

BERNARDO DE FIGUEIREDO ROCHA

DIMENSIONAMENTO DE LAJES DE PONTES COM ARMADURAS  
ESCONSAS BASEADO NO MODELO DA CHAPA FISSURADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia da Construção e Estruturas

Orientador: Prof. Mauro Schulz, D.Sc.

Niterói  
2015



Bernardo de Figueiredo Rocha

DIMENSIONAMENTO DE LAJES DE PONTES COM ARMADURA ESCONSA  
BASEADO NO MODELO DA CHAPA FISSURADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia das Construções e Estruturas

Examinada por:

---

Prof. Mauro Schulz, D.Sc. (Orientador)

Universidade Federal Fluminense - UFF

---

Prof. Claudia Maria de Oliveira Campos, D.Sc.

Universidade Federal Fluminense - UFF

---

Prof. Mayra Soares Pereira Lima Perlingeiro, D.Sc.

Universidade Federal Fluminense - UFF

---

Prof. Maria Paola Santisi d'Avila, PhD.

Université de Nice-Sophia Antipolis

---

Prof. Benjamin Ernani Diaz, Dr. Ing., Professor Emérito

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

NITERÓI, RJ - BRASIL

Junho de 2015

## **AGRADECIMENTOS**

À minha esposa, companheira e amiga, Agatha Dias, pela paciência, compreensão e apoio incondicional em todos os momentos, mesmo em minha ausência.

À minha família, Carla, Jonatas, Thais e Yara, pelos ensinamentos de vida e pela educação que me permitiu alcançar mais esse objetivo.

Ao Professor Mauro Schulz, pelos conhecimentos transmitidos, orientação, incentivo e confiança durante esta árdua jornada.

À Professora Maria Bernadete Cariello, pela revisão do texto.

A Danilo Laurindo, Marcelo Araújo, Arthur Laurindo e Thais Maciel, pelo apoio, compreensão e incentivo.

Aos engenheiros Cesar da Silva Pinto, Sérgio Marques Ferreira de Almeida, Jorge Mesquita, Jorge Cunha e Luiz Carlos de Oliveira Machado, pelas oportunidades e conhecimentos transmitidos ao longo dos anos de trabalho e formação, que me deram uma base sólida para a construção deste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho, discute-se o dimensionamento de estruturas laminares de concreto, com armaduras esconsas entre si, e oblíquas em relação às direções das solicitações. Esses elementos podem estar submetidos à ação simultânea de duas forças normais, uma força tangencial, dois momentos fletores e um momento volvente, no plano do elemento, e dois esforços cortantes, na direção transversal ao mesmo plano. A flexão é removida do problema dividindo-se as solicitações entre duas chapas extremas, conforme proposto por Baumann. As chapas extremas são dimensionadas através de uma extensão do método de Nielsen, para chapas com armaduras em malhas que não são ortogonais. O problema é definido no sistema local, evitando-se, assim, a transformação para os eixos principais, o que simplifica o cálculo manual e a implementação computacional. São apresentadas recomendações para o dimensionamento, tais como braços de alavanca variáveis para a redução da tensão no concreto e critérios para armaduras mínimas. A formulação é aplicada ao dimensionamento das armaduras de pontes estruturadas em laje, com e sem vigas laterais, e lajes de pontes em vigas múltiplas, segundo variados ângulos de esconsidade. A análise comparativa dos resultados comprova a relevância da formulação e mostra que a esconsidade resulta em maiores áreas de aço e eleva as tensões no concreto, em módulo.

**Palavras-chave:** concreto armado, estruturas laminares, dimensionamento de cascas, armadura esconsa, armadura oblíqua, lajes, pontes esconsas, momento volvente, armadura mínima

## ABSTRACT

This research discusses the design of reinforced concrete plates and shells with skew reinforcement, whose directions are not necessarily aligned with the principal internal forces. The element may be simultaneously subjected to two normal forces, one tangential force, two bending moments and one twisting moment, in the plane of the element, and two shear forces in the transverse direction. The division of the internal forces between two extreme plates, as proposed by Baumann, removes the flexure from the problem. An extension of Nielsen's orthotropic approach yields the skew reinforcement of the resulting plates. Defining the problem at the local system bypasses transformations to the principal axes, simplifies the formulation and reduces the numerical calculations. Relevant recommendations for the design are proposed, such as varying the lever arm to reduce concrete compression stresses and minimum reinforcement criteria. The research investigates the reinforcement of slabs of flat bridges, with and without side beams, and slabs of precast "I" girder bridges, according to different skew angles. The analysis of the results confirms the relevance of the formulation and shows that skew reinforcement not only requires additional amount of steel but also results in higher stresses in concrete.

**Keywords:** reinforced concrete, shell structures, shell design, skew reinforcement, slabs, skew bridges, twisting moment, minimum reinforcement

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>17</b>
1.1. RELEVÂNCIA DA PESQUISA.....	17
1.2.DETALHAMENTO DE ARMADURAS DE PEÇAS ESCONSAS .....	26
1.3.OBJETIVO .....	28
1.4.ESTRUTURA DO TRABALHO .....	28
<b>2. MODELO DA CHAPA FISSURADA</b> .....	<b>30</b>
2.1.REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	30
2.2.HIPÓTESES BÁSICAS .....	32
2.3.REDUÇÃO DO PROBLEMA GERAL AO DIMENSIONAMENTO DE CHAPAS .....	34
2.4.ELEMENTO DE CHAPA COM ARMADURA ORTOGONAL .....	37
2.5.ELEMENTO DE CHAPA COM ARMADURA ESCONSA .....	43
2.6.RELAÇÕES MÍNIMAS ENTRE ARMADURAS E ARMADURAS MÍNIMAS.....	48
2.7 DIMENSIONAMENTO DE CASCAS ÀS SOLICITAÇÕES TRANSVERSAIS AO PLANO DO ELEMENTO.....	56
<b>2.7.1. Determinação do cortante principal</b> .....	<b>56</b>
<b>2.7.2. Deslocamento do diagrama de forças nas armaduras tracionadas</b> .....	<b>63</b>
<b>3. APLICAÇÃO DA TEORIA</b> .....	<b>66</b>
3.1. CASOS ESTUDADOS .....	66
3.2. AÇÕES A CONSIDERAR NO DIMENSIONAMENTO DE LAJES DE PONTES .....	66
3.3. PONTES EM LAJE SEM VIGAS LATERAIS .....	67
<b>3.3.1. Descrição dos modelos</b> .....	<b>67</b>
<b>3.3.2. Reações negativas e levantamento das lajes nos cantos</b> .....	<b>73</b>
<b>3.3.3. Critérios de dimensionamento</b> .....	<b>76</b>
<b>3.3.4. Resultados do dimensionamento das cascas às solicitações transversais ao plano dos elementos</b> .....	<b>82</b>
<b>3.3.5. Resultados do dimensionamento das armaduras no plano das lajes e tensões no concreto</b> .....	<b>83</b>
<b>3.3.6. Peso total de aço e taxas de armadura</b> .....	<b>101</b>
3.4. PONTES EM LAJE COM VIGAS LATERAIS .....	110
<b>3.4.1. Descrição dos modelos</b> .....	<b>110</b>
<b>3.4.2. Critérios de dimensionamento</b> .....	<b>112</b>
<b>3.4.3 Resultados do dimensionamento das cascas às solicitações transversais ao plano dos elementos</b> .....	<b>113</b>
<b>3.4.4. Resultados do dimensionamento das armaduras no plano das lajes e tensões no concreto</b> .....	<b>114</b>
<b>3.4.5.Peso total de aço e taxas de armadura</b> .....	<b>134</b>
3.5 PONTES EM VIGAS MÚLTIPLAS .....	139
<b>3.5.1 Descrição dos modelos</b> .....	<b>139</b>
<b>3.5.2 Critérios de dimensionamento</b> .....	<b>145</b>
<b>3.5.3 Armaduras no plano da laje</b> .....	<b>146</b>
<b>3.5.4 Resultados do dimensionamento das armaduras no plano das chapas e tensões no concreto</b> .....	<b>149</b>
<b>3.5.5. Peso total de aço e taxas de armadura</b> .....	<b>173</b>
<b>4. CONCLUSÕES</b> .....	<b>179</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>182</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Viaduto de Samambaia na DF-180 sobre a BR 060 (Google Earth, 2014) .....	17
Figura 1.2 – Ponte rodoviária na RJ 158 (Google Earth, 2014) .....	18
Figura 1.3 – Viadutos sobre a Av. Salvador Allende (Google Earth, 2014) .....	18
Figura 1.4 – Pontilhão rodoviário esconso em planta .....	19
Figura 1.5 – Corte transversal à via inferior e detalhes .....	20
Figura 1.6 – Detalhamento esquemático do pontilhão esconso com armaduras oblíquas .....	20
Figura 1.7 – Cruzamento esconso de uma ferrovia (SO-NE) com uma rodovia (NO-SE) .....	21
Figura 1.8 – Seções transversais da passagem inferior .....	22
Figura 1.9 – Forma da galeria e alas em elevação e planta .....	23
Figura 1.10 – Detalhamento esquemático das armaduras da laje superior da galeria .....	24
Figura 1.11 – Elevação e plantas de um viaduto rodoviário esconso .....	25
Figura 1.12 – Detalhamento das armaduras da laje de um viaduto esconso em vigas múltiplas .....	26
Figura 1.13 – Armadura com comprimento variável .....	27
Figura 1.14 – Armadura em “leque” .....	27
Figura 1.15 – Armadura esconsa com comprimento constante .....	28
Figura 2.1 – Modelo da chapa fissurada de concreto armado (SCHULZ, 1988) .....	33
Figura 2.2 – Encavilhamento das armaduras .....	33
Figura 2.3 – Solicitações atuantes em um elemento de casca .....	34
Figura 2.4 – Ações por unidade de comprimento na chapa .....	35
Figura 2.5 – Espessura das chapas e braço de alavanca médio .....	35
Figura 2.6 – Braços de alavanca diferenciados de acordo com o CEB-FIP Model Code 1990 .....	36
Figura 2.7 – Forças resistentes na chapa com armadura ortogonal .....	37
Figura 2.8 – Forças no concreto por faceta do elemento .....	38
Figura 2.9 – Forças no concreto por faceta do elemento na direção das solicitações na chapa .....	38
Figura 2.10 – Forças nas armaduras .....	38
Figura 2.11 – Equilíbrio das solicitações na chapa com as forças resistentes por unidade de comprimento .....	39
Figura 2.12 – Forças resistentes na chapa com armadura esconsa .....	43
Figura 2.13 – Forças no concreto por faceta do elemento .....	44
Figura 2.14 – Forças no concreto por faceta do elemento na direção das ações na chapa .....	44
Figura 2.15 – Forças nas armaduras na direção $\alpha$ e decomposição em $x$ e $y$ .....	44
Figura 2.16 – Forças nas armaduras na direção $\beta$ e decomposição em $x$ e $y$ .....	45
Figura 2.17 – Forças nas armaduras na direção $\alpha$ e $\beta$ e direção $\chi$ qualquer .....	49
Figura 2.18 – Decomposição de $f_{s\beta}$ segundo a direção $\chi$ .....	49
Figura 2.19 – Representação gráfica de $a_{s\alpha}$ , $a_{s\beta}$ , $f_{s\chi 1}$ e $f_{s\chi 2}$ .....	50
Figura 2.20 – Representação gráfica de $\tan(2\chi_1) = \tan(2\chi_2)$ .....	50
Figura 2.21 – Fluxograma do processo de determinação da relação mínima entre armaduras nas direções $\beta$ e $\alpha$ .....	52
Figura 2.22 – Fluxograma do processo de determinação dos fatores $k$ de majoração da armadura .....	53
Figura 2.23 – Fatores de majoração da armadura calculada em função do ângulo entre as armaduras .....	54
Figura 2.24 – Fluxograma do processo de verificação da força mínima $f_s$ , mín na direção $\chi$ 2 e determinação da armadura secundária mínima .....	55
Figura 2.25 – Taxas de armaduras mínimas para $f_{ck} \leq 30 \text{MPa}$ .....	55

