampling distributions, the three parameter Weibull and Inverse Weibull models, we will use a maximum likelihood approach for censored failure data. We will be assuming a linear acceleration condition. To evaluate the accuracy (significance) of the parameter values obtained under normal conditions for the underlying Inverse Weibull model we will apply to the expected normal failure times a sequential life testing using a truncation mechanism developed by De Souza (2005). Some examples will illustrate the application of this procedure.

Keywords: Accelerated Models, Sequential Life Testing, Maxwell Distribution Law, Maximum Likelihood Approach, Truncation Mechanism.

INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO

Existe uma necessidade crescente no mundo industrial, a qual se torna cada vez mais importante, de se obter com um menor custo de teste e no mais reduzido espaço de tempo, indicações bem fundamentadas estatisticamente e de elevada confiabilidade sobre o comportamento de produtos e componentes quando em situações de uso normal.

A fim de se obter informações a respeito do comportamento deste produto ou sistema se fará necessário a realização de testes de vida, em que a variável de interesse é o tempo até a falha, e analisá-los por meio de modelos estatísticos adequados. Essas informações serão então utilizadas para quantificar a confiabilidade desse produto ou sistema, determinando-se em seguida se os padrões ou níveis propostos de confiabilidade e de segurança estão sendo alcançados.

Finalmente, o que fazer para melhorar a confiabilidade e a segurança do produto ou sistema sendo analisado. Evidentemente, o tempo necessário para se realizar um teste de vida poderá ser muito elevado, com isso acarretando elevados custos de utilização de equipamentos, facilidades e pessoal, ou mesmo inviabilizando o emprego de práticas tradicionais de teste de vida.

No início da década de 90 iniciou-se um movimento em direção à aplicação de testes de vida sequenciais na tentativa de se substituir o antigo sistema de testes, o qual utilizava tamanhos de amostras pré-fixados. Esses testes pré-fixados se tornaram obsoletos, devido demandarem amostras com um número relativamente

elevado de itens, o que acarretava um maior custo do teste, além de um tempo exageradamente longo para a realização dos mesmos.

O mecanismo de teste de vida sequencial constitui-se em uma alternativa interessante ao de um teste de hipótese com tamanho de amostra fixo devido ao pequeno número de observações necessárias para o seu emprego, principalmente quando as distribuições de amostragem são os modelos Weibull ou Weibull Invertido de três parâmetros.

Acontece que em algumas ocasiões, mesmo com o emprego de um teste de vida sequencial, o número de itens necessário para se chegar a uma decisão de se aceitar ou rejeitar uma hipótese nula poderá ser muito elevado (De Souza, 2000). Desse modo, um mecanismo de truncagem para essa situação de teste de vida foi desenvolvido por De Souza (2004a) e uma aplicação prática desse mecanismo foi apresentada por De Souza (2004b). Mesmo com a aplicação desse mecanismo de truncagem, em algumas ocasiões o tempo disponível para se realizar um teste de vida poderá ser consideravelmente menor do que a vida esperada de um determinado componente ou produto. Para superar esse problema existe uma alternativa de teste de vida acelerado direcionado a forçar o aparecimento de falhas em componentes, ou seja, testando-os em condições muito mais severas do que as encontradas durante a utilização normal desses componentes.

Entretanto, um problema aparece na utilização destes testes, é o de como relacionar a taxa de falha obtida no teste acelerado, no qual o produto ou sistema é submetido a um nível aumentado (elevado) de tensão, com a verdadeira taxa de falhas que o mesmo virá a apresentar quando em uso sob condições normais de aceleração.

Para se traduzir o valor da taxa de falhas obtido em uma condição mais severa de uso da que o componente deverá encontrar quando em utilização normal para um valor de taxa de falhas obtido em uma condição de uso normal desse componente, torna-se necessário uma modelagem estatística adicional. Esses modelos são conhecidos como modelos acelerados.

1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

Um dos principais modelos clássicos existentes de testes de vida acelerados é o modelo de Ering, desenvolvido na primeira metade do Século XX, o qual é derivado da física quântica. O modelo de Ering é dado pela seguinte equação:

$$R_{\text{rate}} = A T^{\alpha} e^{-(E/K)T_n + C} \exp\left[DS_1\right] \quad (1.0)$$

Aqui R_{rate} é a taxa de reação, E representa a energia de ativação da reação; K é a constante do gás (1,986 calorias por mol), T_n é a temperatura em graus Kelvin (273,16 mais os graus Celsius); A , α , C e D são constantes; S_1 representa um segundo fator de aceleração. Na equação (1.0), o termo $A T^{\alpha} e^{-(E/K)T_n + C}$ está relacionado com a temperatura ao passo que o termo seguinte $\exp [DS_1]$ é a forma geral para adicionar ao teste de vida qualquer outro tipo de tensão ou aceleração.

Esse modelo apresenta em sua fórmula algumas constantes numéricas (C e D) as quais deverão ser estimadas através dos dados provenientes do teste de vida acelerado sendo desenvolvido. Acontece que os testes de vida realizados atualmente utilizam cada vez mais amostras com um pequeno número de itens fazendo com que essa estimativa das constantes apresente uma confiabilidade muito aquém da desejada.

O objetivo deste estudo é desenvolver uma maneira prática e eficaz de se substituir os modelos acelerados provenientes da física quântica por distribuições da família de valores extremos, como a Weibull ou Weibull Invertida de três parâmetros, utilizando-se como princípio básico de substituição a Lei de Distribuição de Maxwell “Maxwell Distribution Law”, evitando-se as principais dificuldades da aplicação desses modelos, tais como a estimação do valor das constantes existentes nos mesmos através dos dados provenientes do teste de vida sendo realizado, além da obtenção de uma elevada confiabilidade na transformação dos dados obtidos em condições de aceleração para dados estimados em uma condição normal de uso.

Como parte de nosso objetivo no desenvolvimento desse mecanismo de teste de vida acelerado está o desenvolvimento de uma interação visando uma aplicação

conjunta dos mecanismos de teste sequencial com truncagem e testes acelerados, a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga, quando utilizado de duas maneiras distintas; na fabricação de trilhos e também na construção de viadutos metálicos. No primeiro caso, o interesse é determinar o valor esperado da vida média desse aço em horas, quando submetido à fricção, e no segundo caso uma estimativa do limite de resistência à fadiga, ou seja, o número de ciclos necessários para se obter esse ponto de fadiga. Esse tipo de aço está sendo utilizado no momento na fabricação de trilhos no Brasil para o transporte de minério de ferro e de dolomita e na construção de viadutos metálicos.

Como distribuições de amostragem, utilizaremos o modelo Weibull e o modelo Weibull Invertido de três parâmetros. Esses modelos possuem um parâmetro de forma, um parâmetro de escala e um parâmetro de vida mínima ou localização, o qual representa a vida garantida do produto. Para estimarmos os três parâmetros dos modelos Weibull e Weibull Invertido, utilizaremos um estimador de máxima verossimilhança “maximum likelihood” em uma situação de truncagem por falhas.

O ponto de truncagem representa o número máximo de observações necessárias para se tomar uma decisão sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula em um determinado teste de vida sequencial. Após o ponto de truncagem ter sido estatisticamente calculado, seu valor servirá como limite máximo de observações necessárias em qualquer outro teste de vida que se deseje realizar, dependendo do tipo de utilização um determinado material ou produto deverá ter. Para cada uma das duas aplicações, teremos de calcular um ponto de truncagem específico.

Estaremos assumindo uma condição de aceleração linear. No momento somente é possível trabalhar-se com um modelo de aceleração linear, quando se utiliza como distribuições de amostragem os modelos de três parâmetros Weibull e Weibull Invertida. Isso deve - se o fato de que quando em uma situação de aceleração não linear torna-se necessário o uso de computadores de altíssima velocidade. Além disso, outro problema gerado de uma utilização de um modelo de aceleração não linear diz respeito ao desenvolvimento de equações de elevada complexidade tanto nos seus desenvolvimentos como no cálculo dessas equações na estimação dos tempos de falha em uma condição acelerada de uso.

Essa situação somente agora começa a ser estudada nos centros de pesquisas nos principais países mais tecnologicamente desenvolvidos no momento.

Para avaliarmos a precisão (significância) dos valores obtidos para esses três parâmetros das duas distribuições de amostragem em uma condição normal de uso, aplicaremos para os tempos estimados de falhas em situação normal de uso um teste de vida sequencial com mecanismo de truncagem desenvolvido por De Souza (2004a). Finalmente faremos uma comparação da eficiência dos modelos Weibull e Weibull Invertido de três parâmetros quando utilizados como distribuições de amostragem.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho encontra-se dividido em sete capítulos, distribuído conforme descrição que segue.

No Capítulo 1 tem-se uma introdução do trabalho, onde são apresentados os motivos da realização deste, os objetivos pretendidos.

O capítulo 2 apresenta alguns conceitos importantes relacionado com Testes de Vida Acelerados, as distribuições utilizadas em Teste de Vida e os principais métodos para estimação dos parâmetros.

O capítulo 3 fornece os principais mecanismos de aceleração na avaliação de produtos industriais.

A proposta metodológica está presente no quarto capítulo, no qual é apresentado o desenvolvimento do procedimento para esse estudo.

No capítulo 5, apresenta uma aplicação combinada dos mecanismos de teste de vida sequencial com truncagem e teste de vida acelerado a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção, utilizado na fabricação de trilhos no Brasil.

O capítulo 6 apresenta uma aplicação combinada dos mecanismos de teste de vida sequencial com truncagem e teste de vida acelerado a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga, sendo que esse aço vem sendo utilizado na

confeção de vigas metálicas. Nesse caso a característica de interesse é o limite de resistência à fadiga.

As conclusões obtidas com a execução da presente pesquisa são apresentadas no capítulo 7.

E no final desta pesquisa são apresentadas as referências bibliográficas que subsidiaram a execução deste estudo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 TESTE DE VIDA ACELERADO

A maioria dos métodos de estimação em confiabilidade assume a existência de dados provenientes de falhas, dados estes obtidos através de um mecanismo denominado Testes de Vida.

Testes de Vida é o nome que damos para uma variedade de métodos de teste, os quais são normalmente usados a fim de se obter os dados estatísticos necessários para o desenvolvimento dos mesmos (de SOUZA 2006).

Existem vários tipos possíveis de testes de vida. O tempo necessário para se realizar um teste de vida poderá ser muito longo, com isso acarretando elevados custos de utilização de equipamentos, facilidades e pessoal. Esse tempo elevado poderá até mesmo inviabilizar a obtenção de um número pré-determinado de falhas antes do término do teste. Uma alternativa para a solução desse problema é a de se utilizar testes de vida sequenciais. Porém, dependendo das características do componente sob teste, um experimento realizado mesmo utilizando testes de vida sequencial com truncagem como mostrado por De Souza (2006) pode ter uma duração excessivamente longa, com isso acarretando elevados custos. Uma alternativa para solução desse problema é utilizar testes de vida acelerado.

Teste de vida acelerado consiste de uma variedade de métodos que intencionalmente diminuem a vida útil de um produto ou aceleram a degradação de seu desempenho (NELSON, 1990). As utilizações de técnicas adequadas de análise dos dados permitiram tirar conclusões sobre a vida esperada do componente em condições normais de uso.

O termo “teste acelerado” é utilizado para descrever dois tipos importantes de teste, que fornece diferentes informações sobre o produto:

Testes acelerados qualitativos são usados principalmente para revelar os modos de falha provável. Contudo, se não for projetado adequadamente, podem causar a falha do produto devido a modos que nunca teria sido encontrado na vida real. Quando há uma falha no teste acelerado qualitativo, é necessário encontrar a causa raiz desta falha e verificar se há alguma relação com uma eventual falha em condições normais de operação (NELSON, 2005). Um bom teste qualitativo é aquele que revela rapidamente os modos de falhas que ocorrem durante a vida útil do produto em condições normais de uso.

De acordo com os tipos de dados obtidos nos testes, os ensaios qualitativos podem ser classificados em: (a) *Testes de vida acelerado*, cujo dado (a resposta de interesse) é o tempo-até-falha, que pode ser completo ou censurado, dependendo da natureza e das limitações do teste. Neste caso, o objetivo é estimar o tempo médio de sobrevivência, a função de confiabilidade, etc. Através da modelagem de tais dados, podemos, com certo cuidado, extrapolar os resultados obtidos nos testes para as condições normais; (b) *teste de degradação acelerado*, a resposta de interesse é alguma medida de desempenho do produto ou componente, tais como resistência à tração ou oxidação, medidas ao longo do tempo e utilizar esta informação para estimar a distribuição do tempo de vida do produto ou componente.

Em todos os testes descritos acima, os dados são gerados porque as unidades de teste são submetidas a esforços em níveis diferentes daqueles considerados em condições normais de uso, de forma a diminuir o tempo-até-falha.

Testes acelerados quantitativos são testes designados para quantificar as características de vida do produto, sob condições normais de uso, incluindo a determinação da probabilidade de falha do produto nessas condições. Os motivos que causam a falha do produto são acelerados sob circunstâncias controladas, fazendo com que o produto falhe em um período de tempo mais curto. Nesse tipo de teste não são inseridos mecanismos de falha adicionais que não ocorreriam em condições normais do uso. Ao contrário dos testes acelerados qualitativos, que antecipam falhas a fim de identificar novas modalidades de falha, os testes

acelerados quantitativos produz a informação do tempo até falha, essa informação será utilizada para estimar a previsão de vida do produto sob condições normais de uso. Quando esses testes são corretamente executados, é possível utilizar modelos matemáticos para extrapolar o nível de uma função da distribuição cumulativa para o produto a partir dos dados de vida obtidos em circunstâncias aceleradas. Com essa análise será possível determinar a confiabilidade, probabilidade de falha, tempo da garantia, vida média, e outras informações sobre o tempo de vida do produto.

De maneira geral, acelera-se um teste submetendo as unidades a níveis aumentado (elevado) de tensão, do que aqueles encontrados em condições normais de uso. As formas de aceleração são divididas de acordo com os tipos de aceleração que é imposta ao componente sob teste:

a) Aceleração por taxa de uso: Uma maneira simples de acelerar a vida de produtos é submetê-los a uma taxa de uso mais severa. Segundo Nelson (1990) isso pode se obtido de duas maneiras: utiliza-se o produto em velocidade mais alta ou utiliza-se o produto continuamente. O propósito desse tipo de teste é estimar a vida do produto em condições normais de operação. No entanto, testes com alta taxa de uso normalmente aumentam a temperatura do produto e este aumento pode causar um novo modo de falha. Para assegurar que os modos de falha encontrados no teste acelerado sejam os mesmos que os encontrados em testes normais, os testes devem ser planejados cuidadosamente.

b) Aceleração por elevação de estresse: Este tipo de teste consiste em testar o produto a níveis mais altos das variáveis de estresse para diminuir a vida do mesmo ou degradar o desempenho dele de maneira mais rápida. Nesse caso, as variáveis de estresse podem ser temperaturas, voltagem, vibração, ciclo térmico, umidade, etc. Alguns exemplos são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 2.1. Exemplos de Materiais de desempenho e variáveis de Estresse

Produto		
Tipo	Medida de Desempenho	Variável de Estresse
Semicondutores e componentes microeletrônicos	Tempo até a falha e características de operação	Temperatura; corrente; voltagem; umidade; pressão.
Capacitores	Tempo até a falha	Temperatura; voltagem; vibração.
Resistores	Tempo até a falha	Temperatura; voltagem; vibração.
Contatos elétricos	Tempo até a falha; corrosão.	Temperatura; umidade; corrente.
Lâmpadas	Tempo até a falha; eficiência, luminosidade.	Voltagem; temperatura; choque (elétrico ou mecânico).

Fonte: Nelson, 1990

Ainda de acordo com Nelson (1990), as cargas de estresse às quais os produtos podem ser submetidos são classificadas como constantes, cíclicas, alternadas, progressivas e aleatórias.

a) Tensão constante

Em testes de estresse constante cada unidade de teste é observada até falhar, mantendo todos os fatores de estresse em níveis constantes. Para alguns materiais e produtos, os modelos de teste acelerado de estresse constante são melhor desenvolvidos e experimentalmente estabelecidos. Porém, para a realização do teste é de extrema importância a determinação da intensidade e do tipo de carga a ser aplicada, pois tal carga precisa ser apropriada ao tipo de dados que se deseja obter, além de condicionada ao tempo e aos recursos disponíveis para a realização do ensaio.



Figura 2.1: Aplicação de nível constante da tensão

b) Tensão aplicada em diferentes níveis ("step stress")

Em testes "step stress" cada componente é submetido a um nível da tensão por um certo tempo. Se o componente não falhar, o nível da tensão é alterado para um novo patamar, e o procedimento se repete. A principal vantagem do step stress é levar rapidamente à ocorrência de falhas. A maior desvantagem está na estimação das medidas de confiabilidade. A maioria dos produtos em condições normais de uso é submetida a uma carga constante e não do tipo "step stress". Portanto o modelo deve de maneira adequada levar em consideração o efeito cumulativo da exposição a estresses sucessivos. O modelo a ser utilizado é mais complexo do que aquele para estresse constante.

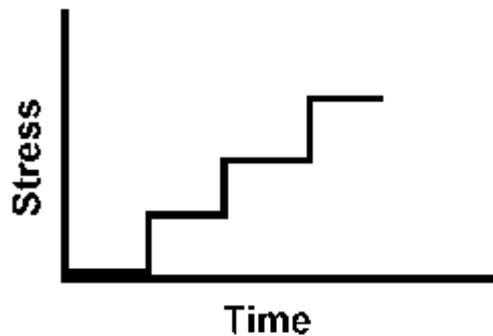


Figura 2.2: Aplicação da tensão em diferentes níveis

c) Nível progressivo da tensão

Neste tipo de teste cada componente é submetido a um nível crescente da tensão, porém esse aumento não é feito em patamares, mas continuamente. Bai (1992) apresenta um exemplo de teste deste tipo denominado "*Simple Ramp Test*", com dois diferentes incrementos lineares da variável de estressamento, este é um caso particular de nível progressivo de tensão, utilizando a distribuição Weibull como modelo estatístico.

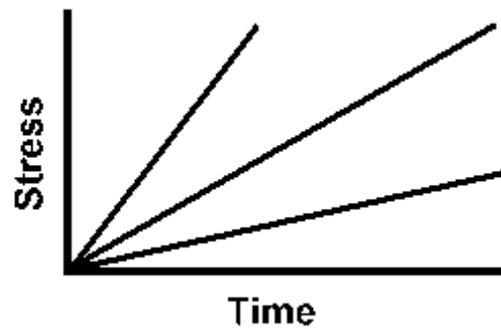


Figura 2.3: Aplicação de nível progressivo de tensão

d) Tensão alternada

Neste teste cada componente é submetido a tensões cujos níveis variam com uma dada periodicidade

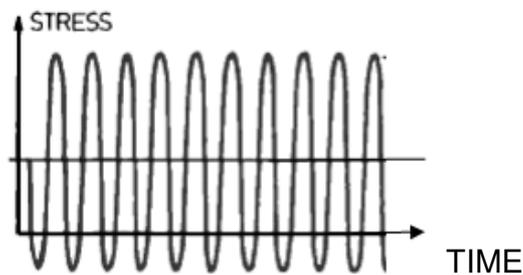


Figura 2.4. Aplicação tensão alternada

e) Tensão aleatória

Neste teste alguns produtos, quando em uso, estão sujeitos a níveis da tensão que se alteram de maneira aleatória.



Figura 2.5 Aplicação da tensão aleatória

2.2. DISTRIBUIÇÕES UTILIZADAS EM TESTE DE VIDA

Uma típica análise de dados de vida determina, por meio do uso de distribuições estatísticas, a distribuição de vida que descreve o tempo até a falha de um produto. Porém o fato é que as distribuições de vida podem assumir muitas formas, e os métodos de análise conhecidos e difundidos são aplicáveis para umas poucas distribuições de vida cientificamente desenvolvidas. Sendo assim, é necessário após coletar os dados de uma análise, ajustá-los para uma distribuição de probabilidade que melhor se encaixe à sua distribuição de falhas real. Tais distribuições são também conhecidas como distribuições de falha, uma vez que consistem em métodos matemáticos para representar falhas em função do tempo. Em estudo de vida de um produto, as distribuições mais empregadas são: Distribuição Weibull (1, 2 e 3 parâmetros), Distribuição Weibull Invertida, Distribuição Exponencial, Distribuição Normal e Distribuição Lognormal.

A seguir são apresentadas, resumidamente algumas funções que estão sendo utilizados em teste de vida, principalmente como informação preliminar ou prior acerca dos parâmetros da distribuição de amostragem Weibull.

Algumas dessas distribuições são:

2.2.1 Distribuição Weibull

A distribuição Weibull foi proposta inicialmente por W. Weibull em 1954 para representar tempos de falha devido à fadiga de metais, ela é uma das distribuições mais utilizadas em estudos de confiabilidade devido à sua grande versatilidade. Isso porque ela pode ser facilmente ajustada a várias distribuições de dados de falha apenas se ajustando o valor de seu parâmetro de forma (β).

As equações (2.1), (2.2), (2.3), e (2.4) representam, respectivamente, a função densidade de probabilidade de falha, a função confiabilidade, a função acumulada de falha e a função de risco para uma distribuição Weibull de três parâmetros.

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta} \right]; \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta}} \quad (2.2)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta}} \quad (2.3)$$

$$h(t) = \frac{\beta}{\theta} e^{-\left(\frac{t-\phi}{\theta} \right)^{\beta-1}} \quad (2.4)$$

Onde β é o parâmetro de forma, θ é o parâmetro de escala e ϕ é o parâmetro de vida mínima.

O parâmetro de escala θ (a vida característica) é positivo, e representa o ponto percentual 63,21 da distribuição de T . O parâmetro de forma β , o qual é também positivo, especifica a forma da distribuição. O parâmetro de vida mínima ϕ é também positivo e será sempre menor do que o primeiro tempo de falhas t_1 . A distribuição de Weibull a dois parâmetros considera o parâmetro da vida mínima como sendo igual à zero.

A distribuição Weibull com dois parâmetros tornou-se muito importante na ciência e na engenharia por se ajustar de um modo altamente positivo ao padrão de variabilidade de muitas coisas. Essa distribuição é rica em forma o que sugere a necessidade de uma amostra relativamente grande para que se possam fazer estimativas com um grau de precisão usando-se algum processo tradicional estatístico. Geralmente, na prática, é muito pequeno o número de componentes industriais disponíveis para se realizar um teste de vida.

A distribuição de Weibull é muito utilizada para dados de tempo de vida, pois seus dois parâmetros θ e β lhe dão uma grande flexibilidade, uma vez que permitem modelar diferentes tipos de taxas de falhas. Como caso especial, quando o

parâmetro de forma β da distribuição Weibull for igual a 1, a distribuição resultante será a exponencial.

2.2.2 Distribuição Weibull Invertida

A distribuição Weibull invertida foi derivada em 1983 por Pascoal Erto, e poderá ser obtida a partir da função densidade da distribuição Weibull. Considere a distribuição Weibull dada por:

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^\beta}; \quad x > 0; \quad \theta, \beta > 0$$

$$\text{Faça} \quad t = \frac{1}{x}; \quad x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{Também, quando: } x \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow 0; \quad x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Então, se substituirmos o valor de x e de dx na equação acima, teremos.

$$f(t) = - \int_{\infty}^0 \frac{\beta}{\theta} \frac{1}{(\theta t)^{\beta-1}} \frac{1}{t^2} e^{-1/(\theta t)^\beta} dt = \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\theta^\beta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta+1} e^{-1/(\theta t)^\beta} dt$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação acima por θ , obteremos:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\theta\beta}{(\theta t)^{\beta+1}} e^{-1/(\theta t)^\beta} dt = 1.0; \quad t > 0; \quad \theta, \beta > 0$$

Essa integral é igual a 1. Logo, o integrando acima é a função densidade da distribuição Weibull invertida, ou seja:

$$f(t) = \frac{\theta\beta}{(\theta t)^{\beta+1}} e^{-1/(\theta t)^\beta} \quad (2.1)$$

$$\theta, \beta > 0; \quad t \geq 0; \quad \theta = \text{parâmetro de escala}; \quad \beta = \text{parâmetro de forma.}$$

A distribuição Weibull Invertida tem sido utilizada em estimação Bayesiana para representar toda a informação disponível acerca do parâmetro de forma da

distribuição de amostragem Weibull Erto (1982); De Souza & Lamberson (1995). Ela possui um parâmetro de localização ou vida mínima, um parâmetro de escala e um parâmetro de forma. A recente utilização do modelo Weibull Invertido de três parâmetros reside no fato de que quando o parâmetro de forma da distribuição Weibull é maior do que sete, a curva Weibull se torna muito pontuda (alongada para cima), resultando em dificuldades computacionais para se obter a precisão desejada no cálculo dos valores referentes às características de interesse do componente ou produto sendo analisado. Em situações como essa, o modelo Weibull Invertido parece possuir uma melhor resposta para esse problema de precisão apresentado pela distribuição Weibull como mostrado por De Souza (2006).

2.2.3 Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é um caso especial da distribuição Weibull de dois parâmetros. Quando o parâmetro de forma β da distribuição Weibull for igual a 1, a distribuição resultante será a exponencial. Tal condição é resultante de uma condição de taxa de falha constante. A função densidade da distribuição Weibull é dada por:

$$f(t) = f(t;\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (2.2)$$

$\theta, \beta > 0$; $t > 0$; θ = parâmetro de escala; β = parâmetro de forma.

Logo, se fizermos $\beta = 1$, teremos:

$$f(t) = f(t;\theta) \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}; \quad t, \theta > 0 \quad (2.3)$$

Essa é a função densidade da distribuição exponencial. Com a proliferação de microcomputadores na última década, e com o reconhecimento geral de que a distribuição exponencial é um caso especial da distribuição Weibull, o modelo Weibull tornou-se um modelo de testes de vida muito popular.

2.2.4 Distribuição Normal

A distribuição normal ou de Gauss é utilizada para descrever produtos que falham por desgaste, onde a taxa de falha se incrementa continuamente, ela tem sido usada em ensaios acelerados para descrever a vida do filamento das lâmpadas incandescentes e de isolamentos elétricos, também tem sido usada para descrever propriedades de produtos tais como resistência (mecânica ou elétrica), alongação, e resistência ao impacto.

Uma variável aleatória é dita estar distribuída normalmente se ela tiver sua função densidade dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]; \quad -\infty \leq t \leq \infty; \quad \sigma > 0 \quad (2.4)$$

μ e σ são os parâmetros da distribuição normal. Essa distribuição é simétrica acerca de seu valor médio, e é também referida como sendo a lei de Laplace - de Moivre, e também como a função densidade Gaussiana. A distribuição normal possui uma forma abaulada muito conhecida. A função cumulativa da distribuição será dada por

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] d\tau \quad (2.5)$$

Essa integral não pode ser resolvida analiticamente, em uma forma fechada. Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, teremos a distribuição normal padrão, dada por.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right]; \quad -\infty \leq t \leq \infty \quad (2.6)$$

A função cumulativa padrão da distribuição, *cdf*, será dada por:

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] dx \quad (2.7)$$

Essa função tem sido extensivamente tabulada com vários níveis de precisão.