Figura 2.26 – Fluxograma do processo de determinação da taxa mínima de armadura secundária em função da armadura principal .....	56
Figura 2.27 – Elemento laminar sujeito à $F_{xz}$ e $F_{yz}$ .....	57
Figura 2.28 – Equilíbrio das forças transversais (planta) .....	57
Figura 2.29 – Equilíbrio das forças transversais (vista espacial) .....	58
Figura 2.30 – Interseção do plano $\theta$ com o elemento (planta) .....	59
Figura 2.31 – Círculo de Tales para as forças cortantes .....	59
Figura 2.32 – Modelo com todos os bordos apoiados .....	60
Figura 2.33 – Nós estudados no modelo com todos os bordos apoiados .....	60
Figura 2.34 – Resultados da análise, cortantes transversais máximos e suas respectivas direções para a laje retangular apoiada nos 4 bordos .....	61
Figura 2.35 – Representação gráfica das direções dos cortantes máximos para a laje retangular apoiada nos 4 bordos .....	61
Figura 2.36 – Modelo com apoios apenas ao longo da maior direção da laje .....	62
Figura 2.37 – Resultados da análise, e cortantes transversais máximos e suas respectivas direções para uma laje retangular apoiada apenas nos bordos maiores .....	62
Figura 2.38 – Representação gráfica das direções dos cortantes máximos para uma laje retangular apoiada apenas nos bordos maiores .....	63
Figura 2.39 – Acréscimo de forças nas direções x e y das chapas extremas .....	64
Figura 3.1 – Seção transversal típica das pontes 1 a 4 .....	68
Figura 3.2 – Modelo 1 ( $L=10,40\text{m}$ , $e=0^\circ$ ) .....	68
Figura 3.3 – Modelo 2 ( $L=10,40\text{m}$ , $e=15^\circ$ ) .....	68
Figura 3.4 – Modelo 3 ( $L=10,40\text{m}$ , $e=30^\circ$ ) .....	69
Figura 3.5 – Modelo 4 ( $L=10,40\text{m}$ , $e=45^\circ$ ) .....	69
Figura 3.6 – Trem tipo simplificado em planta .....	71
Figura 3.7 – Posicionamentos pré-definidos do veículo-tipo .....	72
Figura 3.8 – Projeção do contato da roda com a pavimentação na superfície média da laje ...	73
Figura 3.9 – Posicionamento dos aparelhos de apoio na laje .....	74
Figura 3.10 – Diagrama de $M_x$ (kN.m/m) devido ao peso próprio estrutural para o modelo original .....	75
Figura 3.11 – Diagrama de $M_x$ (kN.m/m) devido ao peso próprio estrutural para o modelo simulando junta seca .....	75
Figura 3.12 – Diagrama de $M_x$ (kN.m/m) devido ao peso próprio estrutural para o modelo simulando a utilização de neoprenes .....	75
Figura 3.13 – Pontos escolhidos para o dimensionamento .....	76
Figura 3.14 – Variação da direção do cortante principal de dimensionamento nos Modelos 1 a 4 .....	80
Figura 3.15 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 1 ( $e=0^\circ$ ) .....	83
Figura 3.16 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 2 ( $e=15^\circ$ ) .....	84
Figura 3.17 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 3 ( $e=30^\circ$ ) .....	84
Figura 3.18 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 4 ( $e=45^\circ$ ) .....	85
Figura 3.19 – Resultados para $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=0^\circ$ .....	85
Figura 3.20 – Resultados para $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=15^\circ$ .....	86
Figura 3.21 – Resultados para $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=30^\circ$ .....	86
Figura 3.22 – Resultados para $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=45^\circ$ .....	87
Figura 3.23 – Resultados para $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=0^\circ$ .....	87
Figura 3.24 – Resultados para $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=15^\circ$ .....	88
Figura 3.25 – Resultados para $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=30^\circ$ .....	88
Figura 3.26 – Resultados para $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ e $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ , com $e=45^\circ$ .....	89
Figura 3.27 – Resultados para $f_{s\alpha, \text{inf}, \text{máx}}$ e $a_{s\alpha, \text{inf}, \text{máx}}$ , com $e=0^\circ$ .....	89

Figura 3.28 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	90
Figura 3.29 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	90
Figura 3.30 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	91
Figura 3.31 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	91
Figura 3.32 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	92
Figura 3.33 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	92
Figura 3.34 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	93
Figura 3.35 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	93
Figura 3.36 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	94
Figura 3.37 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	94
Figura 3.38 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	95
Figura 3.39 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	95
Figura 3.40 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	96
Figura 3.41 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	96
Figura 3.42 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	97
Figura 3.43 – Diagramas de $M_x$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	100
Figura 3.44 – Diagramas de $M_y$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	100
Figura 3.45 – Diagramas de $M_{xy}$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	100
Figura 3.46 – Diagramas de $V_{m\acute{a}x}$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	101
Figura 3.47 – Faixas consideradas para a distribuição das armaduras longitudinais nas lajes (a) normais (b) esconsas .....	102
Figura 3.48 – Faixas consideradas para a distribuição das armaduras transversais nas lajes (a) normais (b) esconsas .....	102
Figura 3.49 – Forma típica adotada para as armaduras .....	103
Figura 3.50 – Detalhe de emendas alternadas .....	104
Figura 3.51 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=0^\circ$ .....	105
Figura 3.52 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=15^\circ$ .....	105
Figura 3.53 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=30^\circ$ .....	106
Figura 3.54 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=45^\circ$ .....	106
Figura 3.55 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=0^\circ$ .....	107
Figura 3.56 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=15^\circ$ .....	107
Figura 3.57 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=30^\circ$ .....	108
Figura 3.58 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=45^\circ$ .....	108
Figura 3.59 – Seção transversal típica das pontes 5 a 8 .....	110
Figura 3.60 – Modelo 5 (L=10,40m, $e=0^\circ$ com vigas invertidas) .....	110
Figura 3.61 – Modelo 6 (L=10,40m, $e=15^\circ$ com vigas invertidas) .....	111
Figura 3.62 – Modelo 7 (L=10,40m, $e=30^\circ$ com vigas invertidas) .....	111
Figura 3.63 – Modelo 8 (L=10,40m, $e=45^\circ$ com vigas invertidas) .....	111
Figura 3.64 – Variação da direção do cortante principal de dimensionamento nos Modelos 5 a 8 .....	113
Figura 3.65 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente nomodelo 5 ( $e=0^\circ$ ) .....	115
Figura 3.66 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente nomodelo 6 ( $e=15^\circ$ ) .....	115
Figura 3.67 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente nomodelo 7 ( $e=30^\circ$ ) .....	116
Figura 3.68 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente nomodelo 8 ( $e=45^\circ$ ) .....	116
Figura 3.69 – Resultados para $f_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ , com $e=0^\circ$ .....	117
Figura 3.70 – Resultados para $f_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	117

Figura 3.71 – Resultados para $f_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	118
Figura 3.72 – Resultados para $f_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,sup,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	118
Figura 3.73 – Resultados para $f_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	119
Figura 3.74 – Resultados para $f_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	119
Figura 3.75 – Resultados para $f_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	120
Figura 3.76 – Resultados para $f_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	120
Figura 3.77 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	121
Figura 3.78 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	121
Figura 3.79 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	122
Figura 3.80 – Resultados para $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	122
Figura 3.81 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	123
Figura 3.82 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	123
Figura 3.83 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	124
Figura 3.84 – Resultados para $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ e $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	124
Figura 3.85 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	125
Figura 3.86 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	125
Figura 3.87 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	126
Figura 3.88 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	126
Figura 3.89 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=0^\circ$ .....	127
Figura 3.90 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=15^\circ$ .....	127
Figura 3.91 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=30^\circ$ .....	128
Figura 3.92 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , $come=45^\circ$ .....	128
Figura 3.93 – Diagramas de $M_x$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	131
Figura 3.94 – Diagramas de $M_y$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	131
Figura 3.95 – Diagramas de $M_{xy}$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	132
Figura 3.96 – Diagramas de $F_x$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	132
Figura 3.97 – Diagramas de $F_y$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	132
Figura 3.98 – Diagramas de $F_{xy}$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	133
Figura 3.99 – Diagramas de $V_{m\acute{a}x}$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de escondidade (a) $e=0^\circ$ e (b) $e=30^\circ$ .....	133
Figura 3.100 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=0^\circ$ .....	135
Figura 3.101 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=15^\circ$ .....	136
Figura 3.102 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=30^\circ$ .....	136
Figura 3.103 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\alpha$ , $come=45^\circ$ .....	137
Figura 3.104 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=0^\circ$ .....	137
Figura 3.105 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=15^\circ$ .....	138
Figura 3.106 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=30^\circ$ .....	138
Figura 3.107 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção $\beta$ , $come=45^\circ$ .....	139
Figura 3.108 – Seção transversal dos tabuleiros.....	140
Figura 3.109 – Seção transversal das vigas .....	140
Figura 3.110 – Aparelho de apoio de neoprene fretado .....	141
Figura 3.111 – Ponte com $e=0^\circ$ em planta .....	141
Figura 3.112 – Pontes esconsas em planta .....	142
Figura 3.113 – Posição 1 parao veículo-tipo .....	144

Figura 3.114 – Posição 2 para o veículo-tipo .....	144
Figura 3.115 – Posição 3 para o veículo-tipo .....	144
Figura 3.116 – Posição 4 para o veículo-tipo .....	145
Figura 3.117 – Posição 5 para o veículo-tipo .....	145
Figura 3.118 – Posição 6 para o veículo-tipo .....	145
Figura 3.119 – Pontos 1 a 6 escolhidos para o dimensionamento .....	146
Figura 3.120 – Pontos 7 a 12 escolhidos para o dimensionamento .....	146
Figura 3.121 – Posicionamento das cargas para determinação do cortante solicitante máximo e da largura $b_w$ .....	148
Figura 3.122 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=0^\circ$ .....	150
Figura 3.123 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=15^\circ$ .....	150
Figura 3.124 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=30^\circ$ .....	150
Figura 3.125 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=45^\circ$ .....	151
Figura 3.126 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=0^\circ$ .....	151
Figura 3.127 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=15^\circ$ .....	151
Figura 3.128 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=30^\circ$ .....	152
Figura 3.129 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=45^\circ$ .....	152
Figura 3.130 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=0^\circ$ .....	152
Figura 3.131 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=15^\circ$ .....	153
Figura 3.132 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=30^\circ$ .....	153
Figura 3.133 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=45^\circ$ .....	153
Figura 3.134 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=0^\circ$ .....	154
Figura 3.135 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=15^\circ$ .....	154
Figura 3.136 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=30^\circ$ .....	154
Figura 3.137 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=45^\circ$ .....	155
Figura 3.138 – Resultados para $f_{c\phi,sup,máx}$ e $\sigma_{c\phi,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=0^\circ$ .....	155
Figura 3.139 – Resultados para $f_{c\phi,sup,máx}$ e $\sigma_{c\phi,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=15^\circ$ .....	155
Figura 3.140 – Resultados para $f_{c\phi,sup,máx}$ e $\sigma_{c\phi,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=30^\circ$ .....	156
Figura 3.141 – Resultados para $f_{c\phi,sup,máx}$ e $\sigma_{c\phi,sup,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=45^\circ$ .....	156
Figura 3.142 – Resultados para $f_{c\phi,inf,máx}$ e $\sigma_{c\phi,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=0^\circ$ .....	156
Figura 3.143 – Resultados para $f_{c\phi,inf,máx}$ e $\sigma_{c\phi,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=15^\circ$ .....	157
Figura 3.144 – Resultados para $f_{c\phi,inf,máx}$ e $\sigma_{c\phi,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=30^\circ$ .....	157
Figura 3.145 – Resultados para $f_{c\phi,inf,máx}$ e $\sigma_{c\phi,inf,máx}$ , $comk_c=0,3$ , $k_z=0,9$ e $e=45^\circ$ .....	157
Figura 3.146 – Espessura das chapas e braços de alavanca considerados.....	158
Figura 3.147 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=0^\circ$ .....	159
Figura 3.148 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=15^\circ$ .....	159
Figura 3.149 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=30^\circ$ .....	160
Figura 3.150 – Resultados para $f_{sa,sup,máx}$ e $a_{sa,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=45^\circ$ .....	160
Figura 3.151 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=0^\circ$ .....	160
Figura 3.152 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=15^\circ$ .....	161
Figura 3.153 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=30^\circ$ .....	161
Figura 3.154 – Resultados para $f_{s\beta,sup,máx}$ e $a_{s\beta,sup,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=45^\circ$ .....	161
Figura 3.155 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=0^\circ$ .....	162
Figura 3.156 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=15^\circ$ .....	162
Figura 3.157 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=30^\circ$ .....	162
Figura 3.158 – Resultados para $f_{sa,inf,máx}$ e $a_{sa,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=45^\circ$ .....	163
Figura 3.159 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=0^\circ$ .....	163
Figura 3.160 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=15^\circ$ .....	163
Figura 3.161 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=30^\circ$ .....	164
Figura 3.162 – Resultados para $f_{s\beta,inf,máx}$ e $a_{s\beta,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e $e=45^\circ$ .....	164

Figura 3.163 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=0° .....	164
Figura 3.164 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=15° .....	165
Figura 3.165 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=30° .....	165
Figura 3.166 – Resultados para $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=45° .....	165
Figura 3.167 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=0° .....	166
Figura 3.168 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=15° .....	166
Figura 3.169 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=30° .....	166
Figura 3.170 – Resultados para $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ e $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 ee=45° .....	167
Figura 3.171 – Diagramas de $M_x$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a) e=0° e (b) e=30° .....	170
Figura 3.172 – Diagramas de $M_y$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a) e=0° e (b) e=30° .....	170
Figura 3.174 – Diagramas de $F_x$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a) e=0° e (b) e=30° .....	171
Figura 3.175 – Diagramas de $F_y$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a) e=0° e (b) e=30° .....	172
Figura 3.176 – Diagramas de $F_{xy}$ devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a) e=0° e (b) e=30° .....	172
Figura 3.177 – Forma típica adotada para as armaduras (a) em planta, e (b) em corte transversal segundo a esconsidade .....	174
Figura 3.178 – Detalhamento esquemático das armaduras com e=0° .....	175
Figura 3.179 – Detalhamento esquemático das armaduras com e=15° .....	176
Figura 3.180 – Detalhamento esquemático das armaduras com e=30° .....	176
Figura 3.181 – Detalhamento esquemático das armaduras com e=45° .....	177

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Equações de dimensionamento para uma chapa fissurada de concreto armado com duas camadas de armaduras ortogonais .....	43
Tabela 2.2 – Equações de dimensionamento de uma chapa fissurada de concreto armado com duas camadas de armaduras em direções quaisquer .....	48
Tabela 2.3 – Armadura secundária mínima para diferentes ângulos entre armaduras .....	51
Tabela 2.4 – Fatores de majoração da armadura calculada para diversos ângulos entre armaduras.....	53
Tabela 2.5 – Taxa geométrica mínima de armadura para diversos ângulos de esconsidade....	56
Tabela 3.1 – Coeficientes de ponderação para as combinações últimas .....	77
Tabela 3.2 – Combinações utilizadas no dimensionamento de cada ponto escolhido .....	77
Tabela 3.3 – Raios de dobramento, comprimento dos arcos, comprimento das emendas e peso por metro das barras de aço, por bitola.....	104
Tabela 3.4 – Peso total e taxas de aço para pontes em laje sem vigas laterais.....	109
Tabela 3.5 – Peso total e taxas de aço para pontes em laje com vigas laterais .....	134
Tabela 3.6 – Raios de dobramento, comprimento dos arcos, comprimento das emendas e peso por metro das barras de aço, por bitola.....	175

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS ROMANAS

- $A_c$  – área de concreto da seção  
 $A_{sw}$  – área da seção transversal dos estribos de força cortante  
 $a_{sx}$  – área de aço no plano do elemento na direção x  
 $a_{sy}$  – área de aço no plano do elemento na direção y  
 $a_{s\alpha}$  – área de aço no plano do elemento na direção  $\alpha$   
 $a_{s\beta}$  – área de aço no plano do elemento na direção  $\beta$   
 $b_w$  – largura da seção  
CIA – coeficiente de impacto adicional  
CIV – coeficiente de impacto vertical  
CNF – coeficiente de número de faixas  
d – altura útil  
 $d_x$  – altura útil na direção x  
 $d_y$  – altura útil na direção y  
e – esconidade  
 $E_{cs}$  – módulo de deformação secante do concreto  
 $f_c$  – força no concreto  
 $f_{ck}$  – resistência característica do concreto à compressão  
 $f_{ctd}$  – resistência de projeto do concreto à tração  
 $f_{ctk,inf}$  – resistênciacaracterística inferior do concreto à tração  
 $f_{ctk,sup}$  – resistênciacaracterística superior do concreto à tração  
 $f_{ct,m}$  – resistênciacaracterística média do concreto à tração  
 $f_{c\phi}$  – força no concreto na direção das microfissuras  $\phi$   
 $F_d$  – sollicitação de projeto  
 $F_{Gk}$  – sollicitação característica devido às ações permanentes  
 $f_I$  – força principal máxima na chapa  
 $f_{II}$  – força principal mínima na chapa  
 $F_{mult.}$  – sollicitação devido às cargas de multidão  
 $F_{Qk}$  – sollicitação característica devido às ações variáveis  
 $f_{sx}$  – força no aço, no plano do elemento, na direção x  
 $f_{sy}$  – força no aço, no plano do elemento, na direção y  
 $f_{s\alpha}$  – força no aço na direção  $\alpha$   
 $f_{s\beta}$  – força no aço na direção  $\beta$   
 $f_{s\chi}$  – resultante das forças no aço, segundo a direção  $\chi$   
 $f_{s\chi 1}$  – resultante máxima das forças no aço, segundo a direção  $\chi_1$   
 $f_{s\chi 2}$  – resultante mínima das forças no aço, segundo a direção  $\chi_2$   
 $F_{veic.}$  – sollicitação devido às cargas do veículo-tipo  
 $F_x$  – sollicitação normal na face x do elemento laminar  
 $f_x$  – sollicitação normal na face x da chapa  
 $F_{xy}$  – sollicitação tangencial, na face x do elemento laminar, na direção y  
 $f_{xy}$  – sollicitação tangencial, na face x da chapa, na direção y  
 $F_{xz}$  – sollicitação cortante, na face x do elemento laminar, na direção z  
 $F_{x\theta z}$  – sollicitação tangencial, na face x de um plano inclinado de  $\theta$  do elemento laminar, na direção z  
 $F_y$  – sollicitação normal na face y do elemento laminar  
 $f_y$  – sollicitação normal na face y da chapa ou tensão de escoamento do aço  
 $f_{yd}$  – tensão de escoamento de projeto do aço

$f_{ywd}$  – tensão na armadura transversal passiva  
 $F_{yz}$  – sollicitação tangencial, na face y do elemento laminar, na direção z  
 $F_{y\theta z}$  – sollicitação tangencial, na face y de um plano inclinado de  $\theta$  do elemento laminar, na direção z  
 $G$  – módulo de elasticidade transversal  
 $g_{NJ}$  – carga devido ao peso próprio da barreira New Jersey  
 $g_{pav}$  – carga devido ao peso próprio pavimentação  
 $g_{rec}$  – carga devido ao recapeamento  
 $h$  – altura ou espessura do elemento laminar  
 $h_{borr}$  – altura das camadas de borracha de um aparelho de apoio de neoprene fretado  
 $h_{laje}$  – altura da laje  
 $h_{pav}$  – altura da pavimentação  
 $k$  – fator de minoração da resistência do concreto à compressão, devido à tração transversal e às cargas de longa duração, ou fator de majoração das armaduras  
 $k_c$  – coeficiente que determina a espessura das chapas em função da altura útil  
 $K_{neop}$  – rigidez dos aparelhos de apoio de neoprene fretado  
 $k_z$  – coeficiente que determina o braço de alavanca médio em função da altura útil  
 $L$  – comprimento  
 $L_L$  – dimensão longitudinal da projeção da roda do veículo tipo na superfície média da laje  
 $L_T$  – dimensão transversal da projeção da roda do veículo tipo na superfície média da laje  
 $M_d$  – momento fletor de dimensionamento  
 $M_x$  – momento fletor em torno do eixo y de um elemento laminar  
 $M_{xy}$  – momento volvente em um elemento laminar  
 $M_y$  – momento fletor em torno do eixo x de um elemento laminar  
 $P$  – peso de uma roda do veículo-tipo  
 $q$  – carga de multidão  
 $Q$  – carga distribuída referente ao peso de uma roda do veículo-tipo  
 $R$  – raio  
 $r_\beta$  – relação entre as armaduras nas direções  $\beta$  e  $\alpha$   
 $r_\chi$  – relação entre as armaduras nas direções  $\chi$  e  $\alpha$   
 $S$  – área  
 $S_{NJ}$  – área da seção transversal da barreira New Jersey  
 $t_c$  – espessura das chapas  
 $t_{c,i}$  – espessura da chapa inferior  
 $t_{c,s}$  – espessura da chapa superior  
 $V_C$  – parcela da força cortante resistida por mecanismos complementares ao modelo em treliça  
 $V_g$  – força cortante devido às cargas permanentes  
 $V_{Rd1}$  – força cortante resistente de cálculo, relativo a elementos sem armadura para força cortante  
 $V_{Rd2}$  – força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto  
 $V_{Sd}$  – força cortante solicitante de cálculo  
 $V_{sw}$  – parcela da força cortante resistida pela armadura transversal  
 $V_{VT}$  – força cortante devido ao peso do veículo tipo  
 $W_0$  – módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada  
 $z_m$  – braço de alavanca médio entre as chapas extremas  
 $z_{m,flex}$  – braço de alavanca médio entre as chapas extremas, para a flexão  
 $z_{m,volv}$  – braço de alavanca médio entre as chapas extremas, para o momento volvente

## LETRAS GREGAS

- $\alpha$  – ângulo entre a direção da solicitação  $f_x$  e uma das camadas de armadura
- $\beta$  – ângulo entre a direção da solicitação  $f_x$  e a outra camada de armadura
- $\gamma_c$  – coeficiente de ponderação da resistência do concreto no estado-limite último
- $\gamma_{conc}$  – peso específico do concreto
- $\gamma_{pav}$  – peso específico da pavimentação
- $\gamma_s$  – coeficiente de ponderação da resistência do aço no estado-limite último
- $\Delta F_x$  – variação da força normal na face x do elemento laminar, devido ao cortante transversal
- $\Delta F_{xy}$  – variação da força tangencial no plano do elemento laminar, devido ao cortante transversal
- $\Delta F_{x\theta}$  – variação da força normal na face x, de um plano inclinado de  $\theta$ , do elemento laminar, devido ao cortante transversal
- $\Delta F_y$  – variação da força normal na face y do elemento laminar, devido ao cortante transversal
- $\theta$  – ângulo de inclinação do plano no qual o cortante principal se desenvolve
- $\rho$  – taxa geométrica de armadura
- $\rho_x$  – taxa geométrica de armadura na direção x
- $\rho_y$  – taxa geométrica de armadura na direção y
- $\rho_\theta$  – taxa geométrica de armadura na direção  $\theta$
- $\sigma_c$  – tensão normal no concreto
- $\sigma_{cp}$  – tensão normal no concreto devido à protensão ou força normal solicitante na seção
- $\tau_{Rd}$  – tensão de cisalhamento resistente de cálculo
- $\phi$  – ângulo de inclinação das bielas na teoria clássica de cisalhamento, ou diâmetro da barra de aço
- $\varphi$  – ângulo de inclinação das microfissuras do concreto
- $\chi_1$  – direção da força resultante máxima das armaduras no plano da chapa
- $\chi_2$  – direção da força resultante m das armaduras no plano da chapa
- $\psi_0$  – fator de combinação das ações

## INTRODUÇÃO

### 1.1.RELEVÂNCIA DA PESQUISA

A utilização de elementos laminares de concreto com geometria esconsa é de uso corrente na engenharia, notadamente, nos projetos de obras de arte e nas estruturas especiais. A travessia perpendicular (Figura 1.1) é a solução usualmente adotada, nas obras especiais, pois conduz à utilização de elementos ortogonais e simplifica o projeto, o detalhamento e a execução. No entanto, nem sempre essa solução é possível.



Figura 1.1 – Viaduto de Samambaia na DF-180 sobre a BR 060 (Google Earth, 2014)

No passado, quando os recursos computacionais de análise e dimensionamento estrutural eram escassos, havia a preocupação dos projetistas de estradas em adequar o traçado geométrico às travessias perpendiculares. As estruturas esconsas eram adotadas somente quando a alteração do traçado não fosse possível (Figura 1.2). Atualmente, essa solução é adotada, com mais frequência, especialmente nas vias urbanas, onde o espaço físico é mais limitado (Figura 1.3).