Por exemplo, o Anexo (3) de Grant e Leavenworth (1988) apresenta uma tabela dessa função. Para uma variável aleatória t normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ , teremos:

$$P(T \leq t) = P\left(z \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.8)$$

2.2.5 Distribuição Lognormal

A distribuição Lognormal é uma distribuição bastante genérica em estudos de confiabilidade, muitas vezes aplicada em estudos de números de ciclo até a fadiga. Amplamente usada para analisar dados de vida, exemplos incluem fadiga de metais, isolamento elétricos, etc. A distribuição log-normal é a que melhor descreve os tempos de vida de componentes semicondutores cujos mecanismos de falha envolvem interações químicas, como as encontradas em processo de corrosão, acúmulo superficial de cargas elétricas, degradação de contatos, etc.

Sua função densidade de probabilidade expressa a três parâmetros:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right];$$

onde σ , μ e são os parâmetros da distribuição Lognormal.

Hogg, Robert V. e Craig, Allen T em seu livro Introduction to mathematical statistics, 4ed apresentam no capítulo 4 uma maneira de se obter, através do mecanismo de transformação de variáveis do tipo contínuas, a grande maioria das distribuições utilizadas em Testes de Vida, inclusive as distribuições t (Student 's) e F. Uma das raras exceções é a distribuição de Cauchy, a qual não possui um valor esperado e variância finitos.

2.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO ESTATÍSTICO

Uma vez escolhida a distribuição para os tempos até a falha, é necessário determinar os parâmetros que descrevem os dados. Em estatística, esses parâmetros devem ser estimados a partir das observações amostrais. Acontece que, em boa parte das situações encontradas na prática, as informações existentes ou

disponíveis sobre determinado produto ou componente industrial não são suficientes para que possamos assumir valores com elevada confiabilidade para os referidos parâmetros. Nesse caso, é necessário estimar estatisticamente esses parâmetros. Existem vários métodos de estimação, os três principais são: o método mínimo quadrados, o método da máxima verossimilhança e o método dos momentos.

2.3.1 Método dos mínimos quadrados

A estimativa de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados é simples para funções que podem ser linearizadas, como é o caso da maior parte das distribuições aplicadas em estudos de confiabilidade. Este método define o melhor ajuste como aquele que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados observados. O método dos mínimos quadrados é usualmente aplicado na análise de dados completos de tempos até a falha. Sua vantagem é a de existir muitos pacotes de softwares estatísticos que disponibilizam a resolução de problemas por esse método. Como desvantagens encontram-se o fato de não ser aplicável a dados censurados e de ser sensível à escolha do valor inicial (NIST/SEMATECH, 2010).

2.3.2 Método dos momentos

O método dos momentos consiste em igualar determinadas características da amostra aos valores correspondentes esperados para a população e então resolver as equações resultantes a fim de obter um valor estimado para o parâmetro desconhecido.

Esse método apresenta como vantagem sua simplicidade, sendo usada principalmente para se encontrar um valor inicial a ser utilizado em métodos mais precisos, como o da máxima verossimilhança e dos mínimos quadrados. Sua desvantagem é a de frequentemente não estar disponível ou não possuir as propriedades de otimização desejável aos demais métodos (NIST/SEMATECH, 2010).

2.3.3 Método da máxima verossimilhança

O método da máxima verossimilhança é o mais confiável estatisticamente uma vez que pode ser aplicado a uma ampla variedade de situações de estimação de parâmetros. A estimativa pelo método da máxima verossimilhança se baseia na função de verossimilhança da amostra, que expressa a probabilidade de se obter um conjunto de dados a partir de um determinado modelo de distribuição. Isso pode ser conseguido através do desenvolvimento da função de verossimilhança para as observações e obtenção de sua expressão logarítmica, que é então derivada em relação aos parâmetros. As equações resultantes são igualadas a zero e resolvida simultaneamente, obtendo-se assim melhor estimativa dos parâmetros que maximizam a função verossimilhança (ELSAYED, 1996).

3 MECANISMO DE TESTES DE VIDA ACELERADO NA AVALIAÇÃO DE PRODUTOS INDUSTRIAIS.

Basicamente, um teste de vida acelerado utiliza técnicas diversas com o objetivo de reduzir o tempo de um teste de vida, através da aceleração das falhas de produtos ou sistemas de elevada confiabilidade. Esses produtos ou sistemas quando submetidos a um teste de vida comum deverão apresentar um número muito reduzido de falhas durante um período razoável de tempo. Eles poderão até não apresentar nenhuma falha nesse período de teste devido possuir elevada confiabilidade. Os modelos que pretendem resolver esse tipo de problema são chamados de modelos de aceleração.

O conceito de aceleração é aquele no qual um produto ou componente, o qual está sendo submetido a um nível aumentado (elevado) de tensão, irá apresentar mecanismos de falha iguais aos apresentados quando submetido a um nível normal de tensão. A única diferença é a de que as falhas deverão ocorrer mais rapidamente (TOBIAS and TRINDADE, 1995). Por exemplo, seria como se o nosso processo de falha estivesse sendo filmado, e, após o seu término, o mesmo filme fosse passado novamente, mas com uma velocidade maior do que a originalmente filmada. Como exemplo ainda, o caso de pontes ou viadutos metálicos, os quais estão submetidos às condições ambientais reinantes no local aonde se encontram. As falhas devidas ao efeito da corrosão metálica deverão ocorrer a uma velocidade relacionada com a agressividade do meio ambiente reinante, ou seja, nível de elementos químicos presentes na atmosfera, como o cloro, enxofre, hidrogênio e oxigênio, por exemplo. Em condições laboratoriais, poderíamos aumentar a concentração desses elementos, com isso tornando o ambiente mais agressivo resultando na ocorrência mais rápida de falhas por corrosão metálica. O mecanismo de falhas permanece o

mesmo, ou seja, falhas por corrosão metálica. Apenas a velocidade de ocorrência das falhas foi aumentada, devido ao aumento da agressividade do meio ambiente.

Quando obtém - se um faixa de valores para a tensão aplicada, na qual (faixa) a hipótese de se manter o mesmo mecanismo de falhas é verdadeira, tem-se uma condição conhecida como sendo a de uma aceleração real. Desse modo, uma aceleração real nada mais é do que uma simples transformação da escala de tempo, ou seja, uma diminuição do tempo de teste. Então, conhecendo a distribuição de vida de produtos ou sistemas submetidos em condição laboratorial a um elevado nível de tensão, e conhecendo ainda a transformação da escala de tempo relacionada com a condição de operação em nível normal de tensão, será possível derivar matematicamente, para essa condição normal de tensão, tanto a distribuição de vida, bem como a respectiva taxa de falhas.

Existem várias opções para se acelerar um teste de vida, ou seja, obter falhas em um menor período de tempo. Entre essas opções, por exemplo, para produtos ou sistemas sujeitos a uma ação de desgaste, como no caso da corrosão atmosférica, poderemos aumentar o nível de tensão aplicado a esse produto ou sistema através do aumento da temperatura e da umidade. Outros tipos de sistemas ou modelos poderão ter seus níveis de tensão aumentados através do aumento da voltagem ou correntes a eles aplicados, ou mesmo pelo aumento do nível de radiação presente. No caso do tempo de teste ser medido por número de ciclos, a redução desse tempo poderá ser obtido simplesmente pelo aumento do número de ciclos por unidade de tempo. Um interruptor poderá ser submetido a um teste de vida acelerado apenas pelo aumento da frequência de uso do mesmo durante um determinado espaço de tempo.

Como já mencionado, a maior dificuldade na utilização de testes de vida acelerado é o de como relacionar a taxa de falha obtida no teste acelerado, no qual o produto ou sistema é submetido a um nível aumentado (elevado) de tensão, com a verdadeira taxa de falhas que o mesmo virá a apresentar quando em uso sob condições normais de aceleração.

Este capítulo pretende apresentar alguns dos principais modelos de testes de vida acelerados que estão sendo utilizados ou em fase de desenvolvimento,

analisando algumas de suas potencialidades e fraquezas, bem como sugerir possíveis caminhos que possam levar ao desenvolvimento de novos modelos acelerados.

3.1 ACELERAÇÃO DO MECANISMO DE CICLOS

Assume-se aqui que não haverá alteração do modelo de falhas com o aumento do número de ciclos por unidade de tempo e que as falhas ocorrerão apenas devido ao mecanismo de ciclos existente. Desse modo, o número de ciclos necessários para a ocorrência de uma falha será o mesmo tanto em condições normais de operação como em condições aceleradas de operação. Logo:

$$c_n t_n = c_a t_a; \quad t_a = \frac{c_n}{c_a} t_n; \quad R_n(t_n) = R_a(t_a) = R_a\left(\frac{c_n}{c_a} t_n\right)$$

Onde:

c_n = Número de ciclos por unidade de tempo sob condições normais de operação;

c_a = Número de ciclos por unidade de tempo sob condições aceleradas de operação;

t_n = Tempo até a falha com c_n ciclos por unidade de tempo;

t_a = Tempo até a falha com c_a ciclos por unidade de tempo.

Considerando uma distribuição de amostragem Weibull de dois parâmetros, na qual a vida mínima é considerada igual à zero, é dado pela equação seguinte:

$$R_n(t_n) = \exp\left[-\left(\frac{t_n}{\theta_n}\right)^{\beta_n}\right] = \exp\left[-\left(\frac{t_a}{\theta_a}\right)^{\beta_a}\right], \text{ ou seja, com } t_a = \frac{c_n}{c_a} t_n,$$

Teremos:

$$R_n(t_n) = \exp\left[-\left(\frac{c_n t_n}{c_a \theta_a}\right)^{\beta_a}\right] \quad (3.1)$$

Desse modo, $\beta_a = \beta_n = \beta$, e também:

$$\theta_n = \frac{c_a}{c_n} \theta_a \quad (3.2)$$

Aqui, foi definido os seguintes parâmetros da distribuição de falhas Weibull:

β_n = parâmetro de forma sob condições de teste normal;

β_a = parâmetro de forma sob condições de teste acelerado;

θ_n = parâmetro de escala sob condições de teste normal;

θ_a = parâmetro de escala sob condições de teste acelerado.

Sob condições aceleradas de operação ou teste, ou seja, com os ciclos sendo acelerado por unidade de tempo, a distribuição Weibull manterá o mesmo valor para o seu parâmetro de forma β ; apenas o valor do parâmetro de escala ou vida característica θ irá variar. No caso da distribuição exponencial, um caso especial da distribuição Weibull, onde $\beta = 1$ e com o tempo médio até a falha mf_i substituindo o parâmetro de escala θ , obtém-se:

$$R_n(t_n) = \exp\left[-\left(\frac{c_n t_n}{c_a mf_a}\right)\right] \quad (3.3)$$

$$mf_n = \frac{c_a}{c_n} mf_a \quad (3.4)$$

3.2 MODELOS COM ACELERAÇÃO LINEAR(CONSTANTE) DURANTE TODO O TESTE DE VIDA

Como visto na seção 3, o conceito básico de um teste de vida acelerado é o de que em níveis elevados (acelerados) de tensão, o mesmo mecanismo de falhas se fará presente e atuará da mesma maneira como o faria em níveis normais de tensão. A única diferença é a de que as falhas deverão ocorrer mais rapidamente, existirá apenas variação no tempo de ocorrência das falhas.

Nenhum novo mecanismo de falhas será introduzido durante o teste acelerado. O caso mais simples de teste de vida acelerado assume um efeito de aceleração constante (linear) durante todo o período de teste. Matematicamente este modelo poderá ser expresso como descrito na Equação 3.5.

$$t_n = FA \times t_a \quad (3.5)$$

Aqui, t_n representa o tempo até a ocorrência de uma falha sob condições normais de teste, t_a representa o tempo até a ocorrência de uma falha sob condições aceleradas de teste e FA representa o fator aceleração.

A função cumulativa ou probabilidade de ocorrência de falhas até um determinado tempo de teste $t = t_n$ será dada por:

$$P(T_n < t_n) = F_n(t_n) = P(T_a < t_a) = F_a\left(\frac{t_n}{FA}\right) = F_a\left(\frac{t}{FA}\right) \quad (3.6)$$

A função densidade para um determinado tempo de teste t , $f_n(t)$, será dada por:

$$f_n(t) = \frac{d}{dt} F_a\left(\frac{t}{FA}\right) = \frac{1}{FA} f_a\left(\frac{t}{FA}\right) \quad (3.7)$$

A taxa de falhas instantânea para um determinado tempo de teste t , $h_n(t)$, será dada por:

$$h_n(t) = \frac{f_n(t)}{R_n(t)} = \frac{\frac{1}{FA} f_a\left(\frac{t}{FA}\right)}{1 - F_a\left(\frac{t}{FA}\right)} = \frac{1}{FA} h_a\left(\frac{t}{FA}\right) \quad (3.8)$$

3.2.1 Aceleração de um Teste de Vida com a Distribuição de Amostragem Sendo o Modelo Exponencial.

A função cumulativa de uma distribuição exponencial sujeita a um teste de vida acelerado é dada por:

$$F_a(t) = 1 - e^{-t/\theta_a} \quad (3.9)$$

Na equação (3.9), θ_a representa o parâmetro de escala da distribuição exponencial sob condições de teste de vida acelerado. Utilizando-se agora a equação (3.6), obtém-se a função cumulativa ou probabilidade de ocorrência de falhas até um determinado tempo de teste $t = t_n$ para essa distribuição, ou seja:

$$F_n(t) = F_a\left(\frac{t}{FA}\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_a FA}\right)\right] \quad (3.10)$$

Aqui, $\theta_a FA = \theta_n$ representa o novo parâmetro de escala da distribuição exponencial sob uma condição normal de teste. A equação (3.10) nos informa que quando existe uma exponencial que represente um determinado nível de tensão qualquer, então existirá uma exponencial que representará qualquer outro nível de tensão situado dentro do intervalo no qual a condição de aceleração linear real se mantenha válida. Além disso, quando o tempo for multiplicado por um fator de aceleração FA, a taxa de falhas será dividida por FA. Entretanto, é importante ressaltar que o fato da taxa de falha variar inversamente em relação ao fator de aceleração é válido apenas quando o teste de vida é representado pela distribuição exponencial. De um modo geral, a taxa de falhas varia de uma maneira acentuadamente não-linear quando sob aceleração linear do fator tempo.

3.2.2 Aceleração de um Teste de Vida com a Distribuição de Amostragem Sendo o Modelo Weibull

A função cumulativa de uma distribuição de falhas Weibull de dois parâmetros sujeita a um teste de vida acelerado é dada por:

$$F_a(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_a}\right)^{\beta_a}\right] \quad (3.11)$$

Utilizando-se novamente a equação (3.6), obtém-se a função cumulativa ou probabilidade de ocorrência de falhas até um determinado tempo de teste $t = t_n$ para essa distribuição, ou seja:

$$F_n(t) = F_a\left(\frac{t}{FA}\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_a FA}\right)^{\beta_a}\right] \quad (3.12)$$

Se lembrarmos agora que $\theta_a FA = \theta_n$ e que $\beta_a = \beta_n = \beta$, a equação (3.12) se transforma em:

$$F_n(t) = F_a\left(\frac{t}{FA}\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_n}\right)^{\beta_n}\right] \quad (3.13)$$

A equação (3.13) nos informa que quando existir uma distribuição de vida Weibull que represente um determinado nível de tensão qualquer, então a distribuição de vida em qualquer outro nível de tensão situado dentro do intervalo no qual a condição de aceleração linear se mantenha, será também Weibull. O parâmetro de forma se manterá o mesmo nas condições de teste normal ou acelerado, ao passo que o parâmetro de escala na condição de teste normal será igual ao parâmetro de escala na condição de teste acelerado multiplicado pelo fator de aceleração. A importância do parâmetro de forma β manter o mesmo valor tanto para a condição de teste acelerado como para a de teste normal é a de justificar a condição de aceleração linear real e de o modelo Weibull ser o adequado para representar a população de dados presentes na amostra sendo testada. Na verdade, se diferentes níveis de tensão estivessem produzindo figuras com valores muito diferentes para o parâmetro de forma, então ou não teríamos uma aceleração linear verdadeira, ou então a distribuição Weibull seria o modelo errado para representar os dados sendo analisados.

A função falha instantânea de uma distribuição Weibull de dois parâmetros varia quando o teste de vida for acelerado. De fato, para uma condição de aceleração do teste, a função falha instantânea será dada por:

$$h_a(t) = \frac{\beta}{\theta_a} \left(\frac{t}{\theta_a}\right)^{\beta-1} \quad (3.14)$$

Sabendo que $\theta_n = \theta_a FA$, a função falha instantânea para uma condição normal de teste será dada por:

$$h_n(t) = \frac{\beta}{\theta_a FA} \left(\frac{t}{\theta_a FA} \right)^{\beta-1} = \frac{1}{(FA)^\beta} \frac{\beta}{\theta_a} \left(\frac{t}{\theta_a} \right)^{\beta-1} = \frac{h_a(t)}{(FA)^\beta} \quad (3.15)$$

Como podemos observar, ocorreu uma mudança linear na função falha instantânea sob condição acelerada de teste $h_a(t)$. Quando a mesma for multiplicada pelo fator $1/(FA)^\beta$, teremos como resultado a função falha instantânea sob condição normal de teste $h_n(t)$. Apenas quando o parâmetro de forma β for igual a um (1), o caso da distribuição exponencial, o fator multiplicativo será dado pela relação $1/FA$.

O fator de aceleração FA poderá ser estimado pela relação:

$$FA = \frac{\theta_n}{\theta_a} \quad (3.16)$$

Geralmente, o parâmetro de escala ou vida característica θ deverá ser estimado em dois níveis diferentes de tensão (temperatura, ciclos, quilômetros, etc.), e a relação entre ambas as estimativas de θ irá fornecer o valor procurado para o fator de aceleração FA.

3.3 MODELO DE TESTES DE VIDA COM O QUAL A TEMPERATURA É O MECANISMO PRESENTE DE ACELERAÇÃO

Nelson (1982) introduziu os modelos de exposição cumulativa mencionados anteriormente nos quais, se conhecendo os parâmetros de escala para as distribuições de vida em dois níveis diferentes de tensão, imediatamente poderíamos calcular o respectivo fator de aceleração FA entre essas duas tensões. Por outro lado, se o fator de aceleração entre um teste de vida acelerado e um sob condição normal de uso fosse antecipadamente conhecido, então seria possível converter os resultados obtidos no teste acelerado para projetar as taxas de falhas esperadas sob condição de uso normal do produto sendo testado. Geralmente isso é o que feito

para monitorar a confiabilidade de populações ou lotes em uma base individual. Mas o que fazer quando o fator de aceleração entre um teste acelerado e um em condição normal não for conhecido, e dados de falhas somente poderão ser obtidos em um tempo razoável sob condição de aceleração? A solução viável seria a de utilizarmos os dados obtidos do teste acelerado, visando ajustá-lo a um modelo apropriado que permita extrapolar esses resultados para uma condição de tensão normal.

Existem vários modelos encontrados na literatura científica que estão sendo utilizados com elevado sucesso na modelagem da aceleração de vários componentes e de vários mecanismos de falhas. Esses modelos são geralmente desenvolvidos em uma forma determinística, ou seja, aquela na qual o tempo decorrido até a ocorrência de uma falha é uma função exata do nível de tensão operacional existente no processo. O tempo ocorrido até a ocorrência de uma falha é uma variável aleatória, a qual não é possível de ser prevista com exatidão antes da ocorrência da falha. Por outro lado, a aceleração é equivalente à multiplicação do parâmetro de escala de uma distribuição de vida por um determinado fator. Desse modo, iremos interpretar um modelo de aceleração como sendo uma equação, a qual calcula o parâmetro de escala ou percentil de certa distribuição como sendo uma função da tensão operacional.

Outro fato que devemos ter em mente é o de que, em geral, mecanismos de falhas diferentes possuem diferentes distribuições de vida. Desse modo, eles poderão ter também diferentes modelos de aceleração. Ao avaliarmos a taxa de falhas de um determinado componente, utilizando o modelo de falhas pertinente, analisamos cada tipo e mecanismo de falhas existente separadamente, sendo que a taxa de falhas do componente analisado será então a soma de todas as taxas de falhas individuais de cada mecanismo analisado.

Um componente poderá vir a falhar de várias maneiras. Por exemplo, um determinado mecanismo de falhas poderá estar relacionado com uma reação química, e ser acelerado pela variação de temperatura. Um componente que possua esse tipo de modo de falhas poderá também vir a falhar devido a uma corrosão do metal, a qual poderá vir a ser altamente dependente da voltagem e da umidade, além de depender da temperatura. Ao mesmo tempo poderá existir um modelo de

falha mecânica por fadiga, a qual dependerá da presença de esforços cíclicos repetitivos. Cada um desses modos ou tipos de falhas irá apresentar modelo de aceleração completamente diferente um do outro, e deverão, portanto ser analisados separadamente.

3.4 O MODELO DE ARRHENIUS

Quando apenas a tensão térmica se constitui em um fator de aceleração, um modelo empírico, conhecido como o modelo de Arrhenius, tem sido utilizado com relativo sucesso como um modelo de aceleração. O modelo de Arrhenius está dado pela equação (1) abaixo:

$$R_{\text{rate}} = e^{-E/KT_n+C} \quad (3.17)$$

Nessa equação, R_{rate} representa a taxa de reação, E representa a energia de ativação da reação, K é a constante de gás (1,986 calorias por mol), T_n é a temperatura em graus Kelvin (273,16 mais o grau Centígrado correspondente) em condições normais de uso, e C representa uma constante.

O fator de aceleração $AF_{2/1}$ (ou a razão das taxas específicas de reação R_2/R_1), obtidas em duas distintas temperaturas de aceleração T_2 e T_1 , será dado por:

$$AF_{2/1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{e^{-E/KT_2+C}}{e^{-E/KT_1+C}} = \exp\left[\frac{E}{K}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \quad (3.18)$$

Aplicando-se o logaritmo natural a ambos os lados dessa equação e após alguma manipulação matemática, chega-se a:

$$\ln(AF_{2/1}) = \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{E}{K}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \quad (3.19)$$

A pergunta que se faz é a de que como uma equação como a equação (3.19) acima foi desenvolvida? Talvez ela possa ser relacionada com a conhecida “Maxwell Distribution Law.” Essa lei, a qual expressa a distribuição de energias cinéticas de moléculas, é dada pela seguinte equação:

$$M_{TE} = M_{tot} e^{-E/KT} \quad (3.20)$$

Aqui, M_{TE} representa o número de moléculas existentes em uma determinada temperatura absoluta Kelvin T , a qual passa uma energia cinética maior do que E entre o número total de moléculas presente, M_{tot} ; E é a energia de ativação da reação e K representa a constante de gás (1,986 calorias por mol). A equação (3.20) exprime a probabilidade de uma molécula de gás possuir uma energia maior do que E . A percentagem do número de moléculas possuindo energia E em duas diferentes temperaturas será dada por:

$$\frac{M_{TE}(2)}{M_{TE}(1)} = \frac{e^{-E/KT_2}}{e^{-E/KT_1}}$$

Aplicando-se o logaritmo natural a ambos os lados dessa equação e após alguma manipulação matemática, obtemos a seguinte relação: $\ln\left(\frac{M_{TE}(2)}{M_{TE}(1)}\right) = \frac{E}{K} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$, a qual é muito parecida com a equação (3.19). Através dessa equação (3.19) estimamos o termo E/K testando o produto ou componente em duas temperaturas aceleradas distintas e calculando o fator de aceleração em relação às distribuições pertinentes. Então;

$$\frac{E}{K} = \frac{\ln(AF_{2/1})}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} \quad (3.21)$$

O fator de aceleração $AF_{2/1}$ será dado pela relação θ_1/θ_2 , com θ_i representando um parâmetro de escala ou ainda um percentual relativo a uma temperatura de tensão T_i . Logo que o termo E/K for calculado, o fator de aceleração $AF_{2/n}$ a ser aplicado em uma temperatura de tensão normal poderá ser obtido da equação (3.18) através da substituição da temperatura de tensão T_1 pela temperatura de tensão normal de uso T_n . Logo:

$$AF_{2/n} = \exp\left[\frac{E}{K} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \quad (3.22)$$

Existem algumas limitações ao uso da equação de Arrhenius: Inicialmente, para toda a faixa de temperatura utilizada no teste torna-se necessária a obtenção de taxas lineares específicas de variação. Isso acarreta a necessidade de que a taxa de reação, indiferentemente se a mesma é medida ou representada, permaneça constante durante o período de tempo no qual o processo de envelhecimento é avaliado. Agora, se a taxa esperada de reação vier a variar durante a realização do teste de vida, então não será possível se identificar uma taxa específica que seja referida a uma temperatura específica. Se o mecanismo de reação for diferente em temperaturas mais elevadas ou menos elevadas, isso também deverá alterar o valor do parâmetro de forma da distribuição de vida do componente sendo testado. Em segundo lugar, torna-se necessário que a energia de ativação seja independente da temperatura, ou seja, permaneça constante em todo o intervalo das temperaturas utilizadas durante o teste. Acontece que, de acordo com Chornet e Roy (1980) “a aparente energia de ativação não é sempre constante, especialmente quando existe mais de um processo se desenvolvendo durante o teste de vida”.

3.5 MODELOS DE TESTES DE VIDA COM VÁRIOS MECANISMOS OU TIPOS DE ACELERAÇÃO

O modelo ou equação de Arrhenius utiliza uma equação empírica, não possuindo uma derivação teórica. Seu uso encontra justificativa no fato de que muitas das vezes ele “funciona”, ou seja, consegue representar uma situação de aceleração na qual o único ou principal fator de aceleração presente é a temperatura. De acordo com Tobias (1986), quando outros fatores de aceleração estiverem presentes, como a voltagem ou pressão, ou mesmo se o mecanismo de reação existente em temperatura normal variar em relação ao existente em temperaturas mais elevadas, o que implicaria em valores diferentes para o parâmetro de forma, o modelo de Arrhenius não consegue representar essas situações. Situações como essas acima descritas deverão ser representadas por outros modelos de aceleração.

3.5.1 O Modelo de Eyring

Em situações nas quais além da temperatura, outros tipos diferentes de fatores de aceleração estiverem presentes, o modelo de Eyring fornece uma solução geral para esse caso. Esse modelo possui uma derivação teórica através da mecânica quântica. O modelo de Eyring será dado por:

$$k = A T^\alpha e^{-B/T} \exp\left[CS_1\right] \quad (3.28)$$

k é o percentual que será estimado da distribuição de vida do processo, A , α , B e C são constantes, as quais deverão ser estimadas através de dados do teste de vida sendo desenvolvido, S_1 representa um segundo fator de aceleração. Na equação (3.28), o termo $A T^\alpha e^{-B/T}$ está relacionado com a temperatura, ao passo que o termo seguinte $\exp\left[CS_1\right]$ é a forma geral para adicionarmos ao teste de vida qualquer outro tipo de tensão ou aceleração. A constante B poderá ser calculada através da equação (3.21). O termo $A T^\alpha e^{-B/T}$, com exceção do fator T^α , se comporta como o modelo de Arrhenius. Se a constante α apresentar um valor próximo de zero, ou se o intervalo no qual o modelo esteja sendo aplicado for pequeno, então o fator T^α apresentará um valor próximo do valor 1 para todas as temperaturas analisadas. Desse modo, terá um impacto muito pequeno, podendo portanto seu valor ser absorvido pela constante A , sem alterar o valor prático da equação (28). No caso de não existir um segundo fator de aceleração ou tensão, ou seja, no caso do termo $\exp\left[CS_1\right]$ não existir, a semelhança existente entre a equação (3.28) e o modelo de Arrhenius é muito aparente. Esse fato explica a razão do modelo de Arrhenius representar tão bem a situação de aceleração quando apenas a temperatura esteja atuando como agente acelerador ou de tensão. Na realidade, o modelo empírico de Arrhenius é uma simplificação muito útil do modelo teoricamente desenvolvido por Eyring. O fator de aceleração para esse modelo será dado por:

$$FA = \frac{AT_2^\alpha \exp[-(B/T_2)] \exp[CS_2]}{AT_1^\alpha \exp[-(B/T_1)] \exp[CS_1]}, \text{ ou seja:}$$

$$FA = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\alpha \exp\left[B\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \exp\left[C(S_2 - S_1)\right] \quad (3.29)$$

Como vimos, para aplicar esse modelo, estimar as quatro constantes desse modelo é necessário de pelo menos de quatro resultados numéricos em dois níveis de temperatura diferentes cada e também de dois níveis diferentes de tensão ou aceleração. Preferencialmente, deveríamos ter mais resultados além desse valor mínimo, de modo a podermos avaliar a adequação da ajustagem do modelo para as condições existentes. Torna-se óbvio que planejar e desenvolver uma experiência desse tamanho não é uma tarefa de fácil realização. Entretanto, o modelo de Eyring constitui uma alternativa viável para esses tipos de problemas de aceleração.