Figura 1.2 – Ponte rodoviária na RJ 158 (Google Earth, 2014)

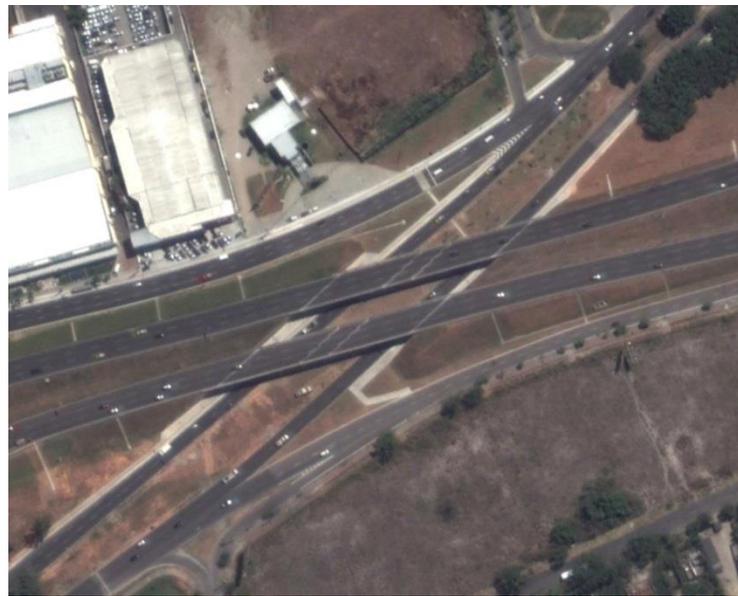


Figura 1.3 – Viadutos sobre a Av. Salvador Allende (Google Earth, 2014)

A Figura 1.4, adiante, apresenta a forma em planta de um pontilhão em uma rodovia de duas vias. A via transposta é escavada em rocha e, devido a condicionantes não pertinentes ao estudo, cruza a rodovia de forma esconsa.

A Figura 1.5 mostra a seção transversal da via inferior, que acomoda pista para um veículo e um passeio. O vão livre necessário no sentido perpendicular ao eixo da via transposta é de 12,5m. Devido à largura da rodovia, a travessia ortogonal, segundo o eixo da via superior, demandaria um vão livre de aproximadamente 22m. Além do maior consumo de materiais, o vão de 22m excederia o limite usual da solução em laje de concreto armado. A utilização de vigas de maior altura implicaria maior volume de escavação em rocha, para a execução da via inferior e atendimento ao gabarito vertical, com conseqüente aumento de custo. Dessa forma, a solução natural é a opção por um pontilhão em laje conforme a

escondidade da travessia. As armaduras são usualmente detalhadas de acordo com a escondidade das formas e são apresentadas na Figura 1.6.

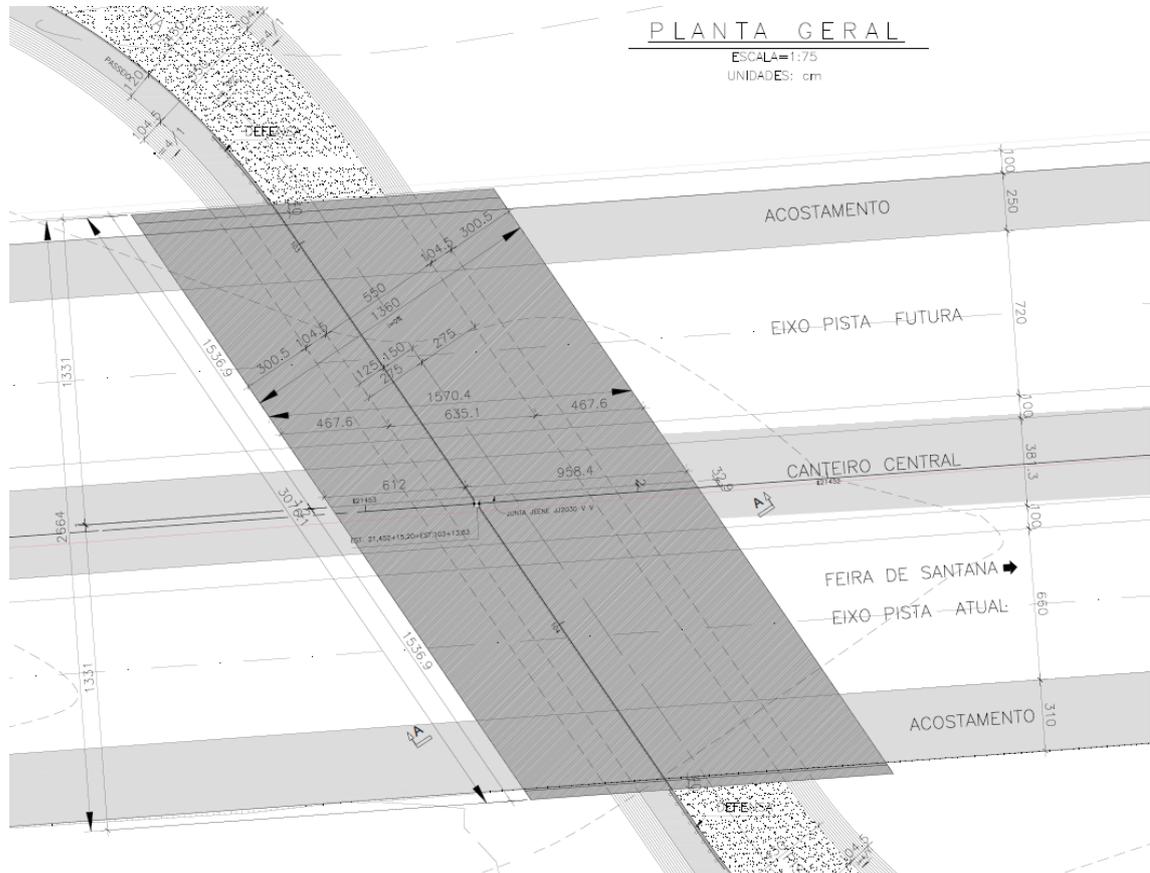


Figura 1.4 – Pontilhão rodoviário esconso em planta

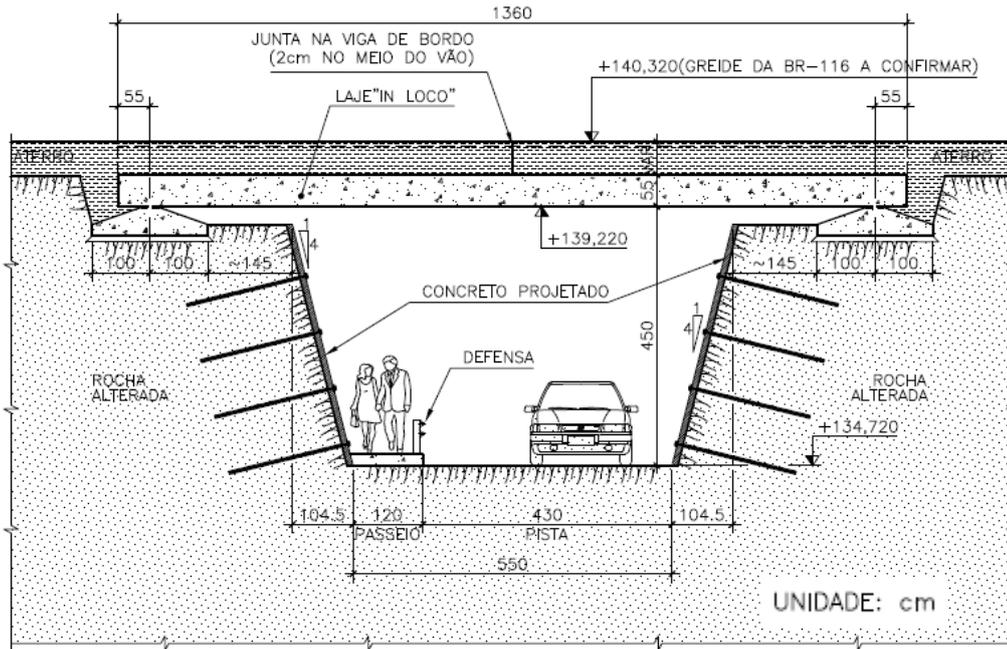


Figura 1.5 – Corte transversal à via inferior e detalhes

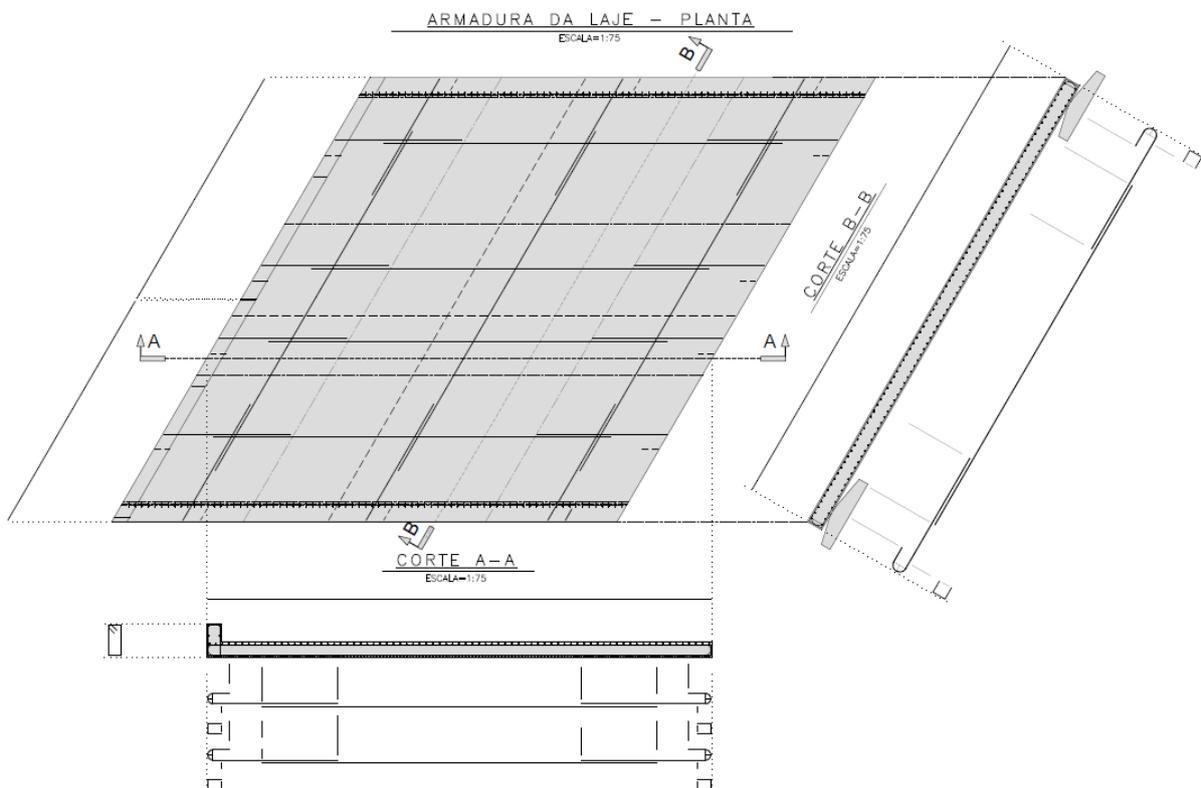


Figura 1.6 – Detalhamento esquemático do pontilhão esconso com armaduras oblíquas

Novos cruzamentos entre ferrovias e rodovias estão sendo executados, no Brasil, em função do crescente investimento no modal ferroviário. Devido não apenas às limitações de raio mínimo e rampa máxima, mas também ao fato de muitas rodovias já se encontrarem

implantadas, tais travessias se dão, de forma esconsa, na maioria dos casos. A Figura 1.7 mostra um exemplo.

Como a carga ferroviária é bastante superior à carga rodoviária, o cruzamento da rodovia sobre a ferrovia se mostra mais vantajoso, economicamente, salvo raras exceções. O sistema estrutural, amplamente utilizado nestes casos, é do tipo galeria dotada de alas. Estas estruturas, chamadas de passagens inferiores ou superiores, são de simples execução e baixo custo, quando comparadas a um viaduto, por exemplo. A Figura 1.9 detalha as formas de uma passagem inferior em elevação e planta, e a Figura 1.8 mostra as seções transversais no trecho da galeria e das alas.