3.6 MODELOS DE DEGRADAÇÃO

No caso de produtos que possuam um determinado parâmetro que esteja se deteriorando ou degradando com o passar do tempo em direção a um nível definido como sendo o nível de falhas, então talvez seja possível se prever o tempo esperado de falha pela extrapolação da degradação em relação ao desempenho desse parâmetro com o passar do tempo. O desempenho poderá ser avaliado tanto em condição de operação ou tensão normal como em condição de aceleração ou tensão aumentada. Torna-se necessário a especificação de um nível crítico de desempenho que venha resultar na ocorrência de uma falha. Como exemplos de processos de degradação temos a corrosão, a propagação de trincas, o envelhecimento e o período de validade de produtos farmacêuticos. Uma ferramenta estatística, a análise de regressão, poderá ser utilizada para desenvolver modelos empíricos que relacionem a degradação com o desempenho com o passar do tempo. A relação mais simples existente é a linear, dada por $x = a - bt$, onde x representa o desempenho a ser avaliado (ou geralmente o logaritmo do desempenho a ser avaliado), a e b são constantes a serem determinadas experimentalmente, e t representa o tempo total que um produto é submetido a um determinado nível constante de aceleração ou tensão. No caso de x_i representar o

nível de aceleração ou de tensão no qual uma falha ocorrerá, então o tempo até a ocorrência da falha, t_i , será dado por:

$$t_i = \frac{a - x_i}{b} \quad (3.30)$$

Esse tempo até a falha t_i será tratado como sendo um valor particular ou típico. Ele poderá também ser interpretado como sendo o valor esperado ou a mediana de uma determinada distribuição de falhas. De uma maneira alternativa, uma amostra com um número n de itens poderá ser testada, o desempenho sendo avaliado várias vezes para cada unidade, e linhas de regressão poderão ser ajustadas para cada unidade. Como resultado teremos uma amostra com n tempos de falhas previstos.

Para submetemos a um teste de vida um componente ou um produto sujeito a um mecanismo de degradação, poderemos submeter algumas unidades desse componente ou produto a uma situação de degradação. Para cada unidade testada poderíamos medir a perda por degradação durante diferentes períodos de tempo. O teste de vida deverá terminar quando um determinado nível crítico de desempenho da característica sendo analisada for alcançado, após o qual o componente ou produto não é mais estruturalmente confiável. Entretanto, para determinados tipos de material metálico sujeito a uma situação de corrosão atmosférica, o tempo necessário para que a degradação se torne inaceitável pode ser muito longo. O período de tempo disponível para se realizar o teste de vida poderá ser consideravelmente menor do que o tempo necessário para se atingir um determinado nível crítico de desempenho.

De Souza e Fonseca (2009) analisam essa situação utilizando dados obtidos de um teste de vida de um modelo de degradação proposto por Ebeling (1997), relacionado com a corrosão atmosférica. Na aplicação desse modelo, foi calculado a “Taxa de Penetração da Corrosão (CPR)”, a qual mede a espessura de perda de material por unidade de tempo.

Esse modelo está representado pela equação (3.31) abaixo:

$$\text{CPR} = \frac{w(t)}{\delta t \times 100} \quad (3.31)$$

Na equação (3.31) acima, $w(t)$ representa a perda de peso devido à corrosão atmosférica após um período de t anos de exposição em MG/cm^2 (miligramas por centímetro quadrado); δ representa a densidade do material em g/cm^3 ; t é o tempo de exposição em anos. A constante $1/100$ converte CPR para mm/ano . Na aplicação do modelo de Ebeling (1997), unidades do produto são submetidas a um teste de vida em condições ambientais normais que favorecem o desenvolvimento da corrosão. Então, após um determinado período de tempo t_i , avalia-se a perda de peso $w(t_i)$ calculando-se a seguir o CPR através do uso da equação (3.31). Agora, se k_j representa a perda máxima permitida em mm , após a qual o produto não é mais estruturalmente confiável, poderemos então calcular o tempo esperado $E(t_j)$ correspondente a essa perda máxima permitida. Desse modo, teremos:

$$E(t_j) = \frac{k_j}{\text{CPR}} \quad (3.32)$$

Na aplicação desse modelo, foram calculadas as taxas de penetração da corrosão após seis meses e um ano de exposição ao meio ambiente de chapas de aço. Em seguida, foram utilizadas essas taxas para calcular taxas esperadas de penetração da corrosão para dois e quatro anos utilizando o modelo proposto por Ebeling. Quando comparamos esses resultados obtidos do teste de vida com as perdas estimadas calculadas pelo modelo de Ebeling, foram verificadas para todas as três condições ambientais analisadas nesse trabalho (urbano-industrial, rural e marítima), o modelo de degradação proposto por Ebeling (1997) teve um desempenho muito ruim em estimar os tempos esperados até a falha para os três tipos de aço testados; aço de alta resistência e baixa liga (Cor-Ten A e B), aço ao Carbono e aço ao Cobre.

Os autores concluíram que o modelo proposto por Ebeling não leva em consideração fatores importantes, tais como: temperaturas médias, média anual de precipitação, e níveis médios de umidade. Talvez em condições controladas de um laboratório, o modelo de Ebeling possa vir a ser útil na determinação de taxas de

corrosão esperadas relacionadas com o tempo de exposição, com um nível aceitável de precisão.

3.7 MODELOS DE DEFORMAÇÃO OU ESTRAGO ACUMULATIVO

Se a deformação ou estrago de um componente acumular continuamente, o que levará o componente a vir a falhar, e se o percentual ou taxa de deformação ou estrago depender apenas da quantidade de deformação ou estrago e não de qualquer outro fato decorrido com o componente sendo analisado, então a generalização seguinte da regra de Miner poderá ser utilizada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{V_i} = 1 \quad (3.36)$$

t_i é o período de tempo que o componente será submetido a um nível de tensão i ;

V_i representa a vida esperada do componente submetido a um nível de tensão i . A regra de Miner possui a seguinte forma geral:

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (3.37)$$

n_i é o número de ciclos que o componente será submetido a um nível de tensão i ;

N_i representa o número de ciclos até a falha no mesmo nível de tensão i . O valor de N_i é determinado através da curva de fadiga N-S, onde N representa o número de ciclos até a falha; S representa a magnitude da tensão cíclica, medida geralmente em PSI, ou seja, libras por polegadas quadradas (lb/in^2).

Para a aplicação do modelo dado pela equação (3.36), considere dois níveis de tensão distintos: t_1 representando um nível normal de tensão; t_2 representando

um nível elevado de tensão. Então, utilizando-se a equação (3.36), teremos

$$\frac{t_1}{V_1} + \frac{t_2}{V_2} = 1.$$

Logo, o valor de t_2 será dado por:

$$t_2 = V_2 - \frac{V_2}{V_1} t_1 \quad (3.38)$$

A equação (3.38) é conhecida como sendo a linha de falha, devido ao fato de que qualquer combinação de tempos sob tensão $(t_1; t_2)$ que esteja sobre essa linha irá resultar em uma falha. Na determinação do valor de V_2 , o tempo esperado de vida do componente submetido a um nível de tensão 2, testa-se o componente em um nível elevado de tensão (nível 2) até a ocorrência da falha (V_2). Após isso, para se determinar um segundo ponto sobre essa linha de falha, testa-se o componente inicialmente durante um tempo t_1 em um nível de tensão normal (nível 1), em seguida testa-se o componente em um nível de tensão elevado (nível 2) até a ocorrência da falha no tempo t_2 . Logo, utilizando-se a equação (3.38), V_1 , o tempo esperado de vida do componente submetido a um nível de tensão 1 (normal), será dado por:

$$V_1 = \frac{t_1 V_2}{V_2 - t_2} \quad (3.39)$$

3.8 MODELOS COM TENSÕES AUMENTADAS CONTINUADAMENTE

Nesses tipos de modelos de testes de vida acelerados, o teste se inicia em uma condição normal de uso. Após um determinado período de tempo, o nível de tensão submetido ao produto ou componente sendo testado é aumentado. Esses aumentos contínuos de tensão serão implementados até que todas os componentes sendo testados venham a falhar. A principal condição assumida no desenvolvimento desse tipo de teste é a de que o aumento no nível de tensão será equivalente a uma mudança linear na escala de tempo. Esses modelos são mais complexos do que os

modelos com tensões constantes. Nelson (1990) analisa vários modelos de tensões aumentadas continuamente e a análise dos resultados obtidos, bem como apresenta uma abordagem detalhada relativa a testes de vida acelerados.

3.9 OUTROS MODELOS DE ACELERAÇÃO

Existem muitos outros modelos de aceleração, alguns deles sendo simplificações do modelo de Eyring que conseguiram representar com sucesso determinado produto ou serviço submetidos a diferentes formas de tensão ou aceleração. Um modelo muito útil aplicado em falhas por eletro-migração utiliza a densidade de corrente elétrica como um parâmetro chave de aceleração ou tensão. Esse modelo é o dado por:

$$k = A L^{-n} e^{-B/T} \quad (3.40)$$

$B = E/8,6171 \times 10^{-5}$; L representa a densidade da corrente; n , uma constante, geralmente é igual a 2.

Modelos relativos a falhas de ordem mecânica, geralmente causadas por trincas e fadiga ou deformação do material, possuem componentes relacionados com ciclos de tensão ou mudanças na temperatura ou frequência de uso. O modelo seguinte, resultante de uma modificação do modelo de Coffin-Manson, utilizado para avaliar trincas de soldas sob tensão causada por variações cíclicas repetitivas de temperaturas (como no caso de um componente eletrônico, o qual recebe num momento energia e no próximo não recebe), se constitui em exemplo de um modelo relativo a falhas de ordem mecânica. Esse modelo será dado por:

$$C_f = A f^\alpha (1/\Delta T)^\varphi H(T_{\max}) \quad (3.41)$$

C_f representa o número de ciclos para a ocorrência de um determinado percentual de falhas; f é a frequência dos ciclos; ΔT representa o intervalo de temperatura; H é um fator que depende da temperatura máxima alcançada em um ciclo; α e φ são

constantes, as quais deverão ser estimadas através de dados do teste de vida sendo desenvolvido.

3.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE OS TIPOS DE TESTES DE VIDA ACELERADOS.

Ao analisarmos testes de vida acelerados, torna-se importante notarmos que, na construção de modelos, procedimentos do tipo tentativa e erro, utilizando como abordagem inicial o uso de um modelo Eyring completo e, através da tentativa de ajustagem de dados, modificá-lo, deverá apenas ser tentado como um último recurso. Um experimento baseado nessa abordagem provavelmente deverá ser altamente dispendioso e com alta probabilidade de fracasso. Será muito melhor se ter um modelo em mente antes de se planejar a experiência. Esse modelo a ser testado deverá ter sido desenvolvido a partir de estudos teóricos do mecanismo de falha, ou então, através de uma pesquisa na literatura sobre o que tem sido usado nesse caso em estudo. O modelo mais simples que possa ser encontrado ou derivado é o que deverá ser utilizado. A utilização deverá ser mantida até quando esse modelo conseguir calcular valores que sejam iguais aos resultados obtidos de experiências e fazer estimações que não sejam contraditas pela experiência.

Em relação ao modelo de Arrhenius, existem várias limitações básicas para o seu uso. De acordo com Gray (1977), torna-se necessário a obtenção, para todas as faixas de temperaturas utilizadas no teste acelerado, de taxas ou percentuais específicos de variação linear. Por isso se entende que a taxa de reação, tendo sido medida ou representada, necessita ser constante durante todo o período de tempo no qual o processo de envelhecimento ou deterioração está sendo avaliado. Se a taxa aparente de reação vier a variar durante o período de tempo de aplicação do teste de vida, então não será possível se identificar uma taxa específica de reação que seja relacionada com uma temperatura específica. Se o mecanismo de reação em temperaturas elevadas ou baixas de teste variar, isso irá também alterar o valor do parâmetro de forma da distribuição de vida presente, com isso impossibilitando o uso da equação de Arrhenius. De acordo com Edge et al(1992), a obtenção de dados de taxas de falhas em diversas temperaturas constitui, sem a menor dúvida, uma tarefa das mais demoradas, o que torna o teste de Arrhenius “não prático” para

uma rotina de repetição de um teste de vida. Agrawal (1985) destacou como limitação importante o fato da equação de Arrhenius ser aplicada apenas em condições de reação ou aceleração homogênea, não possuindo quase nenhuma significância em reações no estado sólido. Feller (1994) apresenta várias limitações ao uso da equação de Arrhenius.

Vale destacar que, o principal problema encontrado na utilização de testes de vida acelerado; o de como relacionar a taxa de falha obtida no teste acelerado, no qual o produto ou sistema é submetido a um nível aumentado (elevado) de tensão, com a verdadeira taxa de falhas que o mesmo virá a apresentar quando em uso sob condições normais de tensão. Por isso, que o modelo a ser utilizado em um teste de vida acelerado deva ser o modelo mais simples que possa ser derivado da teoria existente.

4 METODOLOGIA E COMPONENTES UTILIZADOS NESSE ESTUDO

4.1 DISTRIBUIÇÕES DA FAMÍLIA DE VALORES EXTREMOS WEIBULL E WEIBULL INVERTIDA DE TRÊS PARÂMETROS

A distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros é largamente utilizada como um modelo de falhas, particularmente para componentes mecânicos e metalúrgicos. Essa distribuição é rica em forma, o que a torna apta a representar de uma maneira adequada o padrão de variedade de muitas situações encontradas na indústria. Essa distribuição possui um parâmetro de localização ou vida mínima, um de escala e um de forma. A função densidade do modelo Weibull de três parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta} \right]; t \geq 0; \theta, \beta, \varphi > 0 \quad (4.1)$$

O parâmetro de escala θ (a vida característica) é positivo, e representa o ponto percentual 63,21 da distribuição de T. O parâmetro de forma β , o qual é também positivo, especifica a forma da distribuição. O parâmetro de vida mínima φ é também positivo e será sempre menor do que o primeiro tempo de falhas t_1 .

O modelo Weibull Invertido foi desenvolvido por Pascoal Erto (1982). Essa distribuição tem sido muito empregada em estimação Bayesiana da confiabilidade de diversos produtos para representar toda a informação disponível acerca do parâmetro de forma de uma distribuição de amostragem Weibull, como em Erto (1982), De Souza e Lamberson (1995). Ela possui também um parâmetro de forma, um de escala e um de vida mínima. O modelo Weibull Invertido tem sido também utilizado na estimação da confiabilidade de produtos eletrônicos, situação na qual

parece oferecer uma melhor resposta ao problema de precisão apresentado pelo modelo Weibull, como mostrado por De Souza (2005). Acontece que quando o valor do parâmetro de forma do modelo Weibull for maior do que sete, a curva Weibull se torna muito cônica (em forma de pico), acarretando certa dificuldade computacional (precisão) no cálculo dos valores das características de interesse do componente sendo analisado. Essa dificuldade resulta do fato de que no caso da utilização dos modelos Weibull e Weibull Invertido como distribuições de amostragem, torna-se necessário o emprego de integração numérica para o cálculo dos valores dessas características desejadas. A função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+1} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta} \right]; t \geq 0; \theta, \beta, \varphi > 0 \quad (4.2)$$

4.2 O FATOR DE ACELERAÇÃO

A “Lei de Distribuição de Maxwell”, a qual expressa a distribuição de energias cinéticas de moléculas, é dada pela seguinte equação:

$$M_{TE} = M_{tot} e^{-E/KT} \quad (4.3)$$

Aqui, M_{TE} representa o número de moléculas existentes em uma determinada temperatura absoluta Kelvin T , a qual passa uma energia cinética maior do que E entre o número total de moléculas presente, M_{tot} ; E é a energia de ativação da reação e K representa a constante de gás (1,986 calorias por mol). A equação (4.3) exprime a probabilidade de uma molécula de gás possuir uma energia maior do que E .

O fator de aceleração $AF_{2/1}$, correspondente a duas temperaturas diferentes de tensão T_2 e T_1 , será dado pela relação entre o número de moléculas possuindo energia de ativação E nessas duas temperaturas distintas, ou seja:

$$AF_{2/1} = \frac{M_{TE}(2)}{M_{TE}(1)} = \exp \left[\frac{E}{K} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right] \quad (4.4)$$

Aplicando-se agora o logaritmo natural a ambos os lados da equação (4.4) e após alguma manipulação algébrica, obtém-se:

$$\ln(AF_{2/1}) = \ln\left(\frac{M_{TE}(2)}{M_{TE}(1)}\right) \quad (4.5)$$

Ou ainda, no caso do fator de aceleração ser a temperatura, tem-se a seguinte relação:

$$\ln(AF_{2/1}) = \frac{E}{K} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (4.6)$$

Da equação (4.6) pode-se estimar o termo E/K testando o produto em duas temperaturas de tensão diferentes e calculando o fator de aceleração relativo às distribuições de amostragem. Desse modo, tem-se:

$$\frac{E}{K} = \frac{\ln(AF_{2/1})}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \quad (4.7)$$

O fator de aceleração $AF_{2/1}$ será dado pela relação entre θ_1/θ_2 , com θ_i representando um parâmetro de escala ou um percentil de um nível de tensão correspondente à temperatura T_i . Uma vez que o termo E/K for determinado, o fator de aceleração $AF_{2/n}$ a ser utilizado em uma temperatura de tensão normal poderá ser obtido da equação (4.7) através da substituição da temperatura de tensão T_1 pela temperatura correspondente a uma condição normal de uso T_n . Logo:

$$AF_{2/n} = \exp\left[\frac{E}{K} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_2} \right)\right] \quad (4.8)$$

De Souza (2005) mostrou que sob uma hipótese de aceleração linear, se uma distribuição Weibull Invertida de três parâmetros representar a distribuição de vida de um determinado produto ou componente em um nível de tensão específico, então um modelo Weibull Invertido de três parâmetros irá também representar a distribuição de vida desse produto ou componente em qualquer outro nível de tensão que se considere. De uma maneira geral, os parâmetros de escala e de vida

mínima poderão ser estimados através da utilização de dois níveis diferentes de tensão (por exemplo, temperatura ou número de ciclos, ou quilômetros, ou pressão, etc.), e suas proporções irá fornecer o valor desejado para os fatores de aceleração AF_θ e AF_φ . Logo:

$$AF_\theta = \frac{\theta_n}{\theta_a} \quad (4.9)$$

$$AF_\varphi = \frac{\varphi_n}{\varphi_a} \quad (4.10)$$

De acordo com De Souza (2005) e (2006), para os modelos de três parâmetros Weibull Invertido e Weibull, as funções de distribuição cumulativa em uma condição normal de uso $F_n(t_n - \varphi_n)$ correspondente a um certo tempo de teste $t = t_n$, serão respectivamente dadas por:

$$F_n(t_n - \varphi_n) = \exp \left[- \left(\frac{\frac{\theta_n}{AF}}{AF \left(t_n - \frac{\varphi_n}{AF} \right)} \right)^{\beta_n} \right] \quad (4.11)$$

$$F_n(t_n - \varphi_n) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t_n - \frac{\varphi_n}{AF}}{\theta_n AF} \right)^{\beta_n} \right] \quad (4.12)$$

As equações (4.11) e (4.12) nos informam respectivamente que, ao assumirmos uma condição de aceleração linear, e se um modelo Weibull Invertido ou Weibull de três parâmetros representarem a distribuição de vida de um determinado produto ou componente em um nível de tensão específico, então um modelo Weibull Invertido ou Weibull de três parâmetros irá também representar a distribuição de vida desse produto ou componente em qualquer outro nível de tensão que se considere. O valor do parâmetro de forma permanece o mesmo ao passo que os parâmetros acelerados de escala e de vida mínima serão multiplicados pelo fator de aceleração. Um mesmo valor para o parâmetro de forma é uma consequência matemática necessária para que se tenham as duas outras

suposições; ou seja, assumir-se um modelo de aceleração linear e uma distribuição de amostragem Weibull Invertido ou Weibull de três parâmetros. Caso diferentes níveis de tensão produzir dados com parâmetros de forma muito diferente uns dos outros, então ou não se tem uma condição de aceleração linear ou os modelos Weibull Invertido ou Weibull de três parâmetros não são adequados para representarem os dados obtidos relacionados com um determinado produto ou universo.

4.3 AS SITUAÇÕES DO TESTE DE HIPÓTESES

As situações do teste de hipóteses foram dadas por Kapur e Lamberson (1977) e por De Souza (2000).

1. Para o parâmetro de escala θ : $H_0: \theta \geq \theta_0$; $H_1: \theta < \theta_0$

A probabilidade de se aceitar a hipótese nula H_0 será fixada em $(1-\alpha)$ no caso do parâmetro de escala da população θ for igual ao parâmetro de escala da hipótese nula θ_0 ($\theta = \theta_0$). Agora, no caso do parâmetro de escala da população θ for igual ao parâmetro de escala da hipótese nula θ_1 ($\theta = \theta_1$), sendo ainda $\theta_1 < \theta_0$, então a probabilidade de se aceitar a hipótese nula H_0 será fixada em um nível pequeno γ .

2. Para o parâmetro de forma β : $H_0: \beta \geq \beta_0$; $H_1: \beta < \beta_0$

A probabilidade de se aceitar a hipótese nula H_0 será fixada em $(1-\alpha)$ no caso do parâmetro de forma da população β for igual ao parâmetro de forma da hipótese nula β_0 ($\beta = \beta_0$). Agora, no caso do parâmetro de forma da população β for igual ao parâmetro de forma da hipótese nula β_1 ($\beta = \beta_1$), sendo ainda $\beta_1 < \beta_0$, então a probabilidade de se aceitar a hipótese nula H_0 será fixada em um nível pequeno γ .

3. Para o parâmetro de vida mínima φ : $H_0: \varphi \geq \varphi_0$; $H_1: \varphi < \varphi_0$

Novamente, a probabilidade de se aceitar a hipótese nula H_0 será fixada em $(1-\alpha)$ no caso do parâmetro de vida mínima da população φ for igual ao parâmetro de vida mínima da hipótese nula φ_0 ($\varphi = \varphi_0$). Agora, no caso do parâmetro de vida mínima da população φ for igual ao parâmetro de vida mínima da hipótese nula φ_1 (φ

= φ_1), sendo ainda $\varphi < \varphi_0$, então a probabilidade de se aceitar a hipótese nula H_0 será uma vez mais fixada em um nível pequeno γ .

4.4 O TESTE DE VIDA SEQUENCIAL

De acordo com Kapur e Lamberson (1977) e De Souza (2001), para os modelos Weibull e Weibull Invertido de três parâmetros, a relação sequencial probabilística (SPR) será dada por $SPR = L_{1, 1, 1, N/L0, 0, 0, n}$.

a) Modelo Weibull de três Parâmetros.

De acordo com De Souza (2003), para o modelo Weibull de três parâmetros, teremos:

$$SPR = \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 - 1}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 - 1}} \right] \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) \right]$$

A região contínua será dada por $A < SPR < B$, onde $A = \gamma / (1 - \alpha)$; $B = (1 - \gamma) / \alpha$. Iremos aceitar a hipótese nula H_0 se $SPR \geq B$ e iremos rejeitar H_0 se $SPR \leq A$. Agora, no caso de $A < SPR < B$, analisaremos mais uma observação. Então:

$$\frac{\gamma}{(1 - \alpha)} < \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 - 1}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 - 1}} \right] \times$$

$$\times \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) \right] < \frac{(1 - \gamma)}{\alpha}$$

Tomando-se os logaritmos naturais de todos os termos da equação acima e após alguma manipulação algébrica, obtém-se:

$$n \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) - \ln \left[\frac{(1-\gamma)}{\alpha} \right] < X < n \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + \ln \left[\frac{(1-\alpha)}{\gamma} \right] \quad (4.13)$$

$$X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) - (\beta_1 - 1) \times \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_1) + \\ + (\beta_0 - 1) \times \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_0) \quad (4.14)$$

b) Modelo Weibull Invertido de três Parâmetros.