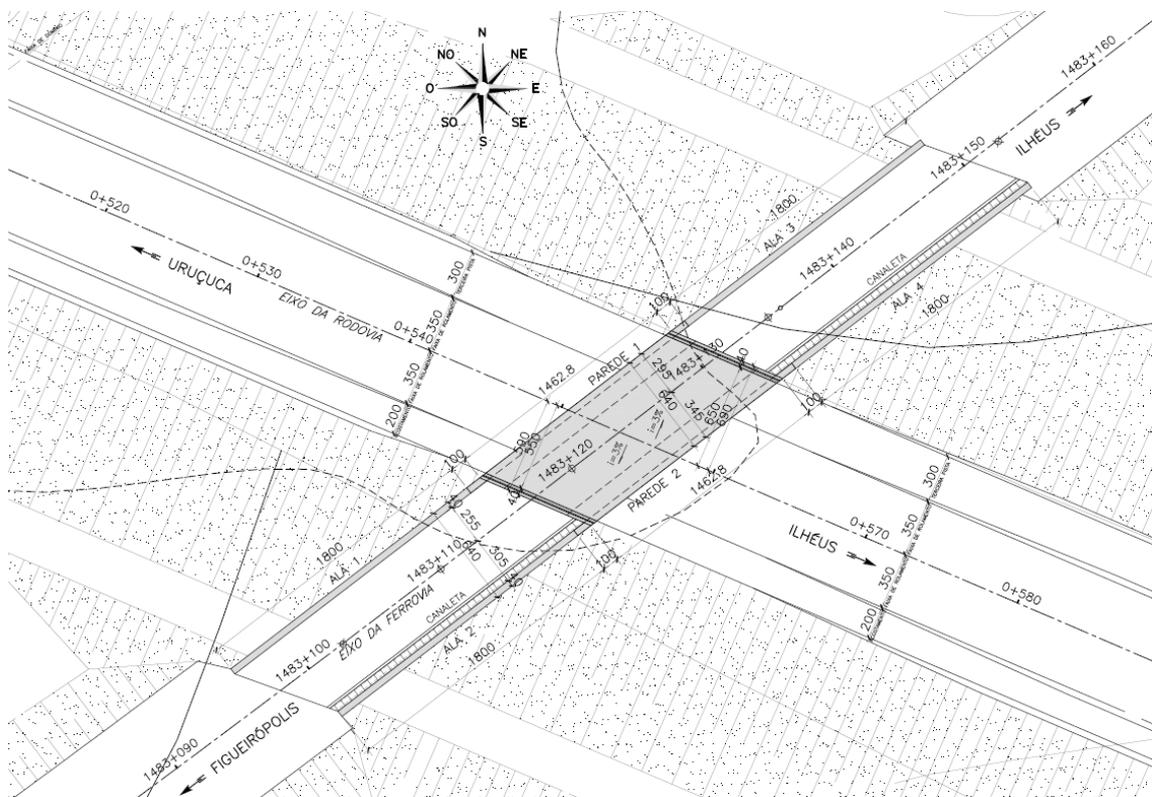


Figura 1.7 – Cruzamento esconso de uma ferrovia (SO-NE) com uma rodovia (NO-SE)

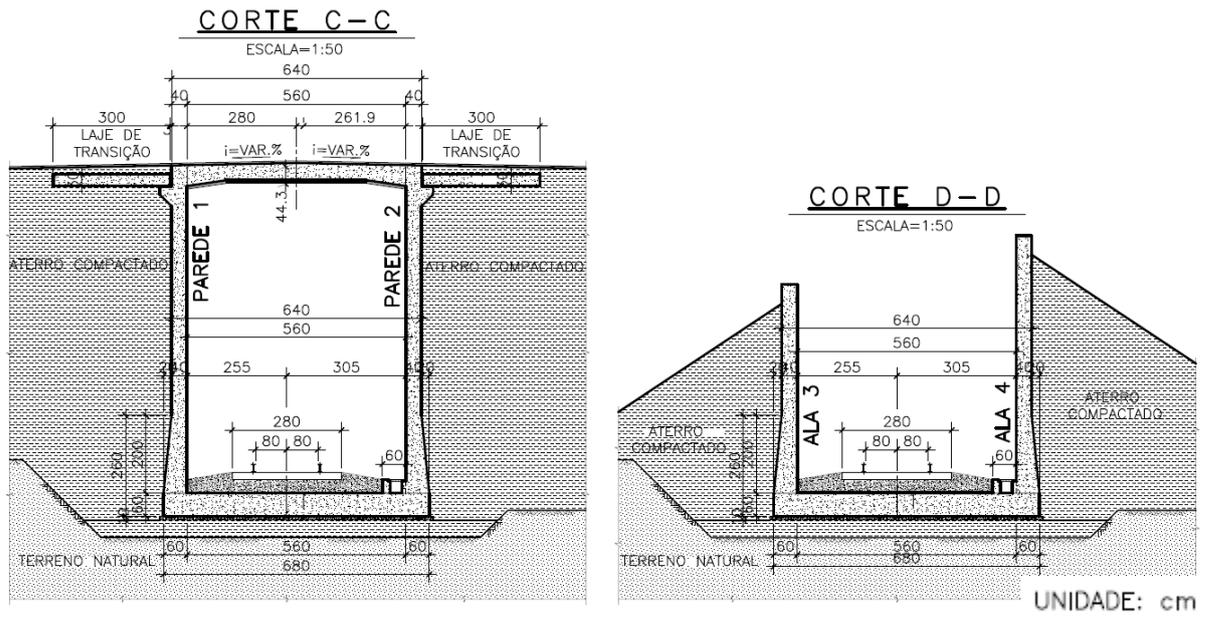


Figura 1.8 – Seções transversais da passagem inferior

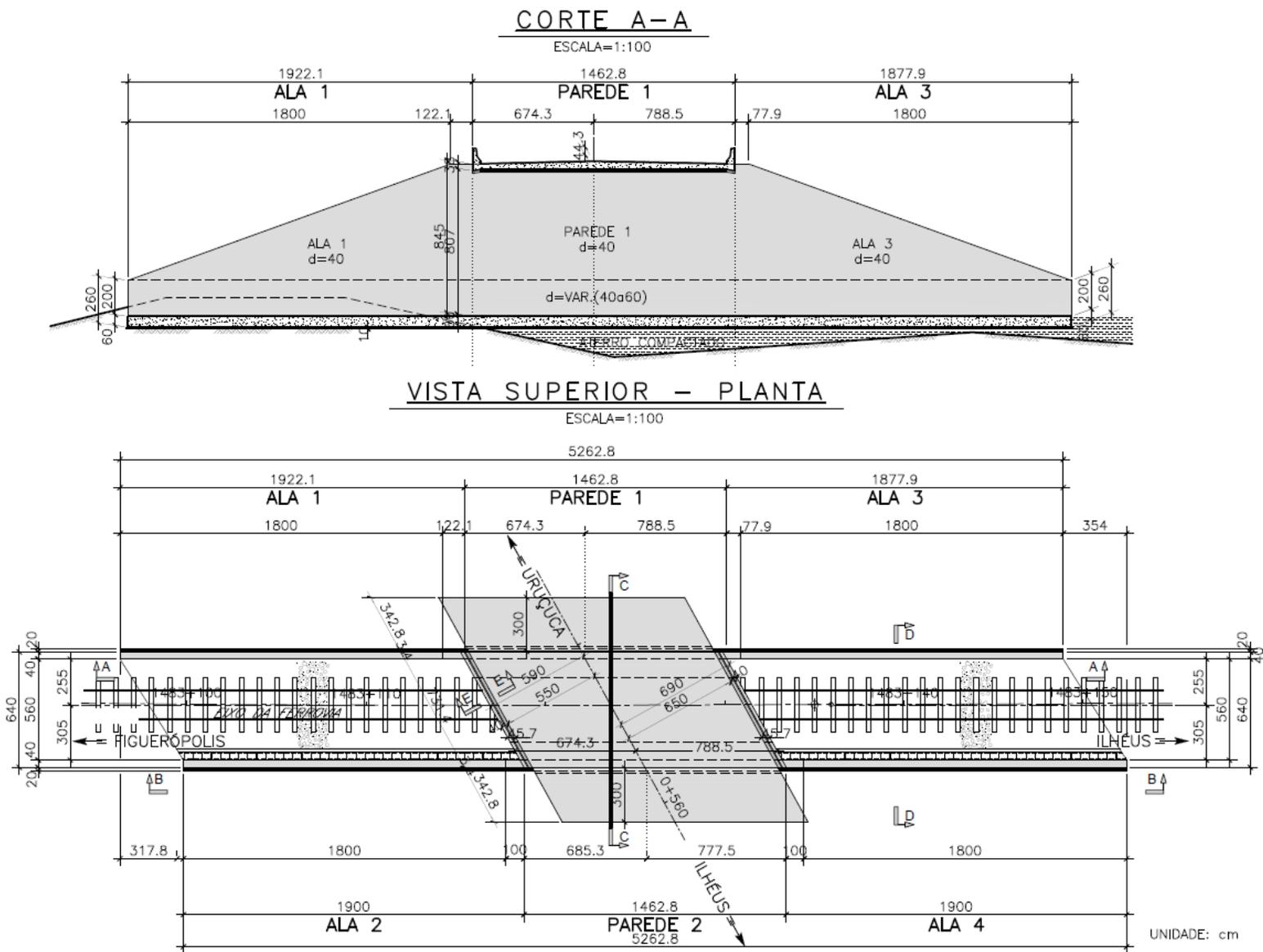


Figura 1.9 – Forma da galeria e alas em elevação e planta

O detalhamento das armaduras da laje superior frequentemente segue a esconsidade da travessa, conforme mostrado na Figura 1.10. A laje inferior, por ser mais extensa, costuma ser detalhada com armaduras perpendiculares de comprimentos variáveis ou “leques” nos extremos.

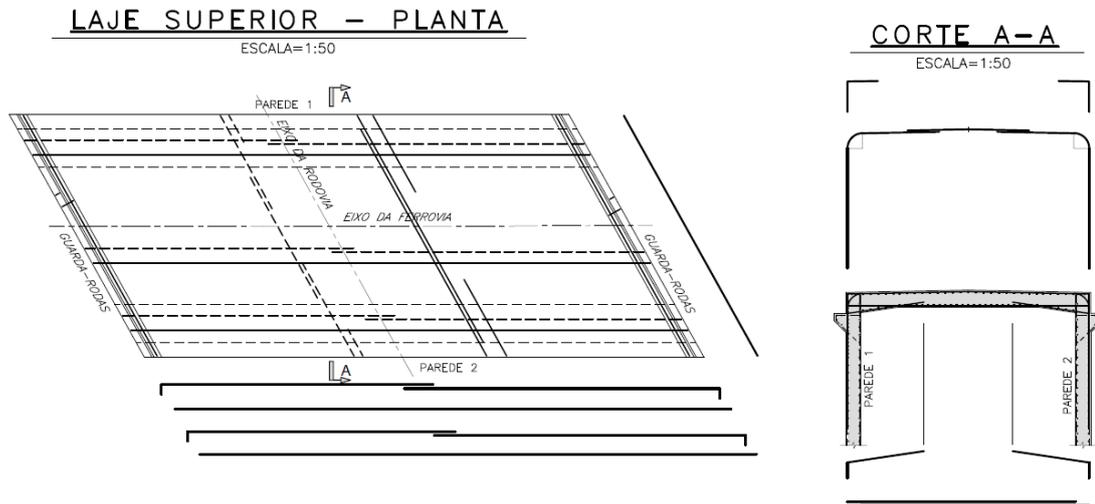


Figura 1.10 – Detalhamento esquemático das armaduras da laje superior da galeria

Outro exemplo de estrutura esconsa muito comum são as lajes de pontes e viadutos em vigas pré-moldadas, nas quais alguma condicionante conduz a uma solução esconsa. A Figura 1.11 representa as formas de um viaduto em vigas pré-moldadas. As limitações de espaço do meio urbano demandaram que este fosse projetado em conformidade com a esconsidade da via inferior, dado que uma obra ortogonal seria mais extensa e a travessa de apoio central poderia interferir no gabarito vertical da via transposta.

Em casos assim, a laje é, mais comumente, detalhada seguindo a esconsidade, como mostra a Figura 1.12.

No desenvolvimento de projetos de engenharia, diversas estruturas podem ser modeladas com a utilização de cascas e dimensionadas pelas teorias em que se baseia este trabalho.

A teoria da chapa fissurada com armaduras ortogonais é utilizada no dimensionamento de cascas, na prática, com sucesso, inclusive em programas comerciais de análise e dimensionamento estrutural. Quando, porém, a geometria da peça for esconsa, e for adotado o detalhamento de armaduras não ortogonais, a esconsidade também deverá ser considerada para a correta determinação das armaduras e da tensão no concreto.

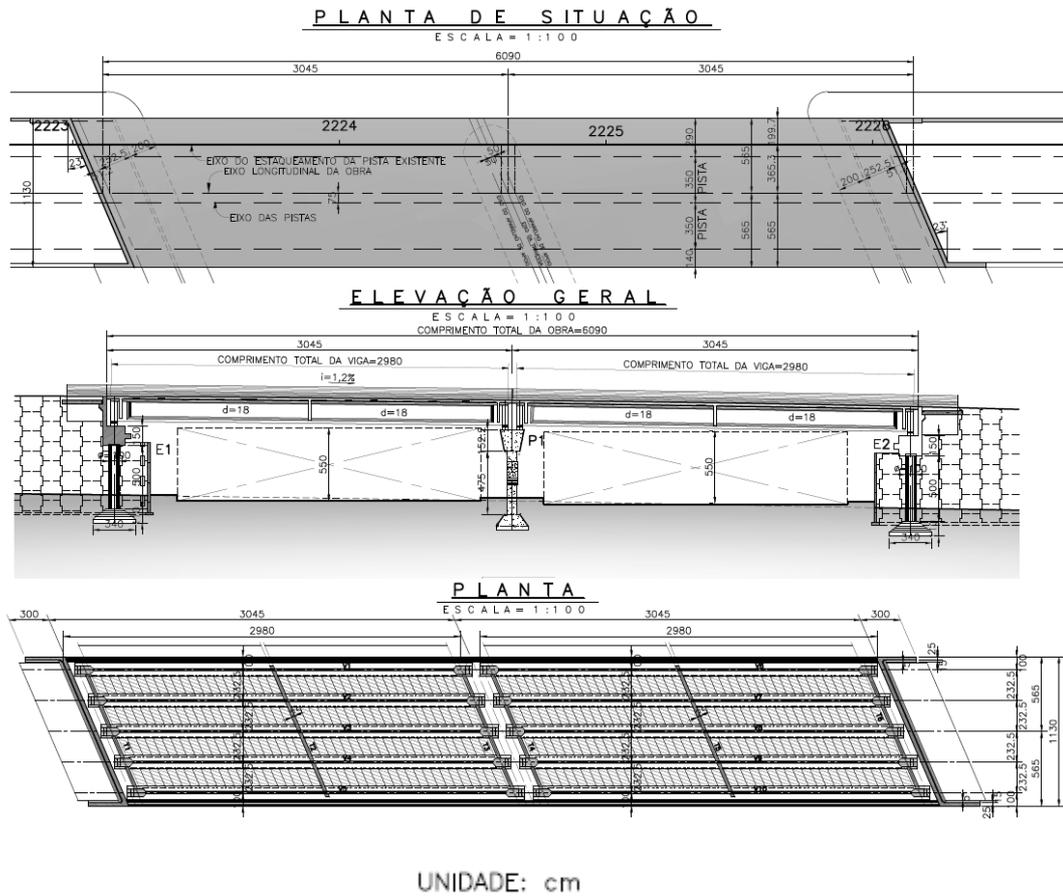


Figura 1.11 – Elevação e plantas de um viaduto rodoviário esconso

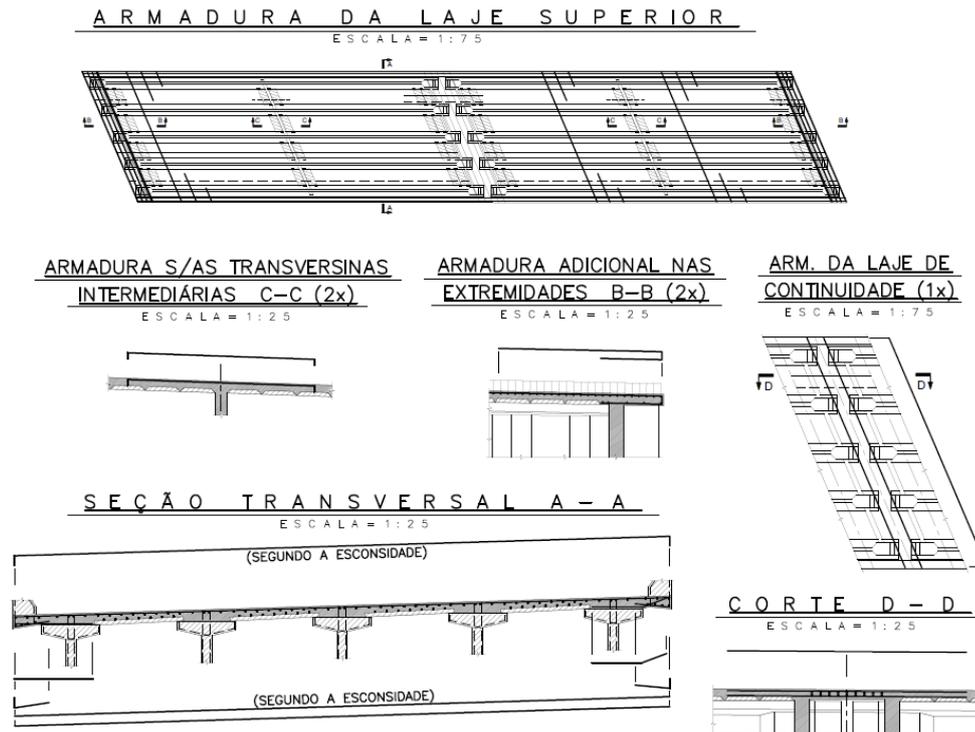


Figura 1.12 – Detalhamento das armaduras da laje de um viaduto esconso em vigas múltiplas

## 1.2.DETALHAMENTO DE ARMADURAS DE PEÇAS ESCONSAS

O detalhamento das armaduras das peças esconsas é normalmente apresentado de três formas:

- armaduras ortogonais com comprimentos variáveis;
- armaduras ortogonais com “leques” nos trechos esconsos;
- armaduras oblíquas com comprimentos constantes.

O detalhamento com a utilização de armaduras ortogonais com comprimentos variáveis, apresentado na Figura 1.13, é a opção de menor consumo de aço. Entretanto, a variação do comprimento das posições N3 e N4 dificulta o processo construtivo.

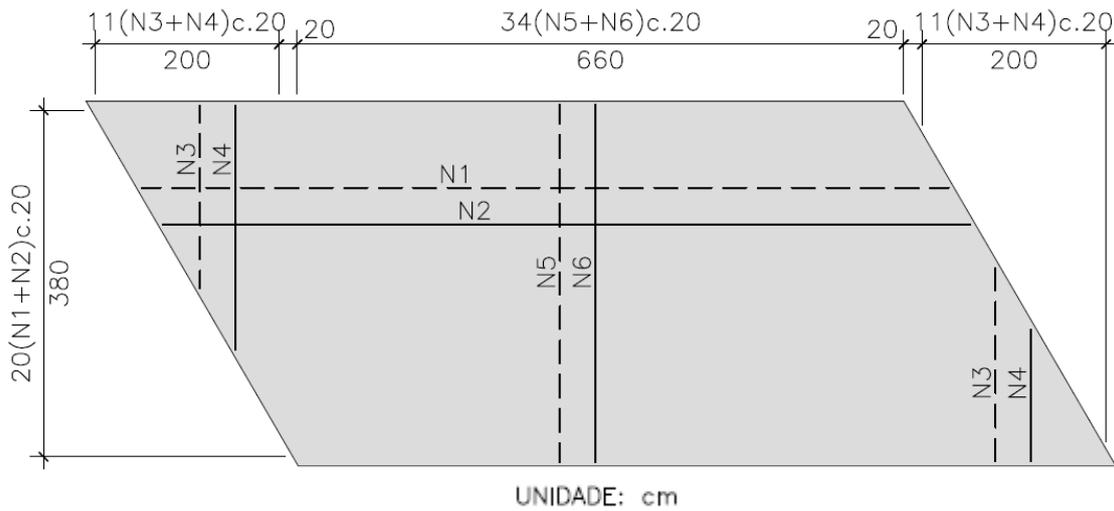


Figura 1.13 – Armadura com comprimento variável

O detalhamento com a utilização de armaduras perpendiculares e “leques” nos trechos extremos é mostrado na Figura 1.14, na qual as posições N3 e N4 apresentam novamente comprimentos variáveis. Observa-se também que a concentração de armaduras, nos núcleos dos “leques”, pode dificultar a concretagem e inviabilizar o detalhe.

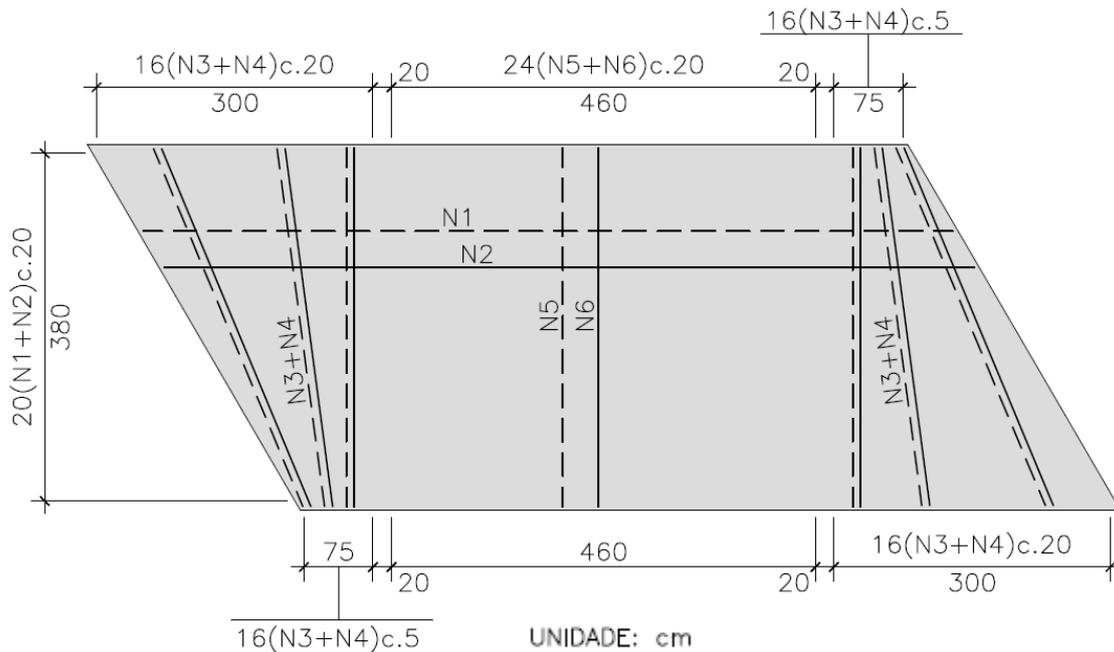


Figura 1.14 – Armadura em “leque”

Por outro lado, a solução com armaduras esconsas e comprimentos constantes, mostrada na Figura 1.15, facilita o detalhamento e a execução. Sendo assim, é a opção mais adotada, pois a otimização do processo construtivo reduz os prazos tornando a construção

mais econômica. Todavia, o dimensionamento exige verificações adicionais, porquanto as camadas de armaduras não são ortogonais nem as direções das solicitações são coincidentes com as direções das armaduras.

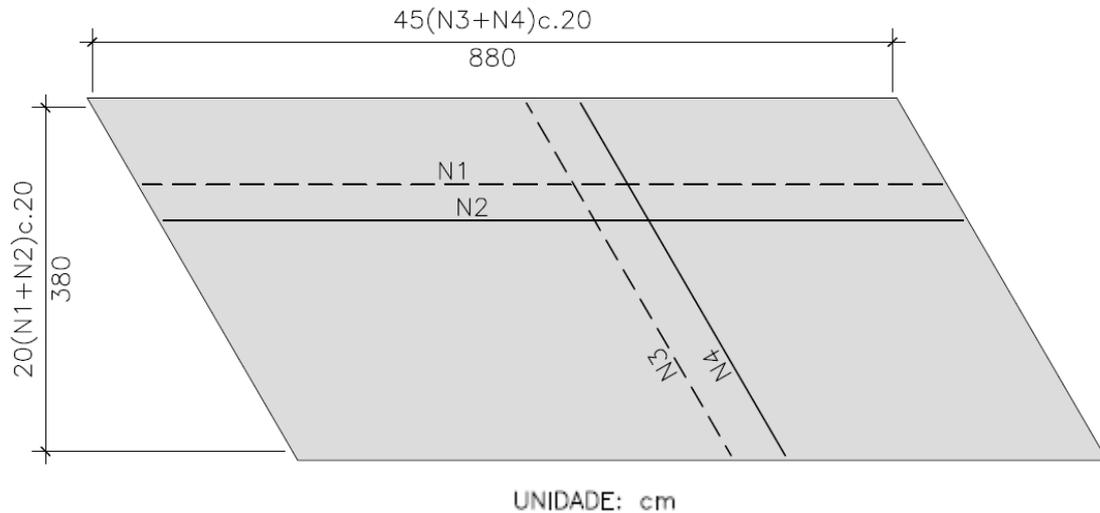


Figura 1.15 – Armadura esbelta com comprimento constante

O boletim número 141 do CEB-FIP (1982) discute uma solução com 3 camadas de armadura. Neste trabalho, estuda-se somente a solução com 2 camadas de armadura, que é a alternativa mais utilizada nas obras de arte especiais. No entanto, reconhece-se também a importância da solução em 3 camadas, que é sugerida como tema para futuras pesquisas.