De acordo com De Souza (2002), para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros, a relação sequencial probabilística (SPR) será dada por:

$$SPR = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\beta_1}{\theta_1} \right) \left(\frac{\theta_1}{t_i - \phi_1} \right)^{\beta_1 + 1} \exp \left[- \left(\frac{\theta_1}{t_i - \phi_1} \right)^{\beta_1} \right]}{\left(\frac{\beta_0}{\theta_0} \right) \left(\frac{\theta_0}{t_i - \phi_0} \right)^{\beta_0 + 1} \exp \left[- \left(\frac{\theta_0}{t_i - \phi_0} \right)^{\beta_0} \right]}, \text{ ou ainda;}$$

$$SPR = \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 + 1}}{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 + 1}} \right] \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_1^{\beta_1}}{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}} - \frac{\theta_0^{\beta_0}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}} \right) \right]$$

A região contínua será dada por $A < SPR < B$, onde $A = \gamma / (1-\alpha)$; $B = (1-\gamma) / \alpha$.
Deveremos aceitar a hipótese nula H_0 se $SPR \geq B$ e iremos rejeitar H_0 se $SPR \leq A$.
Agora, no caso de $A < SPR < B$, analisaremos mais uma observação. Logo:

$$\frac{\gamma}{(1-\alpha)} < \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 + 1}}{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 + 1}} \right] \times$$

$$\times \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_1^{\beta_1}}{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}} - \frac{\theta_0^{\beta_0}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}} \right) \right] < \frac{(1-\gamma)}{\alpha}$$

Tomando-se uma vez mais os logaritmos naturais de todos os termos da equação acima e após alguma manipulação algébrica, tem-se:

$$n \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) - \ln \left[\frac{(1-\gamma)}{\alpha} \right] < X < n \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta_1^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + \ln \left[\frac{(1-\alpha)}{\gamma} \right] \quad (4.15)$$

$$X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_1^{\beta_1}}{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}} - \frac{\theta_0^{\beta_0}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}} \right) - (\beta_0 + 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_0) +$$

$$+ (\beta_1 + 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_1) \quad (4.16)$$

4.5 O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA PARA OS MODELOS WEIBULL E WEIBULL INVERTIDO DE TRÊS PARÂMETROS: TRUNCAGEM POR FALHAS

a) Modelo Weibull de três Parâmetros

O estimador de máxima verossimilhança (maximum likelihood) para os parâmetros de forma, de escala e de vida mínima de uma distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, em uma situação de teste de vida truncado por falhas, será dado por:

$$L(\beta; \theta; \varphi) = k! \left[\prod_{i=1}^r f(t_i) \right] [1 - F(t_r)]^{n-r} = k! \left[\prod_{i=1}^r f(t_i) \right] [R(t_r)]^{n-r}; t > 0 \quad (4.17)$$

Com $f(t_i) = \frac{\beta}{\theta^\beta} (t_i - \varphi)^{\beta-1} e^{-(t_i - \varphi/\theta)^\beta}$ e com $R(t_r) = e^{-(t_r - \varphi/\theta)^\beta}$, tem-se:

$$L(\beta; \theta; \varphi) = k! \frac{\beta^r}{\theta^{\beta r}} \left[\prod_{i=1}^r (t_i - \varphi) \right]^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi/\theta)^\beta} \left[e^{-(t_r - \varphi/\theta)^\beta} \right]^{n-r}$$

A função log-similarança $L = \ln[L(\beta; \theta; \varphi)]$ será dada por:

$$L = \ln(k) + r \ln(\beta) - r\beta \ln(\theta) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \sum_{i=1}^r \left(\frac{t_i - \varphi}{\theta} \right)^\beta - (n - r) \times \left(\frac{t_r - \varphi}{\theta} \right)^\beta$$

Para encontrarmos os valores de θ , β e φ que maximizem a função log-similarança, obteremos as derivadas em função de θ , β e de φ fazendo essas equações iguais a zero. Então, aplicando alguma álgebra, obteremos:

$$\frac{dL}{d\theta} = -\frac{r\beta}{\theta} + \frac{\beta \times \sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta}{\theta^{\beta+1}} + \frac{\beta(n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{\theta^{\beta+1}} = 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\beta} &= \frac{r}{\beta} - r \ln(\theta) + \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \sum_{i=1}^r \left(\frac{t_i - \varphi}{\theta} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i - \varphi}{\theta} \right) - \\ &\quad - (n-r) \left(\frac{t_r - \varphi}{\theta} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_r - \varphi}{\theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = -(\beta - 1) \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} + \frac{\beta \times \left[\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^{\beta-1} + (n-r)(t_r - \varphi)^{\beta-1} \right]}{\theta^\beta} = 0 \quad (4.20)$$

Da equação (4.18), teremos:

$$\theta = \left(\frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{r} \right)^{1/\beta} \quad (4.21)$$

Veja que quando $\beta = 1$, a equação (4.21) se reduzirá ao estimador de máxima verossimilhança para a distribuição exponencial de dois parâmetros. Substituindo agora a equação (4.21) para θ nas equações (4.19) e (4.20) e aplicando alguma álgebra, as equações (4.19) e (4.20) se transformam em:

$$\frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \frac{r \times \left[\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta \ln(t_i - \varphi) + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta \ln(t_r - \varphi) \right]}{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta} = 0 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{r} \right] (\beta - 1) \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} + \\ & + \beta \times \left[\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^{\beta-1} + (n-r)(t_r - \varphi)^{\beta-1} \right] = 0 \quad (4.23) \end{aligned}$$

O problema se reduziu ao de se obter uma solução simultânea para as duas equações iterativas (4.22) e (4.23). A solução simultânea de duas equações iterativas pode parecer um problema relativamente simples, quando comparado com a árdua tarefa de se resolver simultaneamente três equações iterativas, como descrito por Harter et al., (1965). Em uma situação como essa, uma possível simplificação para se obter estimadores quando os valores de todos os três parâmetros são desconhecidos seria através do mecanismo proposto por Bain (1978), por exemplo, supondo que $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta}$ representem bons estimadores lineares sem tendências (sigla internacional representada por GLUEs) do parâmetro de forma

β e do parâmetro de escala θ relativos a um determinado valor fixo da vida mínima φ . Seria possível se escolher um valor inicial para φ visando obter os estimadores $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta}$, utilizando-se a seguir esses dois valores na equação (4.17), ou seja, a equação do estimador Maximum Likelihood para o parâmetro de vida mínima φ . Pode-se então se obter da equação (4.23) um estimador $\hat{\varphi}$, em seguida pode-se recalculer os estimadores GLUEs de β e de θ relativos a esse novo estimador $\hat{\varphi}$, e empregando-se esses novos valores de β e de θ na equação (4.23), obter-se um novo estimador para a vida mínima φ . Continuando-se com essa interação, chegar-se-ia a valores aproximados para os estimadores do Maximum Likelihood. Como podemos observar, a vantagem de se utilizar os estimadores GLUEs é a de se ter de resolver implicitamente apenas uma equação. A existência de soluções para o grupo acima de equações (4.22) e (4.23) tem sido frequentemente estudada por pesquisadores, pois se pode obter mais de uma solução para esse problema, ou mesmo ainda não se obter nenhuma solução; veja o artigo publicado por Zanakis and Kyparisis (1986).

O método de estimação padrão da máxima verossimilhança (Maximum Likelihood) quando utilizado na estimação dos três parâmetros do modelo Weibull poderá apresentar problemas, devido ao fato de que as condições de regularidade não serem obtidas, veja Murthy et al., (2004), Blischke, (1974) e Zanakis and Kyparisis, (1986). Pesquisadores frequentemente têm discutido a existência de soluções para o sistema anterior formado pelas equações (4.22) e (4.23), devido poder-se ter mais de uma solução para esse sistema, ou mesmo, nenhuma solução possível; veja Zanakis and Kyparisis (1986). Para se resolver esse problema de falta de regularidade, um dos métodos propostos por Cohen, et al. (1984) é o de se substituir a equação (4.23) pela equação do valor esperado da vida mínima em relação ao primeiro tempo de falhas t_1 :

$$E(\varphi) = \varphi = t_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (4.24)$$

Aqui, t_1 representa a primeira ordem estatística de uma amostra de tamanho n .

De acordo com Cohen (1975), semelhante ao mecanismo proposto por Bain (1978), sob a suposição que β_0 e θ_0 representem respectivamente, adequados

estimadores lineares sem tendências dos parâmetros β e θ . Desse modo poderemos escolher um valor inicial para vida mínima φ com o objetivo de se obter os estimadores iniciais β_0 e θ_0 , empregando-se em seguida esses dois valores na equação do estimador máxima verossimilhança, ou seja, na equação (4.17). Desse modo repetindo essa logica chegaríamos a valores aproximados dos valores reais dos parâmetros β e θ .

Desse modo, partindo-se da função densidade do primeiro tempo de falhas, essa equação (4.24) possui a seguinte derivação:

A função densidade de t_1 será dada por: $f(t_1) = n [1 - F(t_1)]^{n-1} f(t_1)$.

Agora, como $F(t_1) = 1 - R(t_1)$, obteremos: $f(t_1) = n [R(t_1)]^{n-1} f(t_1)$.

Para a distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, teremos:

$$f(t_1) = \frac{n\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^\beta\right] \right\}^n$$

O valor esperado de t_1 será dado por:

$$E(t_1) = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{n\beta}{\theta} t \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^\beta\right] \right\}^n dt.$$

$$\text{Com } U = \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^\beta; \quad du = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1} dt; \quad dt = \frac{du}{\frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta}\right)^{\beta-1}}; \quad t = \theta U^{1/\beta} + \varphi$$

Quando $t \rightarrow \infty$; $U \rightarrow \infty$; Agora, quando $t \rightarrow \varphi$; $U \rightarrow 0$. Logo:

$$E(t_1) = \int_0^{\infty} n(\theta U^{1/\beta} + \varphi) e^{-nU} du = \theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du + \varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du, \text{ onde}$$

$$\varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du = -\varphi \left[e^{-nU} \right]_0^{\infty} = -\varphi [0 - 1] = \varphi$$

Na solução da integral $\theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du$, faça $Z = nU$; $du = \frac{dz}{n}$; $U = \frac{Z}{n}$.

Quando $U \rightarrow \infty$; $Z \rightarrow \infty$; Quando $U \rightarrow 0$; $Z \rightarrow 0$. Então:

$$E(t_1) = \theta \int_0^{\infty} \left(\frac{Z}{n} \right)^{1/\beta} e^{-Z} dz + \varphi = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \int_0^{\infty} Z^{1/\beta} e^{-Z} dz + \varphi.$$

Resolvendo-se essa integral, obteremos: $E(t_1) = t_1 = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \varphi$.

Então φ poderá ser então estimada por:

$$E(\varphi) = \varphi = t_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

Essa equação acima é a equação (4.24). Com θ dado pela equação (4.21), finalmente teremos:

$$t_1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \varphi)^\beta + (n-r)(t_r - \varphi)^\beta}{r \times n} \right)^{1/\beta} \times \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = 0 \quad (4.25)$$

Na solução das equações do estimador de máxima verossimilhança, iremos utilizar essa sugestão proposta por Cohen et al., (1984). Desse modo, o problema foi reduzido à solução simultânea das duas equações iterativas (4.22) e (4.25).

b) Modelo Weibull Invertido de três Parâmetros

O estimador de máxima verossimilhança (maximum likelihood) para os parâmetros de forma, de escala e de vida mínima de uma distribuição de amostragem Weibull

Invertido de três parâmetros, em uma situação de teste de vida truncado por falhas, será dado por:

$$L(\beta; \theta; \varphi) = k! \left[\prod_{i=1}^r f(t_i) \right] [1 - F(t_r)]^{n-r} = k! \left[\prod_{i=1}^r f(t_i) \right] [R(t_r)]^{n-r}; t > 0 \quad (4.26)$$

$$\text{Com } f(t_i) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi} \right)^{\beta+1} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi} \right)^\beta \right] \text{ e } R(t_r) = \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t_r - \varphi} \right)^\beta \right],$$

teremos:

$$L(\beta; \theta; \varphi) = k! \beta^r \theta^{\beta r} \left[\prod_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} \right]^{\beta+1} e^{-\sum_{i=1}^r (\theta/t_i - \varphi)^\beta} \left[e^{-(\theta/t_r - \varphi)^\beta} \right]^{n-r}$$

A função log-likelihood $L = \ln[L(\beta; \theta; \varphi)]$ será dada por:

$$L = \ln(k!) + r \ln(\beta) + r\beta \ln(\theta) - (\beta+1) \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \sum_{i=1}^r \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi} \right)^\beta - (n-r) \left(\frac{\theta}{t_r - \varphi} \right)^\beta$$

Para encontrarmos os valores de θ , β e φ que maximizem a função log-likelihood, obteremos novamente as derivadas em função de θ , β e de φ e as faremos iguais à zero. Então, aplicando alguma manipulação algébrica, obteremos:

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{r\beta}{\theta} - \beta\theta^{\beta-1} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^\beta - (n-r)\beta\theta^{\beta-1} \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^\beta = 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\beta} = \frac{r}{\beta} + r \ln(\theta) - \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) - \sum_{i=1}^r \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi} \right)^\beta \ln \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi} \right) - \\ - (n-r) \left(\frac{\theta}{t_r - \varphi} \right)^\beta \ln \left(\frac{\theta}{t_r - \varphi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = (\beta+1) \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} - \beta\theta^\beta \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^{\beta+1} + (n-r) \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^{\beta+1} \right] = 0 \quad (4.29)$$

Da equação (4.27), obteremos:

$$\theta = \left[\frac{r}{\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^\beta + (n-r) \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^\beta} \right]^{1/\beta} \quad (4.30)$$

Veja agora que quando $\beta = 1$, a equação (4.30) se reduzirá ao estimador de máxima verossimilhança para a distribuição exponencial de dois parâmetros. Substituindo agora a equação (4.30) para θ nas equações (4.28) e (4.29) e aplicando alguma manipulação algébrica, as equações (4.28) e (4.29) se transformam em:

$$\frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \varphi) + \frac{r \times \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^\beta \ln(t_i - \varphi) + (n-r) \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^\beta \ln(t_r - \varphi) \right]}{\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^\beta + (n-r) \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^\beta} = 0 \quad (4.31)$$

$$(\beta + 1) \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i - \varphi)} - \frac{\beta r \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^{\beta+1} + (n-r) \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^{\beta+1} \right]}{\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{t_i - \varphi} \right)^\beta + (n-r) \left(\frac{1}{t_r - \varphi} \right)^\beta} = 0 \quad (4.32)$$

Para se resolver o problema de falta de regularidade apresentado na utilização do estimador de máxima verossimilhança no caso do modelo Weibull Invertido, utilizaremos a mesma sugestão apresentada por Cohen, et al. (1984) no caso do modelo Weibull de três parâmetros. Essa sugestão consiste em se substituir a equação (4.32) pela equação do valor esperado da vida mínima em relação ao primeiro tempo de falhas t_1 :

$$n \times \theta \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(U_i^{-1/\beta} \right) \left(1 - e^{-U_i} \right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} + n \times \varphi_j \times \frac{g}{3} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(1 - e^{-U_i} \right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} = t_1; \quad U_i = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_j} \right)^\beta; \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.33)$$

Novamente, t_1 representa a primeira ordem estatística de uma amostra de tamanho n . Partindo-se da função densidade do primeiro tempo de falhas, essa equação (4.33) possui a seguinte derivação:

$$\text{A função densidade de } t_1 \text{ será dada por: } f(t_1) = n [1 - F(t_1)]^{n-1} f(t_1).$$

$$\text{Agora, como } F(t_1) = 1 - R(t_1), \text{ obteremos: } f(t_1) = n [R(t_1)]^{n-1} f(t_1).$$

Para a distribuição de amostragem Weibull Invertida de três parâmetros, teremos:

$$f(t_1) = \frac{n\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+1} \left\{ 1 - \exp - \left[\left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^\beta \right] \right\}^n$$

O valor esperado de t_1 será dado por:

$$E(t_1) = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{n\beta}{\theta} t \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+1} \left\{ 1 - \exp - \left[\left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^\beta \right] \right\}^n dt$$

$$\text{Fazendo } U = \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^\beta, \text{ teremos } du = \left(-\frac{\beta}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+1} dt; \quad t = \frac{\theta}{U^{1/\beta}} + \varphi.$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow 0$; Agora, quando $t \rightarrow \varphi$, $U \rightarrow \infty$. Logo:

$$E(t_1) = \int_0^{\infty} n \left(\theta U^{-1/\beta} + \varphi \right) \left[1 - e^{-U} \right]^n du, \text{ ou ainda:}$$

$$E(t_1) = n\theta \int_0^{\infty} U^{-1/\beta} [1 - e^{-U}]^n du + n\varphi \int_0^{\infty} [1 - e^{-U}]^n du \quad (A)$$

Essa integral acima terá de ser resolvida através da utilização de algum processo de integração numérica, como a regra de Simpson 1/3. Como recordamos a regra de Simpson 1/3 é dada por:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{g}{3} (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + \dots + 4f_k + f_{k+1}) - \text{erro.}$$

Fazendo-se o erro ser igual a zero, e com $i = 1, 2, \dots, k+1$, obteremos:

$$n\theta \int_0^{\infty} U^{-1/\beta} [1 - e^{-U}]^n du = n \times \theta \times \frac{g}{3} \times \left\{ \left(U_1^{-1/\beta} \right) (1 - e^{-U_1})^n + 4 \left(U_2^{-1/\beta} \right) (1 - e^{-U_2})^n + \dots + \left(U_{k+1}^{-1/\beta} \right) (1 - e^{-U_{k+1}})^n \right\}$$

Ou ainda:

$$n\theta \int_0^{\infty} U^{-1/\beta} [1 - e^{-U}]^n du = n \times \theta \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(U_i^{-1/\beta} \right) (1 - e^{-U_i})^n \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (B)$$

$$U_i = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_j} \right)^\beta ; j = 1, 2, \dots, k$$

$$n\varphi \int_0^{\infty} [1 - e^{-U}]^n du = n \times \varphi_j \times \frac{g}{3} \times \left\{ (1 - e^{-U_1})^n + 4 (1 - e^{-U_2})^n + \dots + (1 - e^{-U_{k+1}})^n \right\}$$

Então, teremos:

$$n\varphi \int_0^{\infty} [1 - e^{-U}]^n du = n \times \varphi_j \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[(1 - e^{-U_i})^n \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (C)$$

Finalmente, substituindo-se as equações (B) e (C) na equação (A), obteremos:

$$E(t_1) = t_1 = n \times \theta \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(U_i^{-1/\beta} \right) \left(1 - e^{-U_i} \right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} + n \times \varphi_j \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(1 - e^{-U_i} \right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; \quad U_i = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_j} \right)^\beta; \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Essa equação (C) acima é a equação (4.33). Como podemos notar, sob uma condição acelerada de teste teremos $\varphi_j = \varphi_a$, e sob uma condição normal de teste, teremos $\varphi_j = \varphi_n$.

4.6 O TAMANHO ESPERADO DA AMOSTRA DO TESTE DE VIDA SEQUENCIAL PARA EFEITO DE TRUNCAGEM

De acordo com Mood e Graybill (1963), uma expressão para o tamanho esperado da amostra do teste de vida sequencial para efeito de truncagem $E(n)$, será dada por:

$$E(n) = \frac{E(W_n^*)}{E(w)} \quad (4.34)$$

Aqui, w será dado por:

$$w = \ln \frac{f(t; \theta_1, \beta_1, \phi_1)}{f(t; \theta_0, \beta_0, \phi_0)} \quad (4.35)$$

A variável W_n^* apenas possui valores no intervalo no qual W_n^* é maior do que o limite inferior $\ln(A)$ e menor do que o limite superior $\ln(B)$. Quando a verdadeira distribuição de amostragem for dada por $f(t; \theta, \beta, \phi)$, a probabilidade de que W_n^* tenha um valor igual ao limite inferior $\ln(A)$ será de $P(\theta, \beta, \phi)$, ao passo de que a probabilidade de W_n^* ter um valor igual ao limite superior $\ln(B)$ será de $1 - P(\theta, \beta, \phi)$. Então, de acordo com Mood e Graybill (1963), a expressão para o valor esperado da variável W_n^* será dado por:

$$E(W_n^*) \approx P(\theta, \beta, \phi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \phi)] \ln(B) \quad (4.36)$$

Logo, com $A = \gamma / (1-\alpha)$ e com $B = (1-\gamma) / \alpha$, a equação (35) se transformará em:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta, \phi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \phi)] \ln(B)}{E(w)} \quad (4.37)$$

A equação (4.37) nos permite comparar testes de vida sequencial com testes de vida com tamanho de amostra pré-fixado. A prova da existência das equações (4.36) até (4.37) poderá ser encontrada em Mood e Graybill (1963), pp. 391-392.

a) Para o modelo Weibull de três Parâmetros

Utilizando-se as equações (4.35) até (4.38), para o modelo Weibull de três parâmetros, teremos:

$$w = \ln \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) \frac{(t-\phi_1)^{\beta_1-1}}{(t-\phi_0)^{\beta_0-1}} \exp \left[\frac{(t-\phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t-\phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right] \right\}, \text{ ou ainda:}$$

$$w = \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + (\beta_1 - 1) \ln(t - \phi_1) - (\beta_0 - 1) \ln(t - \phi_0) - \frac{(t - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} + \frac{(t - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}}$$

O valor esperado de w $E(w)$, será então dado por:

$$E(w) = \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) + (\beta_1 - 1) E \left[\ln(t - \phi_1) \right] - (\beta_0 - 1) E \left[\ln(t - \phi_0) \right] -$$

$$-\frac{1}{\theta^{\beta_1}} E\left[(t-\phi_1)^{\beta_1}\right] + \frac{1}{\theta^{\beta_0}} E\left[(t-\phi_0)^{\beta_0}\right] \quad (4.38)$$

Calculando-se os termos relativos aos valores esperados apresentados na equação (4.38), teremos:

$$E\left[(t-\phi_1)^{\beta_1}\right] = \int_{\phi_1}^{\infty} (t-\phi_1)^{\beta_1} \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\phi_1}{\theta}\right)^{\beta-1} \times \exp\left[-\left(\frac{t-\phi_1}{\theta}\right)^{\beta}\right] dt$$

Fazendo $U = \left(\frac{t-\phi_1}{\theta}\right)^{\beta}$, teremos: $du = \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{t-\phi_1}{\theta}\right)^{\beta-1} dt$; $t = \phi_1 + \theta U^{1/\beta}$

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow \infty$; Quando $t \rightarrow \phi_1$, $U \rightarrow 0$. Então, teremos:

$$E\left[(t-\phi_1)^{\beta_1}\right] = \theta^{\beta_1} \int_0^{\infty} U^{\beta_1/\beta} e^{-U} du$$

Mas essa integral acima é a função gama $\Gamma\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta}\right)$. Logo, teremos:

$$E\left[(t-\phi_1)^{\beta_1}\right] = \theta^{\beta_1} \Gamma\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta}\right) \quad (4.39)$$

Empregando-se as mesmas transformações utilizadas para se resolver a equação (4.0), o $E\left[(t-\phi_0)^{\beta_0}\right]$ será dado por:

$$E\left[(t-\phi_0)^{\beta_0}\right] = \theta^{\beta_0} \Gamma\left(1 + \frac{\beta_0}{\beta}\right) \quad (4.40)$$

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \int_{\phi_1}^{\infty} \ln(t - \phi_1) \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta-1} \times \exp \left[- \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta} \right] dt$$

Novamente com $U = \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta}$, teremos: $du = \left(\frac{\beta}{\theta} \right) \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta-1} dt$; $t = \phi_1 + \theta U^{1/\beta}$

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow \infty$; Quando $t \rightarrow \phi_1$, $U \rightarrow 0$. Logo, teremos:

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \int_0^{\infty} \ln(\theta U^{1/\beta}) e^{-U} du = \ln(\theta) \int_0^{\infty} e^{-U} du + \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du$$

Então, obteremos: $E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du$

A integral acima terá de ser resolvida com a utilização de algum mecanismo de integral numérica, como a regra de Simpson 1/3. Lembrando-se novamente que a regra de Simpson 1/3 é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + \dots + 4f_n + f_{n+1}) - \text{erro.}$$

Fazendo o erro igual à zero e com $i = 1, 2, \dots, n+1$, teremos:

$$\int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du = \frac{h}{3} \times \left(\ln(U_1) e^{-U_1} + 4 \ln(U_2) e^{-U_2} + \dots + \ln(U_{n+1}) e^{-U_{n+1}} \right)$$

Logo, o $E \left[\ln(t - \phi_1) \right]$ será dado por:

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \left(\ln(U_1)e^{-U_1} + 4\ln(U_2)e^{-U_2} + \dots + \ln(U_{n+1})e^{-U_{n+1}} \right)$$

Finalmente, teremos:

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (4.41)$$

$$U = \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^\beta$$

Utilizando-se as mesmas transformações empregadas para a resolução da equação (4.41), o $E \left[\ln(t - \phi_0) \right]$ será dado por:

$$E \left[\ln(t - \phi_0) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (4.42)$$

$$Y = \left(\frac{t - \phi_0}{\theta} \right)^\beta$$

b) Para o Modelo Weibull Invertido de três Parâmetros

Utilizando-se as novamente as equações (4.34) até (4.37), agora para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros, teremos:

$$E(w) = \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta \beta_0} \times \frac{\theta \beta_1}{\beta_0} \right) + (\beta_0 + 1) E \left[\ln(t_i - \phi_0) \right] - (\beta_1 + 1) E \left[\ln(t_i - \phi_1) \right] -$$

$$- \theta_1^{\beta_1} E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_1)^{\beta_1}} \right] + \theta_0^{\beta_0} E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_0)^{\beta_0}} \right] \quad (4.43)$$

Calculando-se os termos relativos aos valores esperados apresentados na equação (4.43), teremos:

$$E \left[(t_i - \varphi_1)^{\beta_1} \right] = \int_{\varphi_1}^{\infty} (t_i - \varphi_1)^{\beta_1} \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta+1} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta} \right] dt$$

Fazendo $U = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta}$, teremos: $du = \left(-\frac{\beta}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta+1} dt$; $t = \frac{\theta}{U^{1/\beta}} + \varphi_1$.

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow 0$; Agora, quando $t \rightarrow \varphi_1$, $U \rightarrow \infty$. Logo, teremos:

$$E \left[(t_i - \varphi_1)^{\beta_1} \right] = \theta^{\beta_1} \int_0^{\infty} U^{-(\beta_1/\beta)} e^{-U} du$$

A integral acima é a função gama $\Gamma \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta} \right)$. Então, teremos:

$$E \left[(t_i - \varphi_1)^{\beta_1} \right] = \theta^{\beta_1} \Gamma \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta} \right). \text{ Finalmente, o } E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_1)} \right]^{\beta_1} \text{ será dado}$$

por:

$$E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_1)} \right]^{\beta_1} = \frac{1}{\theta^{\beta_1} \Gamma \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta} \right)} \quad (4.44)$$

Empregando-se as mesmas transformações utilizadas na solução da equação

(4.44), o $E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_0)} \right]^{\beta_0}$ será dado por:

$$E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_0)} \right]^{\beta_0} = \frac{1}{\theta^{\beta_0} \Gamma \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta} \right)} \quad (4.45)$$

O $E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right]$ será dado por:

$$E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] = \int_{\varphi_1}^{\infty} \ln(t - \varphi_1) \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta+1} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta} \right] dt$$

Fazendo $U = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta}$, teremos $\left(-\frac{\beta}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta+1} dt$; $t = \frac{\theta}{U^{1/\beta}}$.

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow 0$; Agora, quando $t \rightarrow \varphi_1$, $U \rightarrow \infty$. Logo, a equação acima será dada por:

$$E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] = \int_0^{\infty} \ln \left(\frac{\theta}{U^{1/\beta}} \right) e^{-U} du = \ln(\theta) \int_0^{\infty} e^{-U} du - \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du$$

$$\text{Então: } E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du$$

A integral acima terá de ser resolvida com a utilização de algum mecanismo de integral numérica, como a regra de Simpson 1/3. Lembrando-se novamente que a regra de Simpson 1/3 é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{g}{3} (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + \dots + 4f_n + f_{n+1}) - \text{erro.}$$

Fazendo o erro igual à zero e com $i = 1, 2, \dots, n+1$, teremos:

$$\int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du = \frac{g}{3} \times \left(\ln(U_1) e^{-U_1} + 4 \ln(U_2) e^{-U_2} + \dots + \ln(U_{n+1}) e^{-U_{n+1}} \right)$$

$$E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left(\ln(U_1) e^{-U_1} + 4 \ln(U_2) e^{-U_2} + \dots + \ln(U_{n+1}) e^{-U_{n+1}} \right)$$

Finalmente, teremos:

$$E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (4.46)$$

$$U = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^{\beta}$$

Utilizando-se as mesmas transformações empregadas para a resolução da equação (4.46), o $E \left[\ln(t_i - \varphi_0) \right]$ será dado por:

$$E \left[\ln(t_i - \varphi_0) \right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (4.47)$$

$$Y = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_0} \right)^{\beta}$$

4.7 OS VALORES ESPERADOS DOS MODELOS DE TRÊS PARÂMETROS WEIBULL E WEIBULL INVERTIDO.

a) No caso do modelo Weibull de três parâmetros.

A função densidade do modelo Weibull de três parâmetros foi dada pela equação (2.0);

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta} \right]$$

O valor esperado dessa distribuição será dado por:

$$E(t) = \int_{\varphi}^{\infty} t \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta} \right] dt$$

Fazendo $U = \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta}$, teremos: $du = \left(\frac{\beta}{\theta} \right) \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} dt$; $t = \varphi + \theta U^{1/\beta}$

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow \infty$; Quando $t \rightarrow \varphi$, $U \rightarrow 0$. Então, teremos:

$$E(t) = \int_0^{\infty} \theta U^{1/\beta} e^{-U} du + \varphi = \varphi + \theta \int_0^{\infty} U^{1/\beta} e^{-U} du$$

Mas a integral $\int_0^{\infty} U^{1/\beta} e^{-U} du$ é a função gama $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$. Logo:

$$E(t) = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \varphi \quad (4.48)$$

b) No caso do modelo Weibull Invertido de três parâmetros.

A função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros foi dada pela equação (3.0);

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+1} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta} \right]$$

O valor esperado dessa distribuição será dado por:

$$E(t) = \int_{\varphi}^{\infty} t \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+1} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta} \right] dx$$

Fazendo $U = \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta}$, teremos: $du = - \left(\frac{\beta+1}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{t-\varphi} \right)^{\beta+2} dt$; $t = \varphi + \theta U^{-1/\beta}$

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow 0$; Quando $t \rightarrow \varphi$, $U \rightarrow \infty$. Então, teremos:

$$E(t) = - \int_{\infty}^0 \theta U^{-1/\beta} e^{-U} du + \varphi = \theta \int_0^{\infty} U^{-1/\beta} e^{-U} du + \varphi$$

Mas a integral $\int_0^{\infty} U^{-1/\beta} e^{-U} du$ é a função gama $\Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$. Logo:

$$E(t) = \theta \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \varphi \quad (4.49)$$

5 APLICAÇÃO DO EMPREGO DO AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA EM RELAÇÃO À RESISTÊNCIA À FRICÇÃO.

Este capítulo apresenta uma aplicação combinada dos mecanismos de teste de vida sequencial com truncagem e teste de vida acelerado a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção, utilizado na fabricação de trilhos no Brasil. Nossa intenção é a de determinarmos valores estimados para os parâmetros de forma, escala e vida mínima das distribuições de amostragem Weibull e Weibull Invertida, representando o ciclo de vida desse novo tipo de aço, e de calcularmos o valor esperado de sua vida média quando submetido à fricção. Uma vez que uma curva de vida para esse aço for determinada, estaremos então capazes de verificarmos, através da utilização de um teste de vida sequencial com truncagem, se novas unidades produzidas desse material terão as características necessárias requeridas para esse aço desenvolver adequadamente sua função. Uma das aplicações desse novo tipo de aço está sendo na fabricação de trilhos no Brasil para o transporte de minério de ferro e de dolomita. Como distribuições de amostragem, utilizaremos os modelos Weibull e Weibull Invertido de três parâmetros.

No desenvolvimento de um teste de vida para esse novo tipo de aço, verificamos que o tempo disponível para se realizar o teste de vida seria consideravelmente menor do que a sua vida esperada. Logo, para contornar esse problema, tivemos que empregar a alternativa de um teste de vida acelerado direcionado a forçar o aparecimento de falhas em componentes, ou seja, testando esse novo tipo de aço em condições muito mais severas do que as encontradas durante a utilização normal desse material. Esse aço resistente à fricção, quando utilizado na fabricação de trilhos, possui uma temperatura normal de uso de 296 K (graus Kelvin, aproximadamente 23 graus Centígrados). Sob uma temperatura

acelerada de teste de 480 K, 16 unidades de trilhos feitos com esse aço foram submetidos a um teste de vida (fricção), com o teste sendo truncado no momento da ocorrência da décima segunda falha. A Tabela 1 seguinte apresenta esses tempos de falhas, em horas.

Tabela 5.1. Tempos de falhas (horas) das unidades de trilhos sob uma temperatura de uso acelerada de 480 K (graus Kelvin).

765,1	843,6	850,4	862,2
877,3	891,0	909,4	930,9
952,4	973,2	1.014,7	1.123,6

Agora, sob uma temperatura acelerada de teste de 520 K, 16 unidades desse trilho foram novamente submetidos a um teste de vida (fricção), com o teste sendo uma vez mais truncada no momento da ocorrência da décima segunda falha. A Tabela 2 seguinte apresenta esses tempos de falhas, em horas.

Tabela 5.2. Tempos de falhas (horas) das unidades de trilhos sob uma temperatura de uso acelerada de 520 K (graus Kelvin).

652,5	673,6	683,1	692,9
705,1	725,4	738,2	769,2
776,6	784,9	816,0	981,9

Utilizando-se agora o estimador de máxima verossimilhança par o parâmetro de forma β , para o parâmetro de escala θ e para o parâmetro de vida mínima φ dos modelos Weibull e Weibull Invertido, determinou-se os seguintes valores para esses parâmetros sujeitos a condições aceleradas de teste:

5.1 PARA O MODELO WEIBULL INVERTIDO DE TRÊS PARÂMETROS.

Sob uma aceleração de 480 K.

$$\beta_1 = \beta_n = \beta = 9,06; \theta_1 = 879,3 \text{ horas}; \varphi_1 = 161,4 \text{ horas.}$$

Sob uma aceleração de 520 K.

$$\beta_2 = \beta_n = \beta = 9,48; \theta_2 = 718,3 \text{ horas}; \varphi_2 = 131,3 \text{ horas.}$$

O valor do parâmetro de forma se manteve aproximadamente constante, com $\beta \approx 9,4$.

a) Para o parâmetro de escala θ .

O fator de aceleração $AF_{\theta_{2/1}}$ para o parâmetro de escala θ será dado pela equação (4.9), ou seja:

$$AF_{\theta_{2/1}} = \theta_1/\theta_2 = 879,3/718,3$$

Utilizando-se a equação (4.7), poderemos calcular o termo E/K . Desse modo, obteremos:

$$\frac{E}{K} = \frac{\ln(AF_{2/1})}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{\ln(879,3/718,3)}{\left(\frac{1}{480} - \frac{1}{520}\right)} = 1.262,0$$

Empregando-se agora a equação (4.9), o fator de aceleração $AF_{\theta_{2/n}}$ para o parâmetro de escala θ , a ser aplicado na temperatura normal de uso de 296 K, será dado por:

$$AF_{2/n} = \exp\left[\frac{E}{K}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = \exp\left[1.262,0\left(\frac{1}{296} - \frac{1}{520}\right)\right] = 6,28$$

Desse modo, o valor do parâmetro de escala θ_n do componente operando na temperatura normal de uso de 296 K será estimado ser de:

$$\theta_n = AF_{2/n} \times \theta_2 = 6,28 \times 718,3 = 4.510,9 \text{ horas}$$

b) Para o parâmetro de vida mínima φ .

O fator de aceleração $AF_{\varphi_{2/1}}$ para o parâmetro de vida mínima φ será dado pela equação (4.10), ou seja:

$$AF_{\varphi_{2/1}} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{161,4}{131,3}$$

Utilizando-se novamente a equação (4.8), poderemos calcular o termo E/K . Desse modo, teremos:

$$\frac{E}{K} = \frac{\ln(AF_{2/1})}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{\ln(161,4/131,3)}{\left(\frac{1}{480} - \frac{1}{520}\right)} = 1.287,9$$

Uma vez mais se empregando a equação (4.9), o fator de aceleração $AF_{\varphi_{2/n}}$ para o parâmetro de vida mínima φ , a ser aplicado na temperatura normal de uso de 296 K, será dado por:

$$AF_{2/n} = \exp\left[\frac{E}{K}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = \exp\left[1.287,9\left(\frac{1}{296} - \frac{1}{520}\right)\right] = 6,52$$

Logo, como era esperado, $AF_{\theta} = 6,28 \approx AF_{\varphi} = 6,52 \approx AF_{\text{m\u00e9dio}} = 6,4$.

Finalmente, o parâmetro de vida mínima φ do componente operando na temperatura normal de uso de 296 K será estimado ser de:

$$\varphi_n = AF_{\varphi_{2/n}} \times \varphi_2 = 6,52 \times 131,3 = 856,1 \text{ horas}$$

Logo, nossa hipótese é a de que o aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção, utilizado, por exemplo, na fabricação de trilhos no Brasil, quando operando na condição normal de uso de 296 Kelvins (23 graus centígrados) poderá também ser representado por um modelo Weibull Invertido de três parâmetros, possuindo um parâmetro de forma β de 9,4; um parâmetro de escala θ de 4.510,9 horas e um parâmetro de vida mínima φ de 856,1 horas. Para que possamos avaliar essa nossa hipótese relacionada com a precisão desses estimadores para os parâmetros do modelo Weibull Invertido, aplicaremos aos tempos estimados de falhas com o aço operando em sua condição normal de uso um mecanismo de truncagem desenvolvido por de Souza (2004). Esses tempos esperados de falhas em uma condição normal de uso são resultantes da multiplicação dos doze tempos de falhas obtidos sob uma condição de aceleração de 520 K, dados pela Tabela 2 pelo fator AF de aceleração médio de 6,4.

A Tabela 5.3 seguinte apresenta esses tempos estimados de falhas em uma condição normal de uso.

Tabela 5.3. Tempos estimado de falhas (horas) das unidades de trilhos em uma condição normal de uso de 296 Kelvins. Modelo Weibull Invertido.

4.176,0	4.311,0	4.371,8	4.434,6
4.512,6	4.642,6	4.724,5	4.922,9
4.970,2	5.023,4	5.222,4	6.284,2

Fonte Dados da Companhia Siderugica Nacional CSN, cerca 1974

Para a precisão do teste, decidiu-se que o valor de α seria de 0,05 e o valor de γ seria de 0,10. Nessa aplicação, escolheram-se os seguintes valores para os parâmetros das hipóteses nula e alternativa: parâmetro de escala da hipótese alternativa $\theta_1 = 4.650$ horas; parâmetro de forma da hipótese alternativa $\beta_1 = 8,6$ e parâmetro de vida mínima da hipótese alternativa $\varphi_1 = 830$; parâmetro de escala da hipótese nula $\theta_0 = 4.511$ horas; parâmetro de forma da hipótese nula $\beta_0 = 9,4$ e parâmetro de vida mínima da hipótese nula $\varphi_0 = 856$ horas. Agora, fazendo $P(\theta, \beta, \varphi)$ ser igual a 0,01 e utilizando as equações (4.35) até (4.38), além da equação (4.44), poderemos calcular o valor do tamanho esperado da amostra $E(n)$ para efeito de truncagem. Então, teremos:

$$\begin{aligned}
 E(w) &= \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + (\beta_0 + 1) E \left[\ln(t_i - \varphi_0) \right] - (\beta_1 + 1) E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] - \\
 &\quad - \theta_1^{\beta_1} E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_1)^{\beta_1}} \right] + \theta_0^{\beta_0} E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_0)^{\beta_0}} \right] \\
 E(w) &= \ln \left(\frac{8,6}{4,511^{9,4}} \times \frac{4.650^{8,6}}{9,4} \right) + (9,4 + 1) E \left[\ln(t_i - 856) \right] - \\
 &\quad - (8,6 + 1) E \left[\ln(t_i - 830) \right] - 4.650^{8,6} E \left[\frac{1}{(t_i - 830)^{8,6}} \right] + 4.511^{9,4} E \left[\frac{1}{(t_i - 856)^{9,4}} \right]
 \end{aligned}$$

Empregando-se agora as equações (4.45) até (4.48), teremos:

$$E(w) = -6,560 + 10,4 \times E\left[\ln(t_i - 856)\right] - 9,6 \times E\left[\ln(t_i - 830)\right] - \\ - 4.650^{8,6} \frac{1}{4.650^{8,6} \Gamma\left(1 - \frac{8,6}{9,4}\right)} + 4.511^{9,4} \frac{1}{4.511^{9,4} \Gamma\left(1 - \frac{9,4}{9,4}\right)}$$

Além disso,

$$E\left[\ln(t_i - \varphi_1)\right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; U = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^\beta$$

$$E\left[\ln(t_i - \varphi_0)\right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\};$$

$$Y = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_0} \right)^\beta$$

Logo, teremos:

$$E(w) = -6.560 + 10,4 \times 7,743 - 9,6 \times 7,757 - 0,0884 + 1,0 = 0,411$$

$$\text{Agora, com a } P(\theta, \beta, \varphi) = 0,01; \text{ com } \ln(B) = \ln\left[\frac{(1-\gamma)}{\alpha}\right] = \ln\left[\frac{(1-0,10)}{0,05}\right] =$$

$$2,8904, \text{ e também com o } \ln(A) = \ln\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right) = \ln\left(\frac{0,10}{1-0,05}\right) = -2,2513; \text{ teremos:}$$

$$P(\theta, \beta) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta)] \ln(B) = -0,01 \times 2,2513 + 0,99 \times 2,8904 = 2,8390$$

Finalmente, obteremos:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta, \varphi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \varphi)] \ln(B)}{E(w)} = \frac{2,8390}{0,411} = 6,908 \approx 7 \text{ itens.}$$

Logo, poderemos formular uma decisão de aceitarmos ou rejeitarmos a hipótese nula H_0 após a análise do sétimo tempo de falhas.

O ponto de truncagem representa o número máximo de observações necessárias para se tomar uma decisão sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula. Após o ponto de truncagem ter sido estatisticamente calculado, como nesse nosso exemplo, seu valor servirá como limite máximo de observações necessárias em qualquer outro teste de vida que se deseje realizar utilizando-se esse aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção, quando empregado na fabricação de trilhos. Caso se deseje utilizar esse aço na fabricação de outro produto que não seja trilhos, por exemplo, na fabricação de vigas metálicas na qual a característica de interesse que se deseje determinar seja o limite de resistência à fadiga, teremos de realizar um teste específico sobre essa característica (número de ciclos necessários para ter-se uma ruptura por fadiga), e calcularmos um novo ponto de truncagem para essa situação.

Então, voltando ao nosso estudo, caso uma nova produção de trilhos seja realizada, iniciaremos nossa avaliação sobre a resistência à fricção dessa nova produção testando um item ou observação desse trilho e, dependendo do resultado deste teste de vida, poderemos aceitar a hipótese nula, poderemos rejeitar a hipótese nula ou chegarmos à conclusão de que não dispomos ainda de informação suficiente para a rejeição ou aceitação da hipótese nula. Nesse caso, testaremos um novo item desse trilho, e prosseguiremos testando novos itens até que possamos decidir sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula, ou então, quando atingirmos um número de itens testados correspondente ao ponto de truncagem previamente e estatisticamente calculado. Se tivermos de realizar nosso teste de vida até alcançarmos o ponto de truncagem, nesse momento introduziremos uma maneira de decidirmos sobre a aceitação ou rejeição da hipótese nula.

Desejamos frisar que nessa aplicação estamos determinando o valor do ponto de truncagem, e por isso realizamos um teste de vida até obtermos um número aleatório inicial de falhas, no nosso caso, doze. Agora, com a informação sobre o valor do ponto de truncagem já definido, e utilizando as equações (4.15) e (4.16), poderemos calcular os limites do nosso teste de vida sequencial. A Tabela 5.4 apresenta os resultados desses cálculos.

Tabela 5.4. Limites do teste de vida para o modelo Weibull Invertido.

<i>Número de falha</i>	<i>Limite Superior</i>	<i>Limite Inferior</i>	<i>Valor de X</i>
1	-4,308079	-9,449743	-7,304132
2	-10,867450	-16,009114	-13,955036
3	-17,426821	-22,568484	-20,434735
4	-23,986192	-29,127855	-26,791588
5	-30,545563	-35,687226	-33,052372
6	-37,104934	-42,246597	-39,245923
7	-43,664304	-48,805968	-45,434914
8	-50,223675	-55,365339	-51,674687
9	-56,783046	-61,924710	-57,933525
10	-63,342417	-68,484081	-64,215381
11	-69,901788	-75,043452	-70,589544
12	-76,461159	-81,602822	-77,345077

A Figura (5.1) apresenta o teste de vida sequencial para o modelo Weibull Invertido.

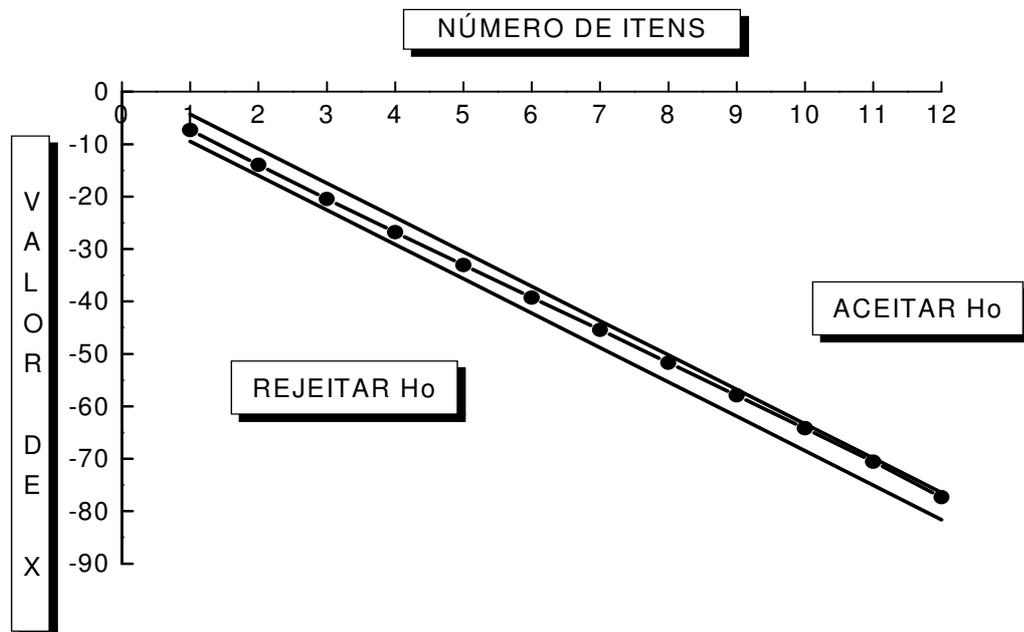


Figura 5.1 Teste de vida sequencial para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros.

5.1.1 Um procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem no caso do modelo Weibull Invertido.

De acordo com Kapur e Lamberson (1977), quando o ponto de truncagem é alcançado, é traçada uma linha dividindo ao meio o gráfico sequencial, como mostrado na Figura (5.2) seguinte. Essa linha é traçada iniciando-se na origem do gráfico, paralela às linhas de aceitação e de rejeição. A decisão de se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula H_0 irá depender simplesmente de que lado a observação final se encontra.

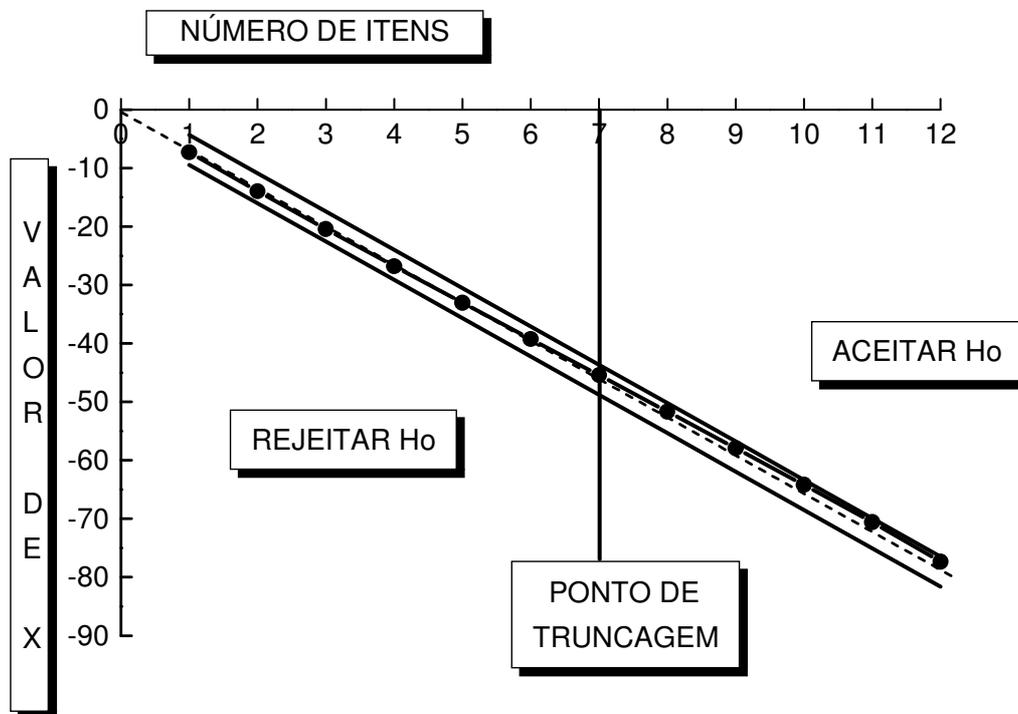


Figura 5.2. Teste de vida sequencial com o mecanismo de truncagem para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros.

Obviamente esse procedimento de truncagem altera os níveis ou valores de α e de γ do teste de vida original. Entretanto, de acordo com Kapur e Lamberson (1977), essa mudança será muito pequena se o ponto de truncagem não for muito pequeno (menor do que três unidades). Como podemos observar na Figura (5.2), a hipótese nula H_0 deverá ser aceita, pois a observação final (observação de número sete) se encontra no lado da linha relacionado com a aceitação de H_0 .

5.2 PARA O MODELO WEIBULL DE TRÊS PARÂMETROS.

Sob uma aceleração de 480 K.

$$\beta_1 = \beta_n = \beta = 4,698; \theta_1 = 932,7 \text{ horas}; \varphi_1 = 171,2 \text{ horas.}$$

Sob uma aceleração de 520 K.

$$\beta_2 = \beta_n = \beta = 4,348; \theta_2 = 767,7 \text{ horas}; \varphi_2 = 140,3 \text{ horas.}$$

Sob uma aceleração normal: $\beta_n = 4,348; \theta_n = 3.300,987 \text{ horas.}$

O valor do parâmetro de forma se manteve aproximadamente constante, com $\beta \approx 4,4$.

O fator de aceleração $AF_{\theta_{2/1}}$ para o parâmetro de escala θ será dado novamente pela equação (4.10), ou seja:

$$AF_{\theta_{2/1}} = \theta_1/\theta_2 = 932,7/767,7$$

Utilizando-se uma vez mais a equação (4.8), poderemos calcular o termo E/K. Desse modo, obteremos:

$$\frac{E}{K} = \frac{\ln(AF_{2/1})}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{\ln(932,7/767,7)}{\left(\frac{1}{480} - \frac{1}{520}\right)} = 1.214,8$$

Empregando-se agora a equação (4.9), o fator de aceleração $AF_{\theta_{2/n}}$ para o parâmetro de escala θ , a ser aplicado na temperatura normal de uso de 296 K, será então dado por:

$$AF_{2/n} = \exp\left[\frac{E}{K}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = \exp\left[1.214,8\left(\frac{1}{296} - \frac{1}{520}\right)\right] = 5,86$$

Desse modo, o valor do parâmetro de escala θ_n do componente operando na temperatura normal de uso de 296 K será estimado ser de:

$$\theta_n = AF_{2/n} \times \theta_2 = 5,86 \times 767,7 = 4.498,7 \text{ horas}$$

a) Para o parâmetro de vida mínima φ .

O fator de aceleração $AF_{\varphi_{2/1}}$ para o parâmetro de vida mínima φ será dado pela equação (4.11), ou seja:

$$AF_{\varphi_{2/1}} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{171,2}{140,3}$$

Utilizando-se novamente a equação (4.8), poderemos calcular o termo E/K . Desse modo, teremos:

$$\frac{E}{K} = \frac{\ln(AF_{2/1})}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{\ln(171,2/140,3)}{\left(\frac{1}{480} - \frac{1}{520}\right)} = 1.242,1$$

Uma vez mais se empregando a equação (4.9), o fator de aceleração $AF_{\varphi_{2/n}}$ para o parâmetro de vida mínima φ , a ser aplicado na temperatura normal de uso de 296 K, será dado por:

$$AF_{2/n} = \exp\left[\frac{E}{K}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = \exp\left[1.242,1\left(\frac{1}{296} - \frac{1}{520}\right)\right] = 6,10$$

Logo, como era esperado, $AF_{\theta} = 5,86 \approx AF_{\varphi} = 6,10 \approx AF_{\text{m\u00e9dio}} = 6,0$. Finalmente, o parâmetro de vida mínima φ do componente operando na temperatura normal de uso de 296 K será estimado ser de:

$$\varphi_n = AF_{\varphi_{2/n}} \times \varphi_2 = 6,10 \times 140,3 = 855,3 \text{ horas}$$

Logo, nossa hipótese é a de que o aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção, utilizado, por exemplo, na fabricação de trilhos no Brasil, quando operando na condição normal de uso de 296 Kelvins (23 graus centígrados) poderá também ser representado por um modelo Weibull Invertido de três parâmetros, possuindo um parâmetro de forma β de 4,4; um parâmetro de escala θ de 4.498,7 horas e um parâmetro de vida mínima φ de 855,3 horas. Para que possamos avaliar essa nossa hipótese relacionada com a precisão desses estimadores para os

parâmetros do modelo Weibull Invertido, aplicaremos novamente aos tempos estimados de falhas com o aço operando em sua condição normal de uso um mecanismo de truncagem desenvolvido por de Souza (2004). Esses tempos esperados de falhas em uma condição normal de uso são resultantes da multiplicação dos doze tempos de falhas obtidos sob uma condição de aceleração de 520 K, dados pela Tabela 2 pelo fator AF de aceleração médio de 6,0. A Tabela 5 seguinte apresenta esses tempos estimados de falhas em uma condição normal de uso.

Tabela 5.5. Tempos estimados de falhas (horas) das unidades de trilhos sem uma condição normal de uso de 296 Kelvins. Modelo Weibull.