### 1.3.OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é estudar a influência da esbelteza nas lajes das pontes. Para tanto, pretende-se dimensionar as armaduras e verificar as tensões no concreto com a aplicação do modelo da chapa fissurada, cujas camadas de armaduras podem ser ortogonais ou oblíquas, sem, necessariamente, coincidirem com as direções das solicitações.

### 1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho é apresentado em quatro capítulos descritos a seguir:

Capítulo I – Introdução

Neste capítulo é apresentada a relevância da pesquisa, com exposição de exemplos de situações que demandam a aplicação da teoria estudada no projeto de obras de arte especiais. É também apresentado o objetivo do trabalho.

Capítulo II – Modelo da Chapa Fissurada

Neste capítulo, inicialmente, é feita uma revisão bibliográfica da teoria do campo de compressão diagonal e são apresentadas as hipóteses básicas do modelo. Na sequência, é discutida a redução do problema do dimensionamento de lajes ao dimensionamento de chapas. Posteriormente, são explicadas as teorias da chapa fissurada para armadura ortogonal e para armadura esconsa, propostas relações mínimas entre armaduras de direções oblíquas e, finalmente, é revista a teoria de dimensionamento das cascas a solicitações transversais ao plano do elemento.

#### Capítulo III – Casos Estudados

Neste capítulo, são estudados casos de interesse prático. Os resultados da análise e do dimensionamento dos modelos propostos são comparados e comentados.

#### Capítulo IV – Conclusões

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões e as considerações finais do estudo, com sugestões para trabalhos futuros.

## 2. MODELO DA CHAPA FISSURADA

### 2.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os elementos de cascas de concreto armado estão sujeitos ao estado duplo de tensões, no caso das solicitações no próprio plano, ou ao estado triplo de tensões, quando também ocorrem solicitações na direção transversal. As camadas de armadura não necessariamente concordam com as direções principais das solicitações. Dessa forma, o conjunto completo de solicitações, atuantes no plano do elemento e fora dele, deve ser considerado na determinação das armaduras.

O modelo da chapa fissurada é utilizado não só na determinação das armaduras, no Estado Limite Último, como também na verificação das deformações e da fissuração, nos Estados Limites de Utilização.

FALCONER (1956) utiliza a teoria, para o dimensionamento do concreto, armado em duas direções, no estado duplo de tensões no plano das armaduras. A teoria considera que as tensões no concreto se desenvolvem segundo uma determinada direção. O problema é estaticamente indeterminado, pois apresenta três equações de equilíbrio para a determinação de quatro incógnitas – as armaduras nas duas direções, a tensão no concreto e a direção desta tensão. Como solução, propõe a suposição dessa direção, para obtenção das correspondentes armaduras e tensão no concreto, ou a fixação da tensão, em uma das camadas de armadura ou no concreto, para o cálculo das demais incógnitas.

NIELSEN (1964) determina equações de dimensionamento de placas ortogonais de concreto armado sujeitas às solicitações de membrana, baseado em uma abordagem plástica, considerando que o aço trabalhe, sempre, no patamar de escoamento e que o concreto resista apenas à compressão. As expressões de NIELSEN (1964) são adotadas pelo CEB-FIP, em seu boletim número 141 (1982) e são utilizadas até hoje.

Para o dimensionamento à flexão, WOOD (1968) propõe expressões práticas, que determinam momentos equivalentes, nas direções das armaduras, considerando que estas não coincidam com a direção dos momentos principais. As equações propostas são funções dos momentos em duas direções perpendiculares, do momento volvente associado, dos ângulos entre as armaduras, e de um fator  $k$ , que permite a redução da armadura em uma das direções em detrimento do aumento da armadura na outra direção. Para armaduras ortogonais, as expressões são otimizadas para a obtenção da menor área de aço total, considerando-se que os braços de alavanca, nas duas direções, são, aproximadamente, iguais, fixando-se  $k=1$ .

Nas correspondências sobre o trabalho de WOOD (1968), MILLS relata a utilização de expressões diferentes para o cálculo de armaduras esconsas, observando que aquelas apresentadas por WOOD resultam em armaduras mais econômicas. MILLS ressalta, ainda, pequenos erros na formulação para armaduras ortogonais e solicita exemplos de aplicação das expressões para armaduras oblíquas. Nessas mesmas correspondências, ARMER complementa o trabalho de WOOD, reescrevendo as expressões para armaduras esconsas, com a otimização do fator  $k$ , de forma a obterem-se as menores armaduras totais. São apresentados, também, exemplos de aplicação do método. As contribuições de MILLS e ARMER são reconhecidas por WOOD e as expressões passam a ser conhecidas como as equações de WOOD e ARMER.

Diferentemente das expressões de WOOD e ARMER, que tratam exclusivamente da flexão, BAUMANN (1972) faz o equilíbrio do elemento sujeito, simultaneamente, às solicitações de membrana, à flexão e à torção, dividindo as solicitações entre duas chapas nas faces superior e inferior do elemento. Essas chapas passam a estar solicitadas apenas aos esforços de membrana, e são dimensionadas como tal, através do método de NIELSEN (1964). As condições de compatibilidade são obtidas, minimizando-se a energia de deformação das forças resistentes.

A teoria do campo de compressão diagonal é também utilizada por MITCHEL e COLLINS (1974) para estabelecer um modelo teórico, para a avaliação da deformação após a fissuração e da carga última de elementos de concreto em torção pura. O modelo considera as condições de equilíbrio, a geometria deformada e as relações tensão-deformação do concreto e do aço.

SCHNOBRICH (1977) salienta que a análise não linear de estruturas de concreto armado, utilizando-se o método dos elementos finitos, visa à obtenção dos deslocamentos e forças, nas armaduras e no concreto, nos diversos estágios de carregamento. Dessa forma, modelos avançados, balizados por experimentos, permitem a obtenção de informações básicas e até a extrapolação de ensaios, para aplicação no dimensionamento prático.

SCHULZ (1984) apresenta uma teoria racional, para o dimensionamento de cascas de concreto armado, no Estado Limite Último, sujeitas à flexão, à torção e às solicitações no plano do elemento. No modelo, que pode ser aplicado para definir as relações constitutivas de elementos finitos laminares de concreto armado, o elemento é subdividido em diversas camadas, que podem estar fissuradas ou não, podendo ainda haver variação da direção dessas fissuras, entre as distintas camadas. As tensões no concreto e nas armaduras, que são

distribuídas de forma discreta, são calculadas por relações não lineares, considerando-se a hipótese de Bernoulli.

VECCHIO e COLLINS (1986) propõem um modelo analítico, para prever o comportamento de elementos laminares de concreto armado, sujeitos às solicitações de membrana, em que o concreto armado fissurado é tratado como um novo material, com sua própria relação tensão-deformação. São propostas tais relações para o concreto, antes e depois da fissuração, usadas, posteriormente, por POLAK e VECCHIO (1993) na formulação de um elemento finito não linear, para a análise de cascas de concreto armado, considerando-se o cortante transversal.

SCHULZ (1988) aplica a teoria da chapa fissurada, na determinação de tensões e deformações, em elementos de concreto armado, compostos por paredes esbeltas, submetidos à força normal, esforços cortantes, momentos fletores, torção de Saint-Venant, momento de torção de empenamento e bimomento.

SCHULZ e SANTISI D'AVILA (2010) investigam o efeito simultâneo das solicitações no plano e transversais às cascas de concreto armado, dividindo o elemento infinitesimal, em camadas, com comportamento triaxial.

SCHULZ e OLIVEIRA (2010) apresentam um método de dimensionamento de elementos laminares de concreto armado com armaduras esconsas, que é uma extensão do método recomendado no boletim número 141 do CEB-FIP (1982). O problema é tratado no sistema local, evitando-se, assim, a transformação para os eixos principais, o que simplifica o cálculo manual e a implementação computacional.

No presente trabalho, os procedimentos de dimensionamento de cascas, aos esforços no plano e transversais ao plano do elemento, são discutidos e aplicados a pontes esconsas de concreto armado. São analisadas pontes em lajes, com e sem vigas laterais, e lajes de pontes em vigas múltiplas, variando os ângulos de esconsidade entre  $0^\circ$  e  $45^\circ$ . São apresentadas recomendações para o dimensionamento, tais como braços de alavanca variáveis, para a redução da tensão no concreto, e critérios para armaduras mínimas. A análise comparativa dos resultados comprova a relevância da formulação e mostra que o aumento da esconsidade resulta em maiores áreas de aço e eleva as tensões no concreto, em módulo.

## 2.2.HIPÓTESES BÁSICAS

O modelo da chapa fissurada, ou teoria do campo de compressão diagonal, é baseado fundamentalmente na hipótese de que o concreto não resiste à tração. Supõe-se que as fissuras sejam uniformes e contínuas, de forma que as tensões no concreto são orientadas conforme a

continuidade do mesmo, ou seja, apenas segundo as orientações das bielas entre as microfissuras, que podem variar ao longo da peça (Figura 2.1).

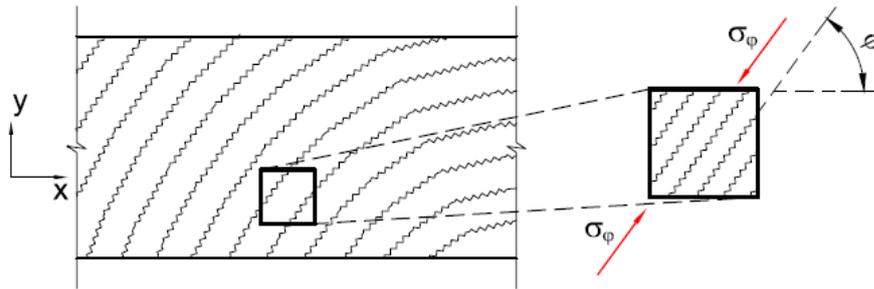


Figura 2.1 – Modelo da chapa fissurada de concreto armado (SCHULZ, 1988)

As seguintes hipóteses simplificadoras são adotadas:

- as direções das fissuras são consideradas independentemente da história do carregamento;
- não são descontadas as áreas de concreto ocupadas pelas armaduras;
- é desprezada a contribuição das armaduras comprimidas na determinação da capacidade resistente das chapas;
- são desprezados o engrenamento entre as fissuras e o encavilhamento das armaduras (Figura 2.2).

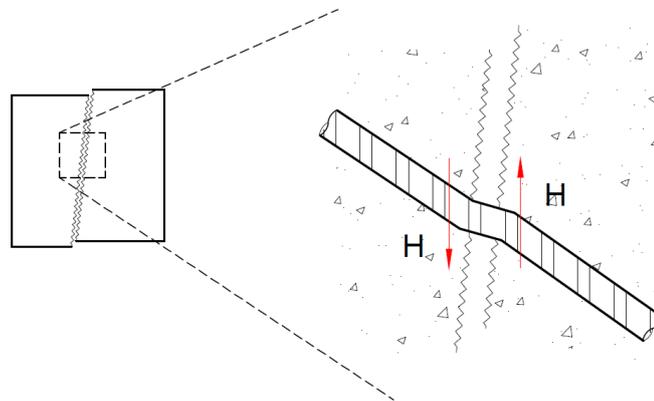


Figura 2.2 – Encavilhamento das armaduras

Segundo GUPTA (1984), experimentos promovidos na Cornell University e na Portland Cement Association (PCA) em 1980 e 1981 demonstraram que fissuras pré-existent não são críticas na determinação da capacidade resistente das chapas.

A redução da resistência à compressão do concreto é considerada por um fator de redução global  $k=0,6$ , conforme recomendado no Eurocode 2 (2004), correspondente à

superposição do efeito Rüsçh (0,85) e da redução da resistência à compressão devido à armadura transversal tracionada (0,7), estudada por ROBINSON E DEMORIEUX (1972).