3.915,0	4.041,6	4.098,6	4.157,4
4.230,6	4.352,4	4.429,2	4.615,2
4.659,6	4.709,4	4.896,0	5.891,4

Para a precisão do teste de vida, decidiu-se novamente que o valor de α seria de 0,05 e o valor de γ seria de 0,10. Nesse exemplo, escolheram-se os seguintes valores para os parâmetros das hipóteses nula e alternativa: parâmetro de escala da hipótese alternativa $\theta_1 = 4.650$ horas; parâmetro de forma da hipótese alternativa $\beta_1 = 3,6$ e parâmetro de vida mínima da hipótese alternativa $\varphi_1 = 830$; parâmetro de escala da hipótese nula $\theta_0 = 4.499$ horas; parâmetro de forma da hipótese nula $\beta_0 = 4,4$ e parâmetro de vida mínima da hipótese nula $\varphi_0 = 853$ horas. Agora, fazendo $P(\theta, \beta, \varphi)$ ser igual a 0,01 e utilizando as equações (4.34) até (4.37), além da equação (4.43), poderemos calcular o valor do tamanho esperado da amostra $E(n)$ para efeito de truncagem. Então, obteremos:

$$E(w) = \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_0^{\beta_0}} \times \frac{\theta^{\beta_1}}{\beta_0} \right) + (\beta_0 + 1) E \left[\ln(t_i - \varphi_0) \right] - (\beta_1 + 1) E \left[\ln(t_i - \varphi_1) \right] -$$

$$- \theta_1^{\beta_1} E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_1)^{\beta_1}} \right] + \theta_0^{\beta_0} E \left[\frac{1}{(t_i - \varphi_0)^{\beta_0}} \right]$$

$$E(w) = \ln\left(\frac{3,6}{4.499^{4,4}} \times \frac{4.650^{3,6}}{4,4}\right) + (4,4+1) E\left[\ln(t_i - 853)\right] -$$

$$-(3,6+1) E\left[\ln(t_i - 830)\right] - 4.650^{3,6} E\left[\frac{1}{(t_i - 830)^{3,6}}\right] + 4.499^{4,4} E\left[\frac{1}{(t_i - 853)^{4,4}}\right]$$

Empregando-se novamente as equações (4.44) até (4.47), obtém-se:

$$E(w) = -6.811 + 5,4 \times E\left[\ln(t_i - 856)\right] - 4,6 \times E\left[\ln(t_i - 830)\right] -$$

$$- 4.650^{3,6} \frac{1}{4.650^{3,6} \Gamma\left(1 - \frac{3,6}{4,4}\right)} + 4.499^{4,4} \frac{1}{4.499^{4,4} \Gamma\left(1 - \frac{4,4}{4,4}\right)}$$

Além disso,

$$E\left[\ln(t_i - \varphi_1)\right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; U = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_1} \right)^\beta$$

$$E\left[\ln(t_i - \varphi_0)\right] = \ln(\theta) - \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; Y = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_0} \right)^\beta$$

Logo, teremos: $E(w) = -6.811 + 5,4 \times 7,813 - 4,6 \times 7,767 - 0,195 + 1,0 = 0,456$

Novamente, com a $P(\theta, \beta, \varphi) = 0,01$; com $\ln(B) = \ln\left[\frac{(1-\gamma)}{\alpha}\right] = \ln\left[\frac{(1-0,10)}{0,05}\right] =$

$2,8904$, e ainda com o $\ln(A) = \ln\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right) = \ln\left(\frac{0,10}{1-0,05}\right) = -2,2513$; teremos:

$$P(\theta, \beta) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta)] \ln(B) = -0,01 \times 2,2513 + 0,99 \times 2,8904 = 2,8390$$

Finalmente, obteremos:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta, \varphi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \varphi)] \ln(B)}{E(w)} = \frac{2,8390}{0,456} = 6,226 \approx 7 \text{ itens.}$$

Logo, poderemos uma vez mais formular uma decisão de aceitarmos ou rejeitarmos a hipótese nula H_0 após a análise do sétimo tempo de falhas. Novamente agora, com a informação sobre o valor do ponto de truncagem já definido, e utilizando as equações (4.15) e (4.16), poderemos calcular os limites do nosso teste de vida sequencial. A Tabela 5.6 apresenta os resultados desses cálculos.

Tabela 5.6. Limites do teste de vida para o modelo Weibull

<i>Número de Falha</i>	<i>Limite Superior</i>	<i>Limite Inferior</i>	<i>Valor de X</i>
1	8,661066	3,519402	6,446337
2	15,070840	9,929177	12,925524
3	21,480614	16,338951	19,418638
4	27,890389	22,748725	25,925539
5	34,300163	29,158499	32,448750
6	40,709937	35,568273	38,996919
7	47,119711	41,978048	45,559351
8	53,529485	48,387822	52,151226
9	59,939260	54,797596	58,748996
10	66,349034	61,207370	65,352824
11	72,758808	67,617144	71,973843
12	79,168582	74,026919	78,492962

A Figura (5.3) seguinte apresenta o teste de vida sequencial para o modelo Weibull.

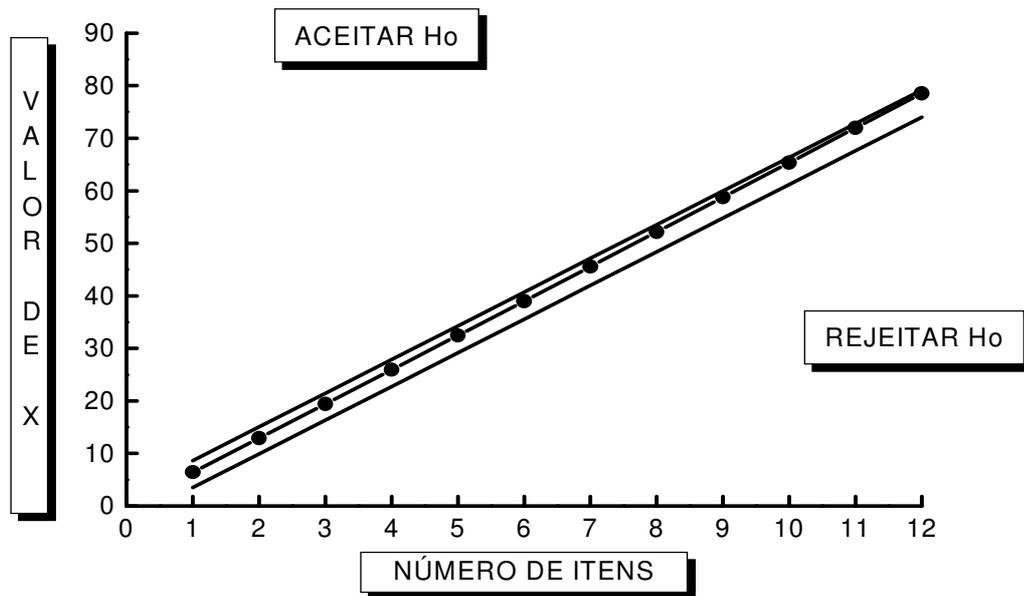


Figura 5.3. Teste de vida sequencial para o modelo Weibull de três parâmetros.

5.2.1 Um procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem no caso do modelo Weibull.

Novamente, de acordo com Kapur e Lamberson (1977), quando o ponto de truncagem é alcançado, é traçada uma linha dividindo ao meio o gráfico sequencial, como mostrado na Figura (5.4) seguinte. Como vimos anteriormente no caso do modelo Weibull Invertido, essa linha é traçada iniciando-se na origem do gráfico, paralela às linhas de aceitação e de rejeição. A decisão de se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula H_0 irá depender simplesmente de que lado a observação final se encontra.

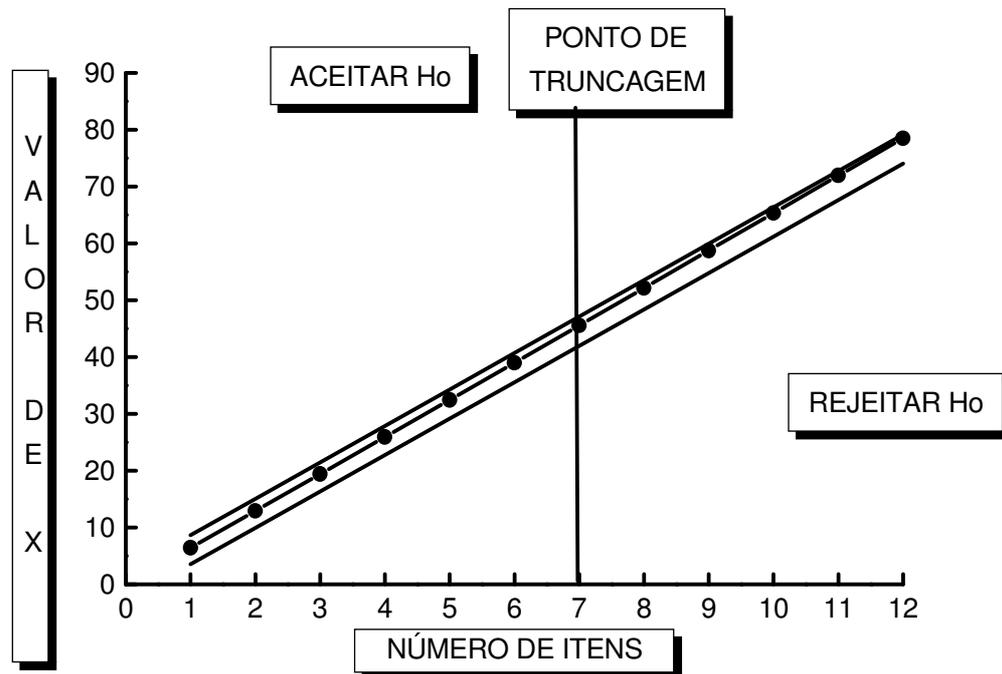


Figura 5.4. Teste de vida sequencial com o mecanismo de truncagem para o modelo Weibull de três parâmetros.

Como podemos novamente observar, agora na Figura (5.4), a hipótese nula H_0 deverá ser aceita, pois a observação final (observação de número sete) se encontra no lado da linha relacionado com a aceitação de H_0 .

A Tabela 7 seguinte apresenta os estimadores dos três parâmetros das distribuições de amostragem Weibull Invertido e Weibull na condição normal de uso de 296 Kelvins.

Tabela 5.7. Estimadores dos três parâmetros das distribuições de amostragem Weibull Invertido e Weibull na condição normal de uso de 296 Kelvins.

<i>Modelos/Parâmetros</i>	<i>Forma</i>	<i>Escala</i>	<i>Vida Mínima</i>
Weibull Invertido	9,4	4.510,9	856,1
Weibull	4,4	4.498,7	855,3

Se compararmos agora os estimadores para os parâmetros de escala e de vida mínima dos modelos de três parâmetros Weibull Invertido e Weibull na condição normal de uso de 296 Kelvins, vemos que a diferença entre eles é mínima, cerca de 1% para ambos os parâmetros. Isso mostra que ambos os modelos Weibull Invertido

e Weibull podem representar de uma maneira altamente significativa, a vida desse aço de alta resistência e baixa liga resistente à fricção.

5.3 VALORES ESPERADOS PARA A VIDA MÉDIA DO AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA, EM HORAS, QUANDO SUBMETIDO À FRICÇÃO.

a) No caso do modelo Weibull de três parâmetros.

O valor esperado para o modelo Weibull de três parâmetros é dado pela equação (4.48):

$$E(t) = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \varphi$$

Com $\theta = 4.498,7$ horas; $\beta = 4,4$ e com $\varphi = 855,3$ horas, teremos:

$$E(t) = 4.498,7 \Gamma\left(1 + \frac{1}{4,4}\right) + 855,3 = 4.955,4 \text{ horas}$$

Logo, o valor esperado para a vida média do aço de alta resistência e baixa liga quando submetido à fricção, tendo como distribuição de amostragem o modelo Weibull de três parâmetros, será de 4.955,4 horas.

b) No caso do modelo Weibull Invertido de três parâmetros.

O valor esperado para o modelo Weibull Invertido de três parâmetros foi dado pela equação (50.0):

$$E(t) = \theta \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \varphi$$

Agora, com $\theta = 4.510,9$ horas; $\beta = 9,4$ e com $\varphi = 856,1$ horas, obteremos:

$$E(t) = 4.510,9 \Gamma\left(1 - \frac{1}{9,4}\right) + 856,1 = 5.696,3 \text{ horas}$$

Logo, o valor esperado para a vida média do aço de alta resistência e baixa liga quando submetido à fricção, tendo como distribuição de amostragem o modelo Weibull Invertido de três parâmetros, será de 5.696,3 horas.

A diferença percentual entre a vida média desse aço calculada com o modelo Weibull Invertido como distribuição de amostragem e o modelo Weibull foi de:

$$\text{Diferença \%} = \frac{\text{Diferença}(\text{Weibull Invertido/Weibull})}{4.955,4} = \frac{5.696,3}{4.955,4} = 14.95\%$$

Essa é uma diferença bem significativa, que coloca em dúvida qual dos dois modelos melhor reflete o valor esperado para a vida média desse aço de alta resistência e baixa liga, quando submetido à fricção.

Como dissemos anteriormente, o modelo Weibull Invertido tem sido também utilizado na estimação da confiabilidade de produtos eletrônicos, situação na qual parece oferecer uma melhor resposta ao problema de precisão apresentado pelo modelo Weibull, como mostrado por De Souza (2005). Isso se deve ao fato de que quando o valor do parâmetro de forma do modelo Weibull for maior do que seis, a curva Weibull se torna muito cônica (em forma de pico), acarretando certa dificuldade computacional (precisão) no cálculo dos valores das características de interesse do componente sendo analisado. Devido à necessidade de utilizar integração numérica no cálculo do valor do ponto de truncagem para o modelo Weibull, no caso da curva se tornar acentuadamente cônica, o erro que se obtém na determinação de cada uma das áreas que foi dividida a função densidade se torna muito significativo. Desse modo, quando esse parâmetro de forma atinge valores superiores a seis, essa perda de precisão é muito elevada, não justificando qualquer utilização dessa distribuição como modelo de amostragem. Essa é a principal razão do modelo Weibull ser principalmente empregado como distribuição de amostragem de produtos mecânicos e metalúrgicos, áreas nas quais o valor de seu parâmetro de forma é quase sempre inferior a cinco.

Essa dificuldade resulta do fato de que no caso da utilização dos modelos Weibull e Weibull Invertido como distribuições de amostragem, torna-se sempre necessário o emprego de integração numérica para o cálculo dos valores das características desejadas. Quando se emprega integração numérica, o número de

intervalos em que se divide a área da curva é geralmente de onze a um máximo de vinte e dois. Um número maior de intervalos poderá representar uma perda de precisão acumulada muito elevada, devido à imprecisão existente no cálculo dessas áreas. No caso de um número muito pequeno de intervalos, qualquer segmento da função densidade que se considere irá representar uma área significativa, o que poderá também acarretar uma perda elevada de precisão, e qualquer imprecisão de cálculo será bastante expressiva. No caso do modelo Weibull, quando o valor de seu parâmetro de forma for inferior a sete, a precisão dos cálculos utilizando-se essa distribuição de amostragem se mostra muito mais elevada do que a conseguida com o emprego do modelo Weibull Invertido. Nessas situações a curva da função densidade do modelo Weibull Invertido apresenta-se com um aspecto de pico, com um grande percentual de área sob a curva concentrado no lado esquerdo, com a curva apresentando, após essa concentração, um alongamento muito significativo para a direita.

Em relação a esse exemplo analisado, o valor do parâmetro de forma do modelo Weibull foi de 4,4. Nesse nível de valor, a precisão dos cálculos utilizando-se essa distribuição de amostragem se mostra muito mais elevada do que a conseguida com o emprego do modelo Weibull Invertido, devido à curva da função densidade do modelo Weibull Invertido já estar com uma aparência altamente significativa de pico ou cone. Desse modo, nesse caso específico do aço alta resistência e baixa liga ter sido submetido à fricção, o modelo Weibull de três parâmetros deverá ser o indicado, por oferecer uma melhor resposta ao problema de precisão apresentado pelo modelo Weibull Invertido de três parâmetros, devido à sua curva da função densidade ser bem mais abrandada (em forma de semicírculo) do que a do modelo Weibull Invertido.

A Figura 5.5 mostra a curva da função densidade do modelo Weibull de três parâmetros desse exemplo. A Figura 5.6 apresenta a curva do modelo Weibull Invertido de três parâmetros.

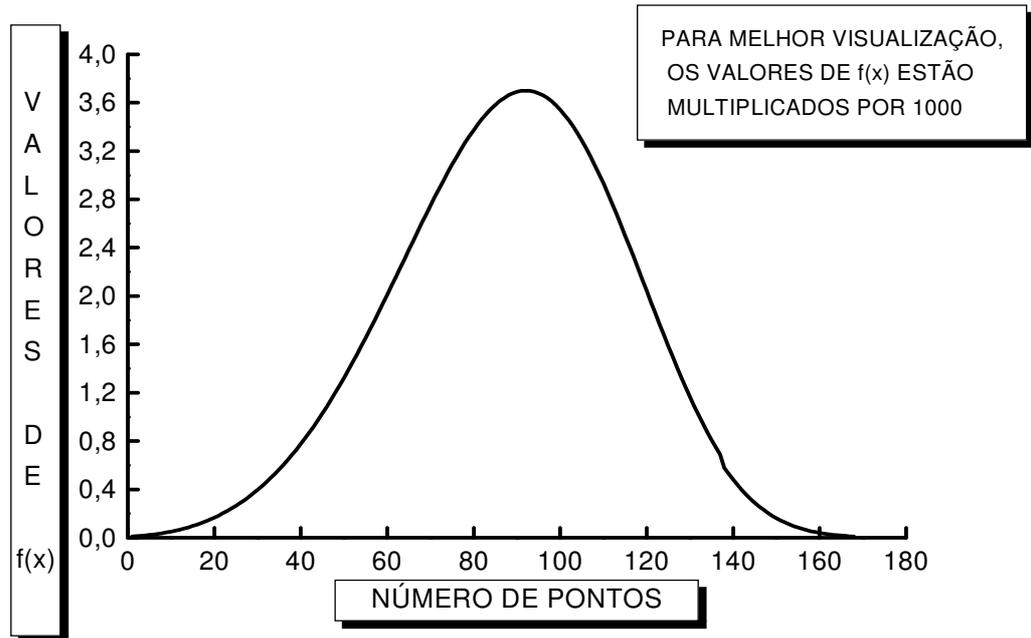


Figura 5.5 Curva da função densidade do modelo Weibull de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, quando submetido à fricção.

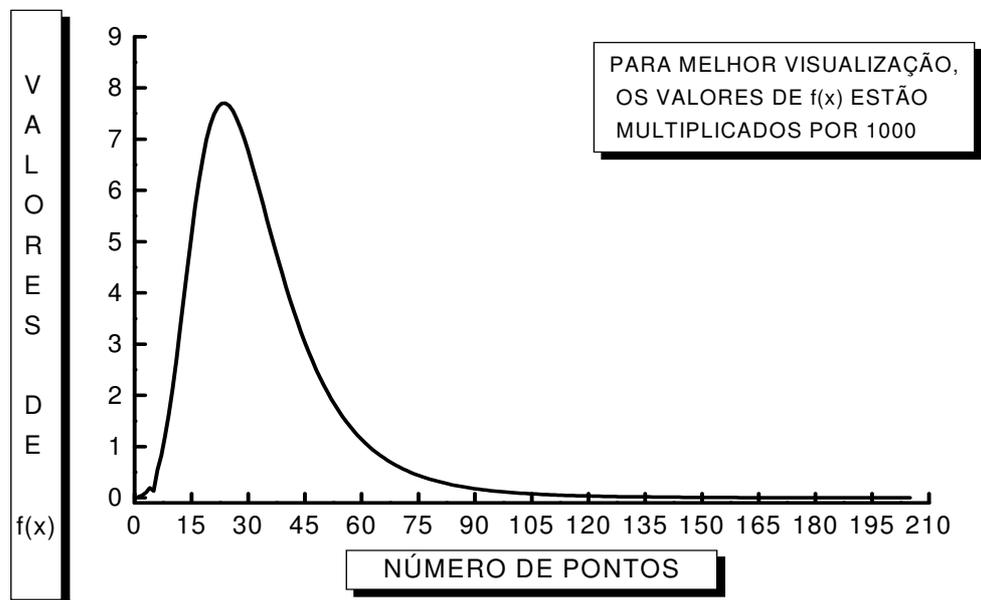


Figura 5.6. Curva da função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, quando submetido à fricção.

6 APLICAÇÃO DO EMPREGO DO AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA EM RELAÇÃO À RESISTÊNCIA À FADIGA NÃO INDUZIDA.

Neste estudo iremos também utilizar uma aplicação combinada dos mecanismos de teste de vida sequencial com truncagem e teste de vida acelerado a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga, sendo que esse aço vem sendo utilizado na confecção de vigas metálicas. Nesse caso a característica de interesse é o limite de resistência à fadiga. Para isso, 12 vigas metálicas foram submetidas a um teste de vida acelerado, no qual o fator de aceleração era o relacionado com o número de ciclos por hora que essas vigas seriam submetidas. A Tabela 6.1 seguinte apresenta os tempos estimados de falhas (horas) das unidades de trilhos em uma condição acelerada de uso de 10.800 ciclos por hora.

Tabela 6.1. Tempos estimados de falhas (ciclos) das unidades de trilhos em uma condição acelerada de uso de 10.800 ciclos por hora.

7.740	8.390	9.120	9.567
9.654	10.103	10.232	10.539
10.912	10.953	11.402	11.598

Uma segunda amostra foi obtida de dados históricos de doze vigas metálicas utilizadas na construção de um viaduto, substituídas ao longo do tempo ao apresentarem indicação de um processo de fadiga em andamento quando submetidas no local de uso a ensaios não destrutivos de Raios-X e ultrassom (para fadiga interna), e líquido penetrante (para fadiga com início na superfície do aço). Para o cálculo do número de ciclos correspondentes a cada uma dessas doze falhas considerou-se uma média de 40 ciclos por hora em uma condição normal de uso dessas vigas metálicas. A Tabela 6.2 seguinte apresenta esses resultados.

Tabela 6.2. Tempos estimados de falhas (ciclos) das unidades de trilhos em uma condição normal de uso de 40 ciclos por hora.

2.101.140	2.278.183	2.434.512	2.551.869
2.624.562	2.713.950	2.770.876	2.841.013
2.927.211	2.977.281	3.042,366	3.152.314

Utilizando-se agora o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro de forma β , para o parâmetro de escala θ e para o parâmetro de vida mínima φ do modelo Weibull e Weibull Invertido, obtivemos os seguintes valores para esses parâmetros sujeitos a condições aceleradas de teste:

a) No caso do Modelo Weibull de três parâmetros.

Sob uma aceleração de 10.800 ciclos por hora.

$$\beta_a = 8,336; \theta_a = 10.406,81 \text{ horas}; \varphi_a = 814,9 \text{ horas.}$$

Sob uma condição normal de uso (40 ciclos por hora):

$$\beta_n = 8,302; \theta_n = 2.806.349,2 \text{ horas}; \varphi_n = 220.326,3 \text{ horas}$$

O valor do parâmetro de forma se manteve aproximadamente constante, com $\beta \approx 8,3$.

O fator de aceleração $AF_{\theta_{n/a}}$ para o parâmetro de escala θ será dado novamente pela equação (10.0), ou seja:

$$AF_{\theta} = \frac{\theta_n}{\theta_a} = \frac{2.806.349,2}{10.406,81} = 269,66 \approx 270,0$$

Através do emprego da equação (4.10), obteremos:

$$AF_{\varphi} = \frac{\varphi_n}{\varphi_a} = \frac{220.326,3}{814,9} = 270,37 \approx 270,0$$

Logo, como esperávamos; $AF_{\theta} = AF_{\varphi} = AF = 270,0$, e $\beta_n = \beta_a = \beta \approx 8,3$

A Figura 6.1 mostra a curva da função densidade do modelo Weibull de três parâmetros desse exemplo em uma condição normal de uso.

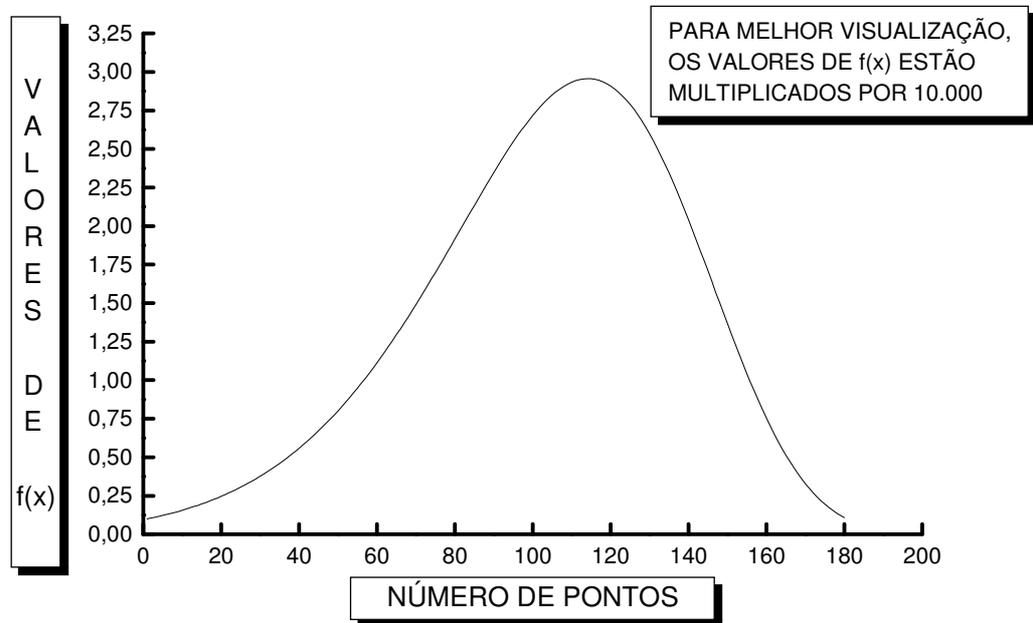


Figura 6.1. Curva da função densidade do modelo Weibull de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, em relação à resistência à fadiga não induzida.

b) No caso do Modelo Weibull Invertido de três parâmetros.

Sob uma aceleração de 10.800 ciclos por hora.

$$\beta_a = 6,688; \theta_a = 9.441,2 \text{ horas}; \varphi_a = 714,2 \text{ horas.}$$

Sob uma condição normal de uso (40 ciclos por hora):

$$\beta_n = 6,807; \theta_n = 2.548.284,6 \text{ horas}; \varphi_n = 203.465,7 \text{ horas}$$

O valor do parâmetro de forma se manteve aproximadamente constante, com $\beta \approx 6,7$.

O fator de aceleração $AF_{\theta_{n/a}}$ para o parâmetro de escala θ será dado utilizando-se uma vez mais a equação (10.0), ou seja:

$$AF_{\theta} = \frac{\theta_n}{\theta_a} = \frac{2.548.284,6}{9.441,2} = 269,91 \approx 270,0$$

Novamente através da aplicação da equação (4.10), obteremos:

$$AF_{\varphi} = \frac{\varphi_n}{\varphi_a} = \frac{203.465,7}{751,6} = 270,71 \approx 270,0$$

Então, como esperávamos; $AF_{\theta} = AF_{\varphi} = AF = 270,0$, e $\beta_n = \beta_a = \beta \approx 6,7$

A Figura 6.2 mostra a curva da função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros desse exemplo em uma condição normal de uso.

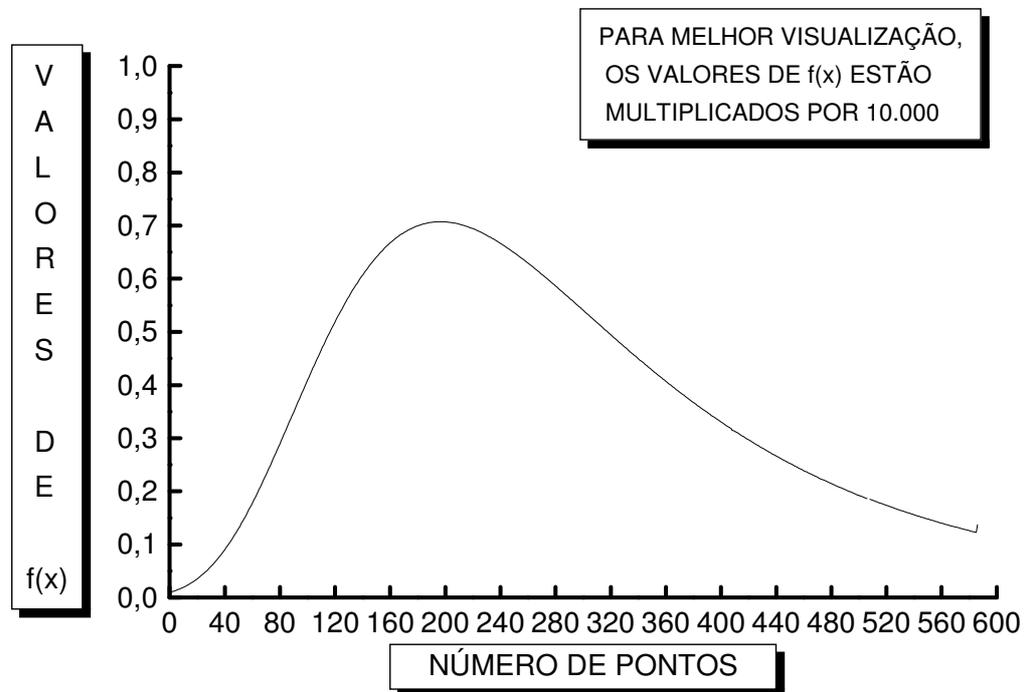


Figura 6.2. Curva da função densidade do modelo Weibull Invertido de três parâmetros do aço de alta resistência e baixa liga, em relação à resistência à fadiga não induzida.

Como podemos observar nesse exemplo, sob uma condição de aceleração linear, o aço de alta resistência e baixa liga, trabalhando sob um nível pré-determinado de aceleração aumentada, apresentará exatamente o mesmo mecanismo de falhas ao observado quando utilizado em níveis de uso normal. Ou seja, se a distribuição de vida em um determinado nível de tensão for representada respectivamente pelos modelos Weibull ou Weibull Invertido de três parâmetros, então a distribuição de vida será também respectivamente representada em qualquer outro nível de tensão pelos modelos Weibull e Weibull Invertido de três

parâmetros. O valor do parâmetro de forma permanece o mesmo nas condições de uso acelerada e normal para cada um desses dois modelos de amostragem, ao passo que os valores dos parâmetros de escala e vida mínima serão multiplicados pelo fator de aceleração comum a esses dois modelos. Um mesmo valor para o parâmetro de forma é uma consequência matemática necessária para ser ter as duas outras condições assumidas, ou seja: as hipóteses de se ter uma condição de aceleração linear e uma distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros. Caso diferentes níveis de tensão apresentassem valores muito diferentes para os respectivos parâmetros de forma, então ou as distribuições de amostragem Weibull e Weibull Invertida de três parâmetros não seriam os modelos certos para os dados obtidos no teste de vida, ou não teríamos uma condição de aceleração linear.

Em relação a esse exemplo analisado, o valor do parâmetro de forma do modelo Weibull foi de 8,3. Nesse nível de valor, a precisão dos cálculos utilizando-se essa distribuição de amostragem começa a se mostrar inferior do que a conseguida com o emprego do modelo Weibull Invertido, devido à curva da função densidade do modelo Weibull já começar a apresentar uma forma de pico ou cone. Desse modo, nesse caso específico do aço alta resistência e baixa liga em relação à resistência à fadiga não induzida, o modelo Weibull Invertido de três parâmetros deverá ser o indicado, por oferecer uma melhor resposta ao problema de precisão apresentado pelo modelo Weibull de três parâmetros, devido à sua curva da função densidade ser bem mais abrandada do que a do modelo Weibull.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho realizamos uma aplicação combinada dos mecanismos de teste sequencial com truncagem e testes acelerados, a um novo tipo de aço de alta resistência e baixa liga, quando utilizado de duas maneiras distintas; na fabricação de trilhos e também na construção de viadutos metálicos. No primeiro caso, o interesse foi determinar o valor esperado da vida média desse aço em horas, quando submetido à fricção, e no segundo caso a estimativa do limite de resistência à fadiga, ou seja, o número de ciclos necessários para obter esse ponto de fadiga.

Como distribuições de amostragem, foram utilizados o modelo Weibull e o modelo Weibull Invertido de três parâmetros. Esses modelos possuem um parâmetro de forma, um parâmetro de escala e um parâmetro de vida mínima ou localização, o qual representa a vida garantida do produto. Para estimarmos os três parâmetros dos modelos Weibull e Weibull Invertido, utilizamos um estimador de máxima verossimilhança “maximum likelihood” em uma situação de truncagem por falhas. Após o ponto de truncagem ter sido estatisticamente calculado, seu valor servirá como limite máximo de observações necessárias em qualquer outro teste de vida que se deseje realizar, dependendo do tipo de utilização um determinado material ou produto deverá ter. Para cada uma das duas aplicações, calculamos um ponto de truncagem específico.

Assumimos uma situação de aceleração linear. O parâmetro de forma permanece o mesmo, enquanto que o parâmetro de escala acelerado e o parâmetro de vida mínima acelerado foram multiplicados pelo fator de aceleração. A permanência do mesmo parâmetro de forma é uma consequência matemática necessária para ser ter as duas outras condições assumidas, ou seja: as hipóteses de se ter uma condição de aceleração linear e uma distribuição de amostragem

Weibull de três parâmetros. Caso diferentes níveis de tensão apresentassem valores muito diferentes para os respectivos parâmetros de forma, então ou as distribuições de amostragem Weibull e Weibull Invertida de três parâmetros não seriam os modelos certos para os dados obtidos no teste de vida, ou não teríamos uma condição de aceleração linear. Finalmente fizemos uma comparação da eficiência dos modelos Weibull e Weibull Invertido de três parâmetros quando utilizados como distribuições de amostragem.

Analisando os resultados obtidos nos dois estudos de caso, verificamos que no caso específico do aço alta resistência e baixa liga ter sido submetido à fricção o valor do parâmetro de forma do modelo Weibull foi de 4,4. Nesse nível de valor, a precisão dos cálculos utilizando-se essa distribuição de amostragem se mostra muito mais elevada do que a conseguida com o emprego do modelo Weibull Invertido, devido à curva da função densidade do modelo Weibull Invertido já estar com uma aparência altamente significativa de pico ou cone. Desse modo, o modelo Weibull de três parâmetros deverá ser o indicado, por oferecer uma melhor resposta ao problema de precisão apresentado pelo modelo Weibull Invertido de três parâmetros, devido à sua curva da função densidade ser bem mais abrandada (em forma de semicírculo) do que a do modelo Weibull Invertido. Em relação ao exemplo analisado no segundo caso o valor do parâmetro de forma do modelo Weibull foi de 8,3. Nesse nível de valor, a precisão dos cálculos utilizando-se essa distribuição de amostragem começa a se mostrar inferior do que a conseguida com o emprego do modelo Weibull Invertido, devido à curva da função densidade do modelo Weibull já começar a apresentar uma forma de pico ou cone. Desse modo, nesse caso específico do aço alta resistência e baixa liga em relação à resistência à fadiga não induzida o modelo Weibull Invertido de três parâmetros deverá ser o indicado, por oferecer uma melhor resposta ao problema de precisão apresentado pelo modelo Weibull de três parâmetros, devido à sua curva da função densidade ser bem mais abrandada do que a do modelo Weibull.

Nesse estudo desenvolvemos uma maneira prática e eficaz de se substituir os modelos acelerados provenientes da física quântica por distribuições da família de valores extremos, como a Weibull ou Weibull Invertida de três parâmetros, utilizando-se como princípio básico de substituição a Lei de Distribuição de Maxwell

“Maxwell Distribution Law”, evitando-se as principais dificuldades da aplicação desses modelos, tais como a estimação do valor das constantes existentes nos mesmos através dos dados provenientes do teste de vida sendo realizado, além da obtenção de uma elevada confiabilidade na transformação dos dados obtidos em condições de aceleração para dados estimados em uma condição normal de uso.

Essa metodologia proporciona uma maneira de transformamos tempos de falhas obtidos em uma condição acelerada de uso para uma condição normal de utilização sem a necessidade de calcular as constantes presentes dos modelos originais da física quântica. Sendo assim, pode-se trabalhar com pequeno número de itens, dada a não necessidade do cálculo dos referidas constantes provenientes dos modelos da física quântica. Outra vantagem dessa metodologia dessa metodologia é a possibilidade de utilizar o Método da Máxima Verossimilhança (maximum likelihood) na estimação dos valores dos parâmetros dessas distribuições de amostragem.

Além disso, o teste de vida sequencial com truncagem realizado após a obtenção dos dados de uma condição acelerada e transformada numa condição normal de uso mostrou que estes estimadores possuem uma confiabilidade mínima de 95%.

Como recomendação para um desenvolvimento futuro dessa linha de transformação de trabalho de dados obtidos em uma condição de uso acelerada para uma condição de uso normal, sugere-se trabalhar-se em situações nos quais não teremos uma condição de aceleração linear. Esse problema só agora, após a criação de computadores de alta velocidade está começando a ser estudado nos principais centros de pesquisa dos países mais tecnologicamente avançado no momento. Além disso, essa utilização de um modelo de aceleração não linear, principalmente quando as distribuições de amostragem forem os modelos de três parâmetros Weibull e Weibull Invertido, tornará necessário o desenvolvimento de equações de elevada complexidade tanto nos desenvolvimentos como nos cálculos dessas equações na estimação dos tempos de falhas em uma condição acelerada de uso.

REFERÊNCIAS

AGRAWAL, R. K. On the use of the Arrhenius equation to describe cellulose and wood pyrolysis. *Thermochemica Acta* 91 pp. 343-49, 1985

BAI, D.S., et al. "**Otimun Simple Ramp – Tests for the Weibull Distribution and Type- I Censoring Stress.**" *IEEE Transactions on Reliability*, vol.41, n° 3, p.407-413, Set.1992.

BAIN, LEE J. *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models. Theory and Methods.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

BLISCHKE, W. R. **On nonregular estimation.** II. Estimation of the Location Parameter of the Gamma and Weibull Distributions. *Communications in Statistics.* Vol. 3, pp. 1109-1129, 1974

CHORNET; ROY. Compensation of Temperature on Peroxide Initiated Cross Linking of Polypropylene, *European Polymer. Journal of Quality Technology* 16, 159- 167, 1980

COHEN, A. C.; WHITTEN, B. J. AND DING, Y. **Modified Moment Estimation for the Three-Parameter Weibull Distribution.** *Journal of Quality Technology*, Number 16, pp.159-167, 1984

DE SOUZA, DANIEL I. AND LAMBERSON, LEONARD R. **Bayesian Weibull Reliability Estimation.** *IEEE Transactions.* Volume 27, Number 3, pp.311 – 320. USA, 1995.

DE SOUZA, DANIEL I. **Sequential life testing with an underlying Weibull sampling distribution.** In: *Safety and Reliability*, Schuëller & Kafka eds., *Proceedings of the ESREL '99 International Conference on Safety and Reliability, Garching, Germany, 13-17 1999*, 2:869-874, Rotterdam,: Balkema, 1999

DE SOUZA, DANIEL I. **Further Thoughts on a Sequential Life Testing Approach Using a Weibull Model.** *Foresight and Precaution, ESREL 2000 Congress*, Cottam, Harvey, Pape & Tait (eds), Edinburgh; Scotland; 14–17 May 2000; 2: 1641 – 1647, Rotterdam, Balkema, 2000

DE SOUZA, DANIEL I. **Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underlying Weibull Model.** Towards a Safer World, ESREL 2001 Conference, Zio, Demichela & Piccinini (eds), 3: 1539 – 1546, Politecnico Di Torino. 16 - 20 September. Torino, Italy, 2001 a

DE SOUZA, DANIEL I. **A Truncation Mechanism in a Sequential Life Testing Approach with an Underlying Two-Parameter Inverse Weibull Model.** COMADEM 2001 Conference, Andrew G. Starr and Raj B. K. Rao (eds), 4 – 6 September. Manchester, UK. 2001b.

DE SOUZA, DANIEL I. **Sequential Life Testing with Underlying Weibull and Inverse Weibull Sampling Distributions.** *COMADEM 2002 Conference*, Raj B. K. Rao and Asoke K. Nandi (eds), Birmingham, U.K., 2 – 4 September 2002, 120 – 128, Comadem International.

DE SOUZA, DANIEL I. **Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underlying Three-Parameter Weibull Model.** ICHEAP-6, Chemical Engineering Transactions, 2003, Vol 3, pp. 557-562, Sauro Pierucci (ed), Pisa, Italy.

DE SOUZA, DANIEL I. **Application of a Sequential Life Testing with a Truncation Mechanism for an Underlying Three-Parameter Weibull Model.** *ESREL 2004-PSAM 7 Conference* edited by Spitzer, Schmoker and Dang, Springer-Verlag, Germany, Berlin, 2004a, Vol. 3, pp. 1674-1680.

DE SOUZA, DANIEL I. **Sequential Life Testing Approach Applied to Metallurgical Products when the Weibull Model Minimum Life is Different from Zero.** *CONAMET/SAM 2004*. Edited and published by the University of La Serena, Chile, La Serena, 2004b, pp. 445-450.

DE SOUZA, DANIEL I. **A Maximum Likelihood Approach Applied to an Accelerated Life Testing with an Underlying Three-Parameter Inverse Weibull Model.** COMADEM 2005 Conference, Mba and Rao (eds.), Vol 1, pp. 63-72, Cranfield University Press publisher. August 31-September 07, 2005. Cranfield, UK.

DE SOUZA, DANIEL I. Application of a Sequential Life Testing to an Accelerated Life Testing with an Underlying Three-Parameter Inverse Weibull Model. A Maximum Likelihood Approach. SINTEF 2006, 30th ESREDA Seminar: Reliability of Safety-Critical Systems, Langseth, Eid (eds.), SINTEF Publisher, June 7-8, 2006, Trondheim, Norway, 13 pp.

DE SOUZA, DANIEL I. **Atmosphere Corrosion of Steel Parts Life-Tested in Brazil.** SINTEF 2006, 30th ESREDA Seminar: Reliability of Safety-Critical Systems, Langseth, Eid (eds.), SINTEF Publisher, June 7-8, 2006, Trondheim, Norway, 12 pp.

DE SOUZA, DANIEL I. & Addad, Assed N. **Sequential Life-Testing with an Underlying Three-Parameter Inverse Weibull Model - A Maximum Likelihood**

Approach. In: *IIE Annual Conference and Exposition. Nashville, TN: The Institute of Industrial Engineering, 2007. V.01. pp. 907- 912. USA.*

DE SOUZA, DANIEL I; FONSECA, DANIELE R.; ADDAD, ASSED N. **Corrosão atmosférica de Chapas de aço submetidas a um teste de vida no Brasil.** In. VII Congresso Regional de Ensayos no Destructivos y Estructurales, Corende 2009 Rosário, Argentina. V.1pp 01-12, 2009.

DODSON, BRIAN. **Weibull Analysis. Minneapolis.** ASQ – Quality Press, 1994.

EBELING, CHARLES E. **Reliability and Maintainability Engineering.** The McGraw-Hill Companies, Inc. New York,1997

EDGE, M.; ALLEN, N. S.; WILLIAMS, D. A. R.; THOMPSON, F.; E HORIE, V. Methods for predictive stability testing of archival polymers: A Preliminary Assessment of Cellulose Triacetate Based Motion Picture Film. *Polymer Degradation and Stability.* No. 35. pp. 147-155,1992.

ELSAYED, E.A.**Reliability Engineering.**Massachussttes:Addison Wesley,1996.737p

ERTO, PASQUALE.**New Practical Bayes estimators for the 2- Parameter Weibull Distribution.**IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-31, No. 2, June, pp. 194-197.USA, 1982.

FELLER, ROBERT L. **Accelerated Agin – Photochemical and Thermal Aspects.** The J.Paul Getty Trust. New York, 1994.

GRAY,G.G. **Determination and significance of activation energy in permanence tests.** In *Preservation of Paper and Textiles of Historic and Artistic Value*, J. C. Williams, ed. American Chemical Society, Washington,D.C.,*Advances in Chemistry Series*164:286 -313,1977.

GRANT, E. E., LEAVENWORTH, R. S. **Statistical Quality Control.** McGraw Hill, New York, 1988

HARTE, H. et al. **Maximum Likelihood Estimation on the Parameters of Gamma and Weibull Populations from Complete and from Censored Samples.** *Technometrics*, nº 7, pp.639-643; erratum,15 (1973), pp431,1965.

HOGG, ROBERT V.; MCKEAN; CRAIG, ALLEN T. **Introduction to mathematical statistics (5 ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2005, 692p.**

KAPUR, KAILASH AND LAMBERSON, LEONARD R. **Reliability in Engineering Design.** John Willey & Sons, Inc., New York,1977.

LUIS A. ESCOBAR AND WILLIAM Q. MEEKER. **A review of accelerated test models.** *Statistical science*, 21(4): 552- 577, 2006.

MEEKER, W.Q. AND HAHN, G.J.: **How to Plan an Accelerated Life Test Some Practical Guidelines.** The ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques. J. A. Cornell; S. S Shapiro (eds.), MilWaukee, Wisconsin, 1985.

MEEKER, W.Q. AND HAMADA, M. **Statistical tools for the rapid development and evaluation of high-reliability products.** *IEEE Transactions on Reliability* 44 187–198, 1995.

MOOD, A .M. AND GRAYBILL, F.A. **Introduction to the Theory of Statistics.** Second Edition, McGraw-Hill, New York,1963.

MURTHY, D. N. P; XIE, M. AND HANG, R. **Weibull Models. Wiley Series in Probability and Statistics,** John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.2004

NELSON, W.B. **A bibliography of accelerated test plans.** *IEEE Transactions on Reliability.* New York, v.54, n.2, p. 194-195, jun. 2005.

NELSON, W.B. **A bibliography of accelerated test plans part II.** *IEEE Transactions on Reliability.* New York, v.54, n.3, p. 370 - 373, jun. 2005.

NELSON, W.B. **Accelerated Testing,** John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990

NELSON, W.B. **Applied Life Data Analysis,** John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982

NIST/SEMATECH. **e- Handbook of Statistical Methods.** Gaithersburg: National institute of Standards and Technology, 2006. Disponível em: www.itl.nist.gov/div898/handbook/, Acesso em: jul.2010.

TOBIAS, P.A.; Trindade, D.C. **Applied Reliability.** International Thomson Publishing, Inc., New York, N.Y, 2nd Edition, 1995

WALD, A. *Sequential Analysis.* New York: John Willey & Sons, Inc., USA,1947

WILLIAM Q. MEEKER, LUIS A. ESCOBAR, AND C. JOSEPH LU. **Accelerated degradation tests: Modeling and analysis.** *Technometrics*, 40:89- 99, 1998.

ZANAKIS, S. H. AND KYPARISIS, J. **A Review of Maximum Likelihood Estimation Methods for the Three Parameter Weibull Distribution.** *Journal of Statistical Computation and Simulation.* 1986, Number 25, pp. 53-73.

ANEXO

Programas de computadores utilizados no cálculo pertinente a esse estudo.

1. Calculando a Função Densidade do Modelo Weibull Invertida de Três Parâmetros

```
FILE FTI4IW.FOR
CALCULATING DENSITY FUNCTION THREE PARAMETER INVERSE
WEIBULL
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    INITIAL INPUT
    DIMENSION GPDIW(1000),TEMPO(1000)
    OPEN(6,FILE='BANANA',STATUS='NEW')
    OPEN(4,FILE='RPWI',STATUS='OLD')
    READ(4,10)BETA,THETA,VMIN
10  FORMAT(F14.4)
    WRITE(6,20)BETA,THETA,VMIN
20  FORMAT(2X,'BETA =',F14.4,5X,'THETA =',F14.4,2X,'VMIN
= ',F14.4)
    CALCULATING DENSITY FUNCTION
    VMINF=VMIN*20.0
    I=1
    A1=BETA/THETA
    A3=BETA+1.0
    TEMPO(I)=VMIN+40.0
50  CONTINUE
    A2=THETA/(TEMPO(I)-VMIN)
    A4=A2**A3
```

```
A5=A2**BETA
A6=-A5
A7=DEXP(A6)
A8=A1*A4*A7
GPDIW(I)=A8
WRITE(6,25)I,GPDIW(I)
25  FORMAT(2X,'GPDIW(',I3,') =',E 12.7,5X)
    IF(TEMPO(I).GT.VMINF)GO TO 60
    TEMPO(I+1)=TEMPO(I)+40.0
    I=I+1
    GO TO 50
60  CONTINUE
    STOP
    END
```

2. Calculando a Função Densidade do Modelo Weibull de Três Parâmetros

```

FILE FTI4WW.FOR
CALCULATING DENSITY FUNCTION THREE PARAMETER WEIBULL

  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
INITIAL INPUT
  DIMENSION GPDW(1000), TEMPO(1000)
  OPEN(6, FILE='BANANA', STATUS='NEW')
  OPEN(4, FILE='RPWI', STATUS='OLD')
  READ(4, 10) BETA, THETA, VMIN
10  FORMAT(F14.4)
  WRITE(6, 20) BETA, THETA, VMIN
20  FORMAT(2X, 'BETA =', F14.4, 5X, 'THETA =', F14.4, 2X, 'VMIN
= ', F14.4)
  CALCULATING DENSITY FUNCTION

  VMINF=VMIN*16.
  I=1
  A1=BETA/THETA
  A3=BETA-1.0
  TEMPO(I)=VMIN+40.0
50  CONTINUE
  A2=(TEMPO(I)-VMIN)/THETA
  A4=A2**A3
  A5=A2**BETA
  A6=-A5
  A7=DEXP(A6)
  A8=A1*A4*A7
  GPDW(I)=A8
  WRITE(6, 25) I, GPDW(I)
25  FORMAT(2X, 'GPDW(', I3, ') =', E 12.7, 5X)

```

```
IF (TEMPO(I) .GT. VMINF) GO TO 60
TEMPO(I+1) = TEMPO(I) + 40.0
I = I + 1
GO TO 50
60 CONTINUE
STOP
END
```

3. Método de Estimação Máxima Verossimilhaça (Maximum Likelihood Estimator) para o modelo Weibull Invertido – Calculando os estimadores de forma β e escala θ

```
FILE MAXIMUM LIKELIHOOD INVERSE WEIBULL
```

CALCULATING ESTIMATORS FOR BETA AND THETA

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION TV(50)

INPUT DATA

OPEN(4, FILE='MENINA', STATUS='OLD')
OPEN(5, FILE='GAROTA', STATUS='OLD')
OPEN(6, FILE='BARRA', STATUS='NEW')
READ(4, 7) AR, AN
7  FORMAT(F10.3)
WRITE(6, 12) AR, AN
12  FORMAT(2X, 'NUMBER OF FAILURES = ', 2X, F6.1, 2X,
* 'SAMPLE SIZE = ', F6.1/)
LR=AR
N=AN
DO 9 I=1, LR
READ(5, 8) TV(I)
WRITE(6, 13) TV(I)
9  CONTINUE
8  FORMAT(F15.3)
13  FORMAT(2X, F15.3)
BETA=0.6

CALCULATING BETA AND THETA

```

```

11  CONTINUE
    SUM1=0.0
    SUM2=0.0
    SUM3=0.0
    A1=AR/BETA
    DO 10 I=1, LR
    A2=DLOG(TV(I))
    A3=(1.0/TV(I))**BETA
    A4=A2*A3
    SUM1=SUM1+A2
    SUM2=SUM2+A3
    SUM3=SUM3+A4
10  CONTINUE
    A5=(AN-AR)
    A6=(1.0/TV(LR))**BETA
    A7=DLOG(TV(LR))
    A8=A5*A6
    A9=A7*A8
    A10=A1-SUM1+AR*(SUM3+A9)/(SUM2+A8)
    IF(DABS(A10).GE.0.001)GO TO 20
    GO TO 40
20  BETA=BETA+0.001
    IF(BETA.GE.14.0)GO TO 30
    GO TO 11
30  CONTINUE
    WRITE(6,50)BETA
50  FORMAT(2X,'LARGE BETA = ',E 15.7)
    GO TO 60
40  CONTINUE
    A11=1.0/BETA
    THETA=(AR/(SUM2+A8))**A11
    WRITE(6,70)BETA,THETA,A10
70  FORMAT(/2X,'BETA ESTIMATOR = ',E 15.7,
* 2X,'THETA = 'E 15.7//2X,'A10 = ',E 15.7/)

```

60 CONTINUE
STOP
END

4. Método de Estimação Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimator) para o modelo Weibull – Calculando os estimadores de forma β e escala θ

```
FILE MAXIMUM LIKELIHOOD WEIBULL
```

CALCULATING ESTIMATOR FOR BETA AND THETA

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION TV(50)

INPUT DATA

OPEN(4, FILE='MENINA', STATUS='OLD')
OPEN(5, FILE='GAROTA', STATUS='OLD')
OPEN(6, FILE='BARRA', STATUS='NEW')
READ(4, 7) AR, AN
7  FORMAT(F10.3)
WRITE(6, 12) AR, AN
12 FORMAT(2X, 'NUMBER OF FAILURES = ', 2X, F6.1, 2X,
* 'SAMPLE SIZE = ', F6.1/)
LR=AR
N=AN
DO 9 I=1, LR
READ(5, 8) TV(I)
WRITE(6, 13) TV(I)
9  CONTINUE
8  FORMAT(F15.3)
13 FORMAT(2X, F15.3)
BETA=0.6
11 CONTINUE

```

```

SUM1=0.0
SUM2=0.0
SUM3=0.0
A1=AR/BETA
DO 10I=1,LR
A2=DLOG(TV(I))
A3=TV(I)**BETA
A4=A2*A3
SUM1=SUM1+A2
SUM2=SUM2+A3
SUM3=SUM3+A4
10 CONTINUE
A5=(AN-AR)
A6=TV(LR)**BETA
A7=DLOG(TV(LR))
A8=A5*A6
A9=A7*A8
A10=A1+SUM1-AR*(SUM3+A9)/(SUM2+A8)
WRITE(6,15)A10
15 FORMAT(2X,'A10 =',E 20.7)
IF(DABS(A10).GE.0.05)GO TO 20
GO TO 40
20 BETA=BETA+0.001
IF(BETA.GE.14.0)GO TO 30
GO TO 11
30 CONTINUE
WRITE(6,50)BETA
50 FORMAT(2X,'LARGE BETA = ',E 15.7)
GO TO 60
40 CONTINUE
A11=1.0/BETA
THETA=((SUM2+A8)/AR)**A11
WRITE(6,70)BETA,THETA,A10
70 FORMAT(/2X,'BETA ESTIMATOR = ',E 15.7,

```

```
* 2X, 'THETA = 'E 15.7//2X, 'A10 = ',E 15.7/)
60 CONTINUE
STOP
END
```

5. Cálculo dos limites superior e inferior e do valor de x e ou w de uma distribuição Weibull de dois parâmetros

```

X AND LIMITS TWO PARAMETER WEIBULL - FILE XALW

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION TIME(50),ULIM(50),ALOLIM(50)
      DIMENSION FVALX(50),TVOFX(50)
      OPEN(4,FILE='BACANA',STATUS='OLD')
      OPEN(5,FILE='BONECA',STATUS='OLD')
      OPEN(6,FILE='BANANA',STATUS='NEW')
      READ(4,54)AANA,ALFAER,FIER,BETAUM,BETAZE,THETAUM,
* THETAZE
54  FORMAT(F14.3)
      NA=AANA

LIMITS

      AFR1=BETAUM/(THETAUM**BETAUM)
      AFR0=(THETAZE**BETAZE)/BETAZE
      AFR1X0=AFR1*AFR0
      AVLO=DLOG(AFR1X0)
      ALFRER=(1.0-FIER)/ALFAER
      ALERLO=DLOG(ALFRER)
      AUFRER=(1.0-ALFAER)/FIER
      ALERUP=DLOG(AUFRER)
      DO 20 I=1,NA
      AI=I
      XAI=AI*AVLO
      ULIM(I)=XAI+ALERUP
      ALOLIM(I)=XAI-ALERLO
      WRITE(6,35)AI,ULIM(I),ALOLIM(I)
20  CONTINUE
35  FORMAT(2X,'AI = ',F5.1,2X,'ULIM = ',F12.6,

```

```

* 2X, 'ALOLIM = ', F12.6, 2X, 'VALDFX = ', F12.6)

VALUE OF X

      FVALX(1)=0.0
      DO 30 L=1,NA
      READ(5,15) TIME(L)
15    FORMAT(F14.2)
      WRITE(6,25) TIME(L)
30    CONTINUE
25    FORMAT(2X,F14.2)
      FA=BETAZE-BETAUM
      F2A=BETAZE-1.0
      SUMTOT=0.0
      DO 40 IK=1,NA
      F1TIME=(TIME(IK)**BETAUM)/(THETAUM**BETAUM)
      F2TIME=(TIME(IK)**BETAZE)/(THETAZE**BETAZE)
      F1B=TIME(IK)-AML1
      F2B=TIME(IK)-AMLZ
      DIF1F2=F1TIME-F2TIME
      FB=TIME(IK)
      CF1=DLOG(F1B)
      CFZ=DLOG(F2B)
      CF=DLOG(FB)
      FF1=F1A*CF1
      FFZ=F2A*CFZ
      FF=FA*CF
      VALX=DIF1F2-FF1+FFZ
      VALX=DIF1F2+FF
      IJ=IK+1
      SUMTOT=VALX+SUMTOT
      TVOFX(IK)=SUMTOT
40    CONTINUE
      DO 50 I=1,NA

```

```
ANA=I  
WRITE(6,35)ANA,ULIM(I),ALOLIM(I),TVOFX(I)  
50 CONTINUE  
STOP  
END
```

6. Cálculo dos limites superior e inferior e do valor de x e ou w de uma distribuição Weibull de três parâmetros

```

X AND LIMITS THREE PARAMETER WEIBULL - FILE XALW

      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION TIME(50), ULIM(50), ALOLIM(50)
      DIMENSION FVALX(50), TVOFX(50)
      OPEN(4, FILE='BACANA', STATUS='OLD')
      OPEN(5, FILE='BONECA', STATUS='OLD')
      OPEN(6, FILE='BANANA', STATUS='NEW')
      READ(4, 54) AANA, ALFAER, FIER, BETAUM, BETAZE, THETAUM,
* THETAZE, AML1, AMLZ
54  FORMAT(F14.3)
      NA=AANA

LIMITS

      AFR1=BETAUM/(THETAUM**BETAUM)
      AFR0=(THETAZE**BETAZE)/BETAZE
      AFR1X0=AFR1*AFR0
      AVLO=DLOG(AFR1X0)
      ALFRER=(1.0-FIER)/ALFAER
      ALERLO=DLOG(ALFRER)
      AUFREER=(1.0-ALFAER)/FIER
      ALERUP=DLOG(AUFREER)
      DO 20 I=1, NA
      AI=I
      XAI=AI*AVLO
      ULIM(I)=XAI+ALERUP
      ALOLIM(I)=XAI-ALERLO
      WRITE(6, 35) AI, ULIM(I), ALOLIM(I)
20  CONTINUE
35  FORMAT(2X, 'AI = ', F5.1, 2X, 'ULIM = ', F12.6,

```

```

* 2X, 'ALOLIM = ', F12.6, 2X, 'VALDFX = ', F12.6)

VALUE OF X
  FVALX(1)=0.0
  DO 30 L=1,NA
    READ(5,15) TIME(L)
15  FORMAT(F14.2)
    WRITE(6,25) TIME(L)
30  CONTINUE
25  FORMAT(2X,F14.2)
    F1A=BETAUM-1.0
    F2A=BETAZE-1.0
    SUMTOT=0.0
    DO 40 IK=1,NA
      F1TIME=((TIME(IK)-AML1)**BETAUM)/(THETAUM**BETAUM)
      F2TIME=((TIME(IK)-AMLZ)**BETAZE)/(THETAZE**BETAZE)
      F1B=TIME(IK)-AML1
      F2B=TIME(IK)-AMLZ
      DIF1F2=F1TIME-F2TIME
      CF1=DLOG(F1B)
      CFZ=DLOG(F2B)
      FF1=F1A*CF1
      FFZ=F2A*CFZ
      VALX=DIF1F2-FF1+FFZ
      IJ=IK+1
      SUMTOT=VALX+SUMTOT
      TVOFX(IK)=SUMTOT
40  CONTINUE
    DO 50 I=1,NA
      ANA=I
      WRITE(6,35) ANA, ULIM(I), ALOLIM(I), TVOFX(I)
50  CONTINUE
    STOP
  END

```

7. Cálculo dos limites superior e inferior e do valor de x e ou w de uma distribuição Weibull Invertida de dois parâmetros

```
INVERTED WEIBULL LIMITS AND X
```

```
DADOS INICIAIS
```

```
DIMENSION TIME(40),ULIM(40)
DIMENSION FVALX(40),TVOFX(40)
DIMENSION ALOLIM(40)
DIMENSION BULI(40),BTVOF(40)
DIMENSION BALOLI(40)
OPEN(4,FILE='BACANA',STATUS='OLD')
OPEN(5,FILE='BONECA',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='BANANA',STATUS='NEW')
```

```
READ(4,54)AANA,ALFAER,FIER,BETAUM,BETAZE,THETAUM,THETAZE
54 FORMAT(F14.3)
```

```
WRITE(6,58)AANA,ALFAER,FIER,BETAUM,BETAZE,THETAUM,THETAZE
58 FORMAT(2X,'AANA =',F6.2,2X,'ALFAER =',F7.3,2X,'FIER =',
* F7.3,2X,'BETAUM =',F7.3/2X,'BETAZE =',F7.3,2X,'THETAUM =',
* F14.2,2X,'THETAZE =',F14.3/)
NA=AANA
```

```
CALCULO LIMITES
```

```
AFR1=BETAUM/(THETAZE**BETAZE)
AFR0=(THETAUM**BETAUM)/BETAZE
AFR1X0=AFR1*AFR0
AVLO=LOG(AFR1X0)
ALFRER=(1.0-FIER)/ALFAER
ALERLO=LOG(ALFRER)
```

```

AUFRRER=(1.0-ALFAER)/FIER
ALERUP=LOG(AUFRRER)
DO 20 I=1,NA
AI=I
XAI=AI*AVLO
ULIM(I)=XAI+ALERUP
ALOLIM(I)=XAI-ALERLO
20 CONTINUE
FVALX(1)=0.0
DO 30 L=1,NA
READ(5,15)TIME(L)
15 FORMAT(F16.4)
WRITE(6,25)TIME(L)
WRITE(*,25)TIME(L)
25 FORMAT(2X,F14.2)
30 CONTINUE
DIFBE=BETAUM-BETAZE

CALCULO DA SOMA TOTAL

SUMTOT=0.0
DO 40 IK=1,NA
F1TIME=(THETAUM**BETAUM)/(TIME(IK)**BETAUM)
F2TIME=(THETAZE**BETAZE)/(TIME(IK)**BETAZE)
TIMEV=TIME(IK)
DIF1F2=F1TIME-F2TIME
SEGPAX=DIFBE*LOG(TIMEV)
VALX=DIF1F2+SEGPAX
IJ=IK+1
SUMTOT=VALX+SUMTOT
TVOFX(IK)=SUMTOT
40 CONTINUE
DO 50 I=1,NA
ANA=I

```

```
BAN=ABS (ANA)
BULI (I) =ABS (ULIM (I) )
BALOLI (I) =ABS (ALOLIM (I) )
BTVOF (I) =ABS (TVOFX (I) )
WRITE (6, 35) ANA, ULIM (I) , ALOLIM (I) , TVOFX (I)
WRITE (6, 35) BAN, BULI (I) , BALOLI (I) , BTVOF (I)
WRITE (*, 35) ANA, ULIM (I) , ALOLIM (I) , TVOFX (I)
50  CONTINUE
35  FORMAT (2X, 'ANA =', F5.1, 2X 'ULIM =', F12.6, 2X,
* 'ALOLIM =', F12.6, 2X, 'VALDFX =', F12.6)
STOP
END
```

8. Cálculo dos limites superior e inferior e do valor de x e ou w de uma distribuição Weibull Invertida de três parâmetros

```

X AND LIMITS INVERSE WEIBULL 3 PARAMETERS
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION SABF(50), SCDF(50), VALX(50)
  DIMENSION ULI(50), ALI(50), TVA(60)
  OPEN(4, FILE='DAXCA', STATUS='OLD')
  OPEN(6, FILE='CAMBR1', STATUS='NEW')

INPUT DATA

  AML1=140.0
  AML0=168.0
  BET1=8.5
  BET1S=9.5
  BET0=9.2
  BET0S=10.2
  THE1=400.0
  THE0=420.0
  SABF(1)=0.0
  SCDF(1)=0.0
  ALFA=0.05
  UIPS=0.10
  TH0B0=THE0**BET0
  TH1B1=THE1**BET1
  NV=20
  ANV=NV

CALCULATIONS

  DO 10 I=1,NV
  READ(4,15) TVA(I)
  WRITE(6,15) TVA(I)

```

```

10  CONTINUE
15  FORMAT(F14.3)
    DO 20 I=1,NV
    A1=DLN(TVA(I)-AML1)
    AF=BET1S*A1
    B1=DLN(TVA(I)-AML0)
    BF=-BET0S*B1
    SPAB=AF+BF
    SABF(I+1)=SABF(I)+SPAB
    C1=(TVA(I)-AML0)**BET0
    CF=-TH0B0/C1
    D1=(TVA(I)-AML1)**BET1
    DF=TH1B1/D1
    SPCD=BF+DF
    SCDF(I+1)=SCDF(I)+SPCD
    VALX(I)=SABF(I+1)+SCDF(I+1)
    WRITE(6,30)I,VALX
20  CONTINUE
30  FORMAT(2X,'I = ',I4,'VALX =',E 15.8)
    E1=(1.0-UIPS)/ALFA
    EF=-DLN(E1)
    F1=(1.0-ALFA)/UIPS
    FF=DLN(F1)
    G1=(BET1*TH1B1)/(BET0*TH0B0)
    GF=DLN(G1)
    DO 40 I=1,NV
    ULI(I)=ANV*GF+F1
    ALI(I)=ANV*GF-E1
    WRITE(6,50)I,ULI,ALI
40  CONTINUE
50  FORMAT(2X,'I = ',I4,2X,'ULI = ',E 15.8,
* 2X,'LLI = ',E 15.8)
    STOP
    END

```

9. Cálculo do tempo de falhas dos modelos Weibull e Weibull Invertido de três parâmetros

```

FILE FTI4.FOR

CALCULATING TIME TO FAILURE
WEIBULL AND INVERSE WEIBULL

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)

INITIAL INPUT

DIMENSION WTIME(150), WITIME(150)
OPEN(6, FILE='BANANA', STATUS='NEW')
OPEN(4, FILE='RPWI', STATUS='OLD')
READ(4, 10) BETAP, THETAP, AMILI
10  FORMAT(F14.4)
WRITE(6, 20) BETAP, THETAP, AMILI
20  FORMAT(2X, 'BETAP =', F14.4, 5X, 'THETAP =', F14.4, 2X, 'ML
= ', F14.4)

CALCULATING TIME TO FAILURES

I=1
RINC=0.01
BETAPI=1.0/BETAP
15  CONTINUE
RINVE=1.0/RINC
RIWVE=1.0/(1.0-RINC)
COF1IW=DLOG(RIWVE)
COF2IW=COF1IW** (BETAPI)
COF1=DLOG(RINVE)
COF2=COF1** (BETAPI)

```

```
WTIME(I)=THETAP*COF2+AMILI
WITIME(I)=THETAP/COF2IW+AMILI
WRITE(6,25)I,WTIME(I),I,WITIME(I)
25  FORMAT(2X,'WTIME(',I3,') =',E 12.7,5X,'WITIME(',I3,')
*  =',E 12.7)
RINC=RINC+0.01
I=I+1
IF(RINC.GT.0.99)GO TO 50
GO TO 15
50  CONTINUE
STOP
END
```

**10. Calcuado os estimadores para o modelo Weibull de três parâmetros.
Utilizando – se o método Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood).**

```

FILE MAXIMUM LIKELIHOOD THREE-PARAMETER WEIBULL

CALCULATING ESTIMATORS FOR BETA, THETA AND MINIMUM LIFE

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION TV(50)

INPUT DATA

OPEN(4,FILE='MENINA',STATUS='OLD')
OPEN(5,FILE='GAROTA',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='BARRA',STATUS='NEW')
READ(4,7)AR,AN
7  FORMAT(F10.3)
WRITE(6,12)AR,AN
12  FORMAT(2X,'NUMBER OF FAILURES = ',2X,F6.1,2X,
* 'SAMPLE SIZE = ',F6.1/)
LR=AR
N=AN
DO 9I=1,LR
READ(5,8)TV(I)
WRITE(6,13)TV(I)
9  CONTINUE
8  FORMAT(F15.3)
13  FORMAT(2X,F15.3)
BETA=0.6
FI=0.5
11  CONTINUE
SUM1=0.0

```

```
SUM2=0.0
SUM3=0.0
A1=AR/BETA
DO 10I=1,LR
A2=DLOG(TV(I)-FI)
A3=(TV(I)-FI)**BETA
A4=A2*A3
SUM1=SUM1+A2
SUM2=SUM2+A3
SUM3=SUM3+A4
10 CONTINUE
A5=(AN-AR)
A6=(TV(LR)-FI)**BETA
A7=DLOG(TV(LR)-FI)
A8=A5*A6
A9=A7*A8
A10=A1+SUM1-AR*(SUM3+A9)/(SUM2+A8)
WRITE(6,15)A10
15 FORMAT(2X,'A10 = 'E 20.7)
IF(DABS(A10).GE.0.01)GO TO 20
GO TO 40
20 CONTINUE
20 BETA=BETA+0.001
FI=FI+0.1
IF(BETA.GE.14.0)GO TO 30
IF(FI.GT.TV(1))GO TO 35
GO TO 11
34 CONTINUE
WRITE(6,50)BETA
50 FORMAT(2X,'LARGE BETA = ',E 15.7)
GO TO 60
35 CONTINUE
BETA=BETA+0.001
IF(BETA.GE.16.0) GO TO 34
```

```
FI=0.5
WRITE(6,55)FI
55  FORMAT(2X,'LARGR FI = ',E 15.7)
GO TO 11
40  CONTINUE
A11=1.0/BETA
THETA=((SUM2+A8)/AR)**A11
WRITE(6,70)BETA,THETA,FI,A10
70  FORMAT(/2X,'BETA ESTIMATOR = ',E 15.7,
* 2X,'THETA = 'E 15.7//2X,'FI ESTIMATOR = ',
* E 15.7,2X,'A10 = ',E 15.7/)
60  CONTINUE
STOP
END
```

11. Mecanismo de truncagem para uma distribuição Weibull de três parâmetros

```

FILE TRUNCATION THREE P WEIBULL - FILE COMA4.FOR
CALCULATING E(LN(T-ALOUZ))

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)

INPUT DATA

OPEN(4, FILE='STATE', STATUS='OLD')
OPEN(6, FILE='VIAGEM', STATUS='NEW')
READ(4, 55) ALOC, BETAUM, BETAZE, THETAUM, THETAZE
55 FORMAT(F14.3)
ALOUZ=250.0
ALOZE=280.0
EVLOTH=DLOG(THETAZE)
CINTEG=0.116
TINICI=ALOZE+1.5
NSUMATO=21
IINICI=2
FMULTIP=1.0
BETAFA=1.0/BETAZE

CALCULATING G/3

CGINTBE=CINTEG/3.0

TOTAL SUM COMPUTATION

ADICSOM=0.0
TCALCUL=TINICI
TOTALSOM=0.0
DO 20I=1, NSUMATO

```

```

FACTA1=(TCALCUL-ALOC)/THETAZE
FACTA2=FACTA1**(BETAZE)
FACTA3=DLOG(FACTA2)
FACTB1=-FACTA2
FACTB2=DEXP(FACTB1)
TOTALFC=FACTA3*FACTB2
IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.NSUMATO)GO TO 40
IF(I.EQ.IINICI)GO TO 30
FMULTIP=2.0
GO TO 40
30 FMULTIP=4.0
   IINICI=IINICI+2
40 CONTINUE
   IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.NSUMATO)FMULTIP=1.0
   CALLDIR=TOTALFC*FMULTIP
   TOTALSOM=CALLDIR+ADICSOM
   ADICSOM=TOTALSOM
   TCALCUL=TCALCUL+125.0
20 CONTINUE

CALCULATING E(LN(T-ALOOM))

VELOGT=EVLOTH+BETAFA*CGINTBE*TOTALSOM
WRITE(6,32)ALOC,VELOGT
WRITE(*,32)ALOC,VELOGT
32 FORMAT(2X,'ALOC =',E20.7,6X,'VELOGT =',E20.7)
STOP
END

```

11. Mecanismo de truncagem para uma distribuição Weibull Invertida de três parâmetros

```
FILE TRUNCATION THREE P INVERTED WEIBULL
CALCULATING E(LN(T-ALOUM))
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
INPUT DATA
```

```
OPEN(4,FILE='STATE',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='VIAGEM',STATUS='NEW')
READ(4,55)ALOC
```

```
55 FORMAT(F14.3)
BETAUM=8.5
BETAZE=9.2
THETAUM=550.0
THETAZE=588.0
ALOUM=180.0
ALOZE=140.0
EVLOTH=DLOG(THETAZE)
CINTEG=0.116
TINICI=ALOC+1.5
NSUMATO=21
IINICI=2
FMULTIP=1.0
BETAFA=1.0/BETAZE
```

```
CALCULATING G/3
```

```
CGINTBE=CINTEG/3.0
```

```
TOTAL SUM COMPUTATION
```

```

ADICSOM=0.0
TCALCUL=TINICI
TOTALSOM=0.0
DO 20 I=1, NSUMATO
FACTA1=THETAZE / (TCALCUL-ALOC)
FACTA2=FACTA1** (BETAZE)
FACTA3=DLOG (FACTA2)
FACTB1=-FACTA2
FACTB2=DEXP (FACTB1)
TOTALFC=FACTA3*FACTB2
IF (I.EQ.1.OR.I.EQ.NSUMATO)GO TO 40
IF (I.EQ.IINICI)GO TO 30
FMULTIP=2.0
GO TO 40
30 FMULTIP=4.0
IINICI=IINICI+2
40 CONTINUE
IF (I.EQ.1.OR.I.EQ.NSUMATO)FMULTIP=1.0
CALLDIR=TOTALFC*FMULTIP
TOTALSOM=CALLDIR+ADICSOM
ADICSOM=TOTALSOM
TCALCUL=TCALCUL+30.
20 CONTINUE

CALCULATING E (LN (T-ALOUM) )

VELOGT=EVLOTH-BETAFA*CGINTBE*TOTALSOM
WRITE (6, 32) ALOC, VELOGT
WRITE (*, 32) ALOC, VELOGT
32 FORMAT (2X, 'ALOC =', E20.7, 6X, 'VELOGT =', E20.7)
STOP
END

```

12. Cálculo de um estimador para o parâmetro vida mínima de um modelo Weibull de três parâmetros

```

FILE TRUNCATION THREE P WEIBULL
CALCULATING ESTIMATOR FOR "The Minimum Life"

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION TVA(60),SRJ(40),ASRJ(40)
DIMENSION G2T(50),AG2T(50),BSRJ(40)
DIMENSION AASRJ(40)

INPUT DATA

OPEN(4,FILE='COM',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='CAMBR',STATUS='NEW')
BETAV=9.2
THETAV=420.
THETAZE=2000000.
FIV=30.
CINTEG=0.116
NV=9
DO 10 I=1,NV
READ(4,15)TVA(I)
WRITE(6,15)TVA(I)
10 CONTINUE
15 FORMAT(F14.3)
ANV=NV

CALCULATING G/3

CGINTBE=CINTEG/3.0

TOTAL SUM COMPUTATION

```

```

CONS01=ANV*THETAV*CGINTBE
CONS02=ANV*CGINTBE
INSP=1
ALOW=FIV
VAX1=TVA(1)
UPPER=TVA(1)-FIV
MINT=40
VAIN=(UPPER-ALOW)/1000.
VAIN=1.0
FIVC=FIV
VAX1=TVA(1)
800 CONTINUE
INSP=2
FIV=ALOW
ASRJ(1)=0.0
AASRJ(1)=0.0
BSRJ(1)=0.0
SRJ(1)=0.0
DO 810 J=1,MINT
IF(FIV.EQ.ALLOW)GO TO 830
IF(FIV.EQ.UPPER)GO TO 830
DO 801 I=1,IWIN
UVAL=(420./(VAX1/3.0-FIV)**BETAV
AUVAL=1.0/(UVAL**(1.0/BETAV))
SRJ(J+1)=SRJ(J)+AUVAL
RM1=SRJ(J+1)
FAC1=-UVAL
FAC2=DEXP(FAC1)
FAC3=(1.0-FAC2)**ANV
BSRJ(J+1)=BSRJ(J)+FAC3
ARM2=BSRJ(J+1)
RM2=RM1*ARM2
801 CONTINUE
G2T(J)=RM2

```

```

AG2T(J)=ARM2
IF(INSP.EQ.MINT.OR.INSP.EQ.1)GO TO 830
AINSP=INSP
SRI=AINSP/2.
IRI=INSP/2
IF(IRI.EQ.SRI)GO TO 840
G2T(J)=2.*G2T(J)
AG2T(J)=2.*AG2T(J)
GO TO 830
840 G2T(J)=4.*G2T(J)
AG2T(J)=4.*AG2T(J)
830 CONTINUE
ASRJ(J+1)=ASRJ(J)+G2T(J)
AASRJ(J+1)=AASRJ(J)+AG2T(J)
WRITE(6,45)J,ASRJ(J+1),AASRJ(J+1)
45 FORMAT(2X,'J =',I5,5X,'ASRJ =',E 20.7,5X,'AASRJ =',E
20.7)
FIV=FIV+VAIN
INSP=INSP+1
TET=ASRJ(J+1)
ATET=AASRJ(J+1)
WRITE(6,42)TET,ATET
42 FORMAT(2X,'TET =',E 20.7,'ATET =',E 20.7)
IWIN=IWIN+1
IF(IWIN.GT.NV)GO TO 814
AREA1=CONS01*TET
AREA2=CONS02*ATET*FIV
IIWW=IWIN-1
WRITE(6,21)AREA1,AREA2,FIV
21 FORMAT(2X,'AREA1 =',E 20.7,5X,'AREA2 =',E 20.7
* ,5X,'FIV =',E 20.7)
GO TO 800
814 CONTINUE
FIVC=FIVC+VAIN

```

```
SAREAS=AREA1+AREA2
FINDIF=VAX1-SAREAS
IF (DABS (FINDIF) .LE.30)GO TO 900
WRITE (6,62)FIV
810 FIV=FIV+VAIN
62 FORMAT (2X, 'FIV = ',E 20.7)
GO TO 800
900 CONTINUE
WRITE (6,910)FIV
910 FORMAT (2X, 'FIV = ',E 20.7)
CONTINUE
STOP
END
```

13. Cálculo de um estimador para o parâmetro vida mínima de um modelo Weibull Invertido de três parâmetros

```

FILE TRUNCATION THREE P INVERSE WEIBULL
CALCULATING ESTIMATOR FOR THE MINIMUM LIFE
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION TVA(60),SRJ(40),ASRJ(40)
  DIMENSION G2T(50),AG2T(50),BSRJ(40)
  DIMENSION AASRJ(40)
INPUT DATA
  OPEN(4,FILE='COMA',STATUS='OLD')
  OPEN(5,FILE='COIW',STATUS='OLD')
  OPEN(6,FILE='CAMBR',STATUS='NEW')
  READ(5,12)BETAV,THETAV,ANV
12  FORMAT(F14.3)
  FIV=1.5
  CINTEG=0.116
  NV=ANV
  DO 10 I=1,NV
  READ(4,15)TVA(I)
  WRITE(6,15)TVA(I)
10  CONTINUE
15  FORMAT(F14.3)
  ANV=NV

CALCULATING G/3

  CGINTBE=CINTEG/3.0

TOTAL SUM COMPUTATION

  CONS01=ANV*THETAV*CGINTBE
  CONS02=ANV*CGINTBE
  MINT=21

```

```
VAIN=0.3
VAIN=3.
VAX1=TVA(1)
800 CONTINUE
TINICI=TVA(1)
INSP=2
ASRJ(1)=0.0
AASRJ(1)=0.0
BSRJ(1)=0.0
SRJ(1)=0.0
DO 810 J=1,MINT
UVAL=(THETAV/(TINICI-FIV))**BETAV
AUVAL=1.0/(UVAL**(1.0/BETAV))
SRJ(J+1)=SRJ(J)+AUVAL
RM1=SRJ(J+1)
FAC1=-UVAL
FAC2=DEXP(FAC1)
FAC3=(1.0-FAC2)**ANV
BSRJ(J+1)=BSRJ(J)+FAC3
ARM2=BSRJ(J+1)
RM2=RM1*ARM2
G2T(J)=RM2
AG2T(J)=ARM2
AINSP=INSP
SRI=AINSP/2.
IRI=INSP/2
IF(IRI.EQ.SRI)GO TO 840
G2T(J)=2.*G2T(J)
AG2T(J)=2.*AG2T(J)
GO TO 830
840 G2T(J)=4.*G2T(J)
AG2T(J)=4.*AG2T(J)
830 CONTINUE
ASRJ(J+1)=ASRJ(J)+G2T(J)
```

```

AASRJ(J+1)=AASRJ(J)+AG2T(J)
INSP=INSP+1
TINICI=TINICI+30.
IF(TINICI.GE.2400.)GO TO 900
IF(FIV.GE.700.)GO TO 900
810 CONTINUE
TET=ASRJ(J)
ATET=AASRJ(J)
AREA1=CONS01*TET
AREA2=CONS02*ATET*FIV
21  FORMAT(/2X,'AREA1 = ',E 15.7,2X,'AREA2 = ',E 15.7
*   ,2X,'DIF = ',E 15.7)
SAREAS=AREA1+AREA2
FINDIF=VAX1-SAREAS
WRITE(6,21)AREA1,AREA2,FINDIF
IF(DABS(FINDIF).LE.20.)GO TO 902
FIV=FIV+VAIN
GO TO 800
902 WRITE(6,903)FIV
903  FORMAT(/2X,'FINAL VALUE OF FIV = ',E 20.7)
DIF=DABS(FINDIF)
WRITE(6,21)AREA1,AREA2,DIF
GO TO 917
900 CONTINUE
WRITE(6,910)FIV,TINICI
910  FORMAT(2X,'FIV = ',E 20.7,5X,'TINICI = ',E 20.7)
917 CONTINUE
STOP
END

```