### 2.3. REDUÇÃO DO PROBLEMA GERAL AO DIMENSIONAMENTO DE CHAPAS

Um elemento laminar pode estar sujeito a 6 (seis) solicitações por unidade de comprimento em seu plano ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ ) e 2 a (duas) solicitações por unidade de comprimento transversais ao plano ( $F_{xz}$  e  $F_{yz}$ ), totalizando 8 (oito) solicitações, mostradas na Figura 2.3.

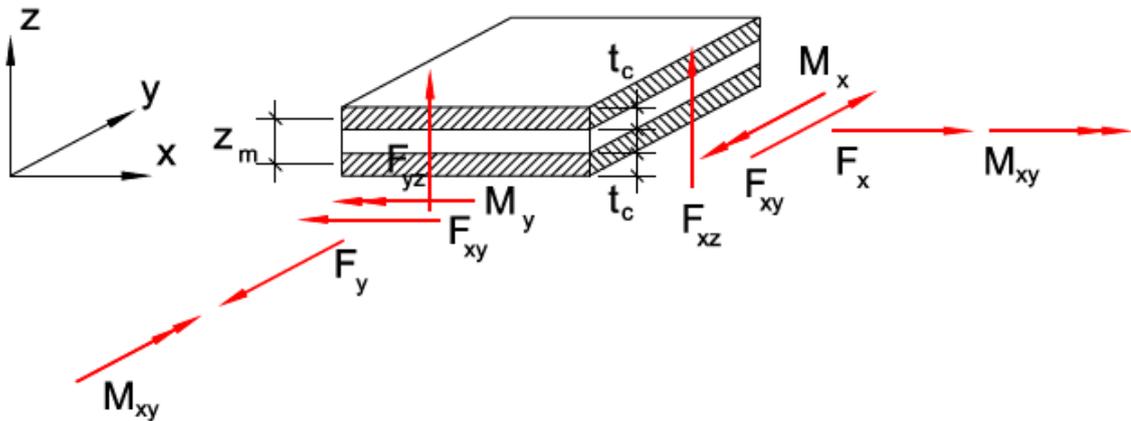


Figura 2.3 – Solicitações atuantes em um elemento de casca

O elemento apresenta dimensões unitárias em planta, como por exemplo, 1m x 1m. Supõem-se duas regiões bem definidas nas faces inferior e superior com espessuras  $t_{c,i}$  e  $t_{c,s}$ , respectivamente. Neste trabalho as espessuras  $t_{c,i}$  e  $t_{c,s}$  serão consideradas iguais, de forma que

$$t_{c,i} = t_{c,s} = t_c \quad (2.1)$$

A flexão é extraída do problema repartindo as solicitações na casca entre essas duas regiões, que são dimensionadas como chapas. Quando as chapas extremas são consideradas de mesma espessura, as forças são divididas, igualmente, entre elas e os momentos substituídos por binários. Nesses casos, a redução das solicitações na casca às chapas é dada pelas equações a seguir:

$$f_x = \frac{F_x}{2} \pm \frac{M_x}{z_m} \quad (2.2)$$

$$f_y = \frac{F_y}{2} \pm \frac{M_y}{z_m} \quad (2.3)$$

$$f_{xy} = \frac{F_{xy}}{2} \pm \frac{M_{xy}}{z_m} \quad (2.4)$$

Quando são consideradas chapas de espessuras diferentes, as forças são divididas proporcionalmente entre elas, conforme recomendação do Eurocode 2 (2004).

As forças  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_{xy}$  são as sollicitações por unidade de comprimento nos planos das chapas inferior e superior, e são mostradas na Figura 2.4. As forças de tração são consideradas positivas e as forças de compressão negativas.

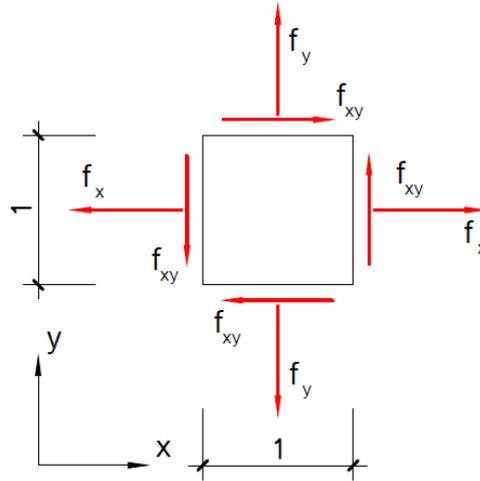


Figura 2.4 – Ações por unidade de comprimento na chapa

As forças  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$ , perpendiculares ao plano, são tratadas no item 2.7.

Neste trabalho a espessura das chapas  $t_c$  e o braço de alavanca  $z_m$  são pré-definidos e considerados de forma aproximada. A Figura 2.5 mostra um elemento em corte, a espessura da chapa e o braço de alavanca médio.

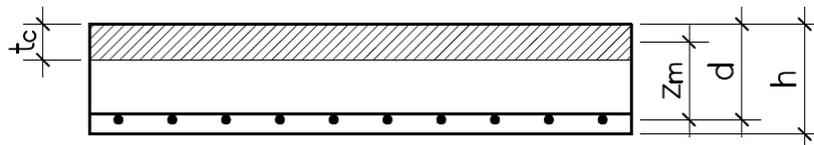


Figura 2.5 – Espessura das chapas e braço de alavanca médio

Para peças submetidas predominantemente à flexão, a espessura das chapas e o braço de alavanca médio são, comumente, calculados através das seguintes expressões:

$$t_c = k_c \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) \quad (2.5)$$

$$z_m = k_z \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) \quad (2.6)$$

onde  $d_x$  e  $d_y$  são as alturas úteis nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

LEONHARDT (1978) recomenda a adoção de  $k_c = 0,3$  e  $k_z = 0,9$ .

O CEB-FIP Model Code 2010 define  $z_m$ , como a média dos braços de alavanca entre as forças no concreto comprimido e nas armaduras tracionadas em cada direção, e a altura

efetiva de cisalhamento. É recomendada a relação  $z = 0,9d$ , não havendo necessidade de se considerar a altura efetiva de cisalhamento inferior a  $0,72h$ , onde  $h$  é a altura total da laje.

Já o CEB-FIP Model Code 1990 diferencia os braços de alavanca para cada solicitação  $z_{m,flex.}$  e  $z_{m,volv.}$ , como mostra a Figura 2.6. Para a flexão, os braços de alavanca  $z_{m,flex.}$  são definidos como a distância da força resultante de compressão no concreto ao centro de gravidade da armadura tracionada. Para o momento volvente  $M_{xy}$ ,  $z_{m,volv.}$  é definido como a distância entre as forças resultantes de compressão do concreto, e pode ser tomado como  $2h/3$ , onde  $h$  é altura da laje.

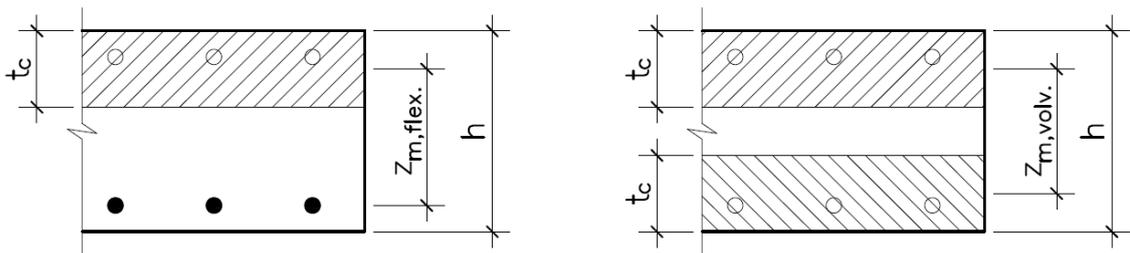


Figura 2.6 – Braços de alavanca diferenciados de acordo com o CEB-FIP Model Code 1990

Elementos predominantemente comprimidos podem ter o braço de alavanca  $z_m$  reduzido e a espessura das chapas  $t_c$  aumentadas. A predeterminação do braço de alavanca é uma restrição importante do método, conforme observa SCHULZ (1988).

BERTAGNOLI, GIORDANO e MANCINI (2012) propõem um algoritmo genético para obtenção do equilíbrio da estrutura como um todo, através da variação da espessura das chapas extremas e, conseqüentemente, dos braços de alavanca, enquanto SCHULZ (1988) divide o elemento de casca em lamelas e determina as tensões utilizando considerações de equilíbrio e compatibilidade.

As forças principais na chapa são determinadas por

$$f_I = \frac{f_x + f_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_x - f_y}{2}\right)^2 + f_{xy}^2} \quad (2.7)$$

$$f_{II} = \frac{f_x + f_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_x - f_y}{2}\right)^2 + f_{xy}^2} \quad (2.8)$$

Quando as forças principais são negativas, a chapa não necessita de armaduras de tração. Neste caso, a força de compressão máxima, em módulo, no concreto  $f_c$  corresponde à força principal negativa máxima.

$$f_c = f_{II} \quad (2.9)$$

Quando, porém, pelo menos uma das tensões principais é positiva, a chapa deve ser armada, já que uma das hipóteses básicas é a de que o concreto não resiste à tração. Neste outro caso, o concreto é tratado como fissurado e a força no concreto se desenvolve apenas na direção  $\varphi$  paralela às microfissuras.

$$f_c = f_{c\varphi} \quad (2.10)$$

#### 2.4.ELEMENTO DE CHAPA COM ARMADURA ORTOGONAL

As armaduras são orientadas nas direções  $x$  e  $y$ , coincidentes com as solicitações  $f_x$  e  $f_y$  por unidade de comprimento na chapa, respectivamente. As forças por unidade de comprimento, nas armaduras resistentes, são denominadas  $f_{sx}$  e  $f_{sy}$ . A força de compressão no concreto por unidade de comprimento, segundo a orientação das microfissuras, é denominada  $f_{c\varphi}$ . O ângulo de orientação das microfissuras  $\varphi$  é tomado em relação ao eixo  $x$  da chapa.

A Figura 2.7 apresenta a chapa com armaduras ortogonais, as microfissuras no concreto e as forças resistentes.

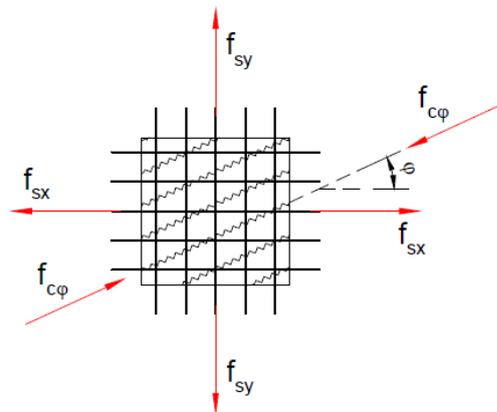


Figura 2.7 – Forças resistentes na chapa com armadura ortogonal

As forças no concreto, em cada faceta do elemento, são mostradas na Figura 2.8.

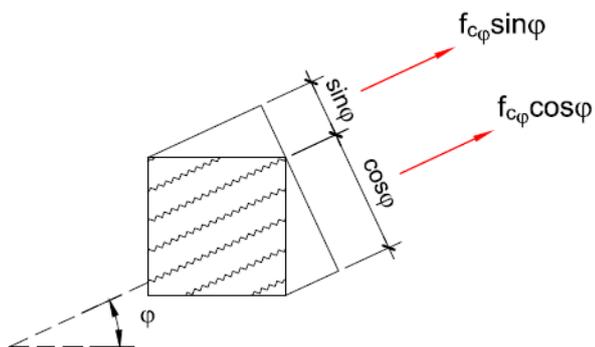


Figura 2.8 – Forças no concreto por faceta do elemento

A decomposição dessas forças nas direções  $x$  e  $y$ , coincidente com as solicitações  $f_x$  e  $f_y$  na chapa e com a direção das armaduras, é mostrada na Figura 2.9.

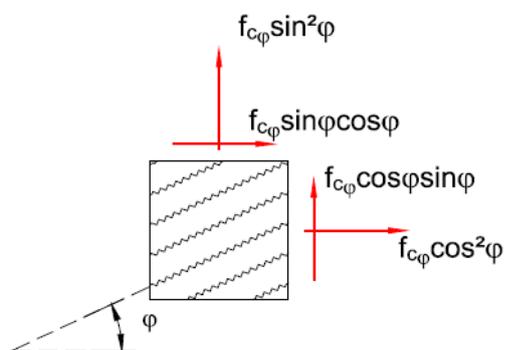


Figura 2.9 – Forças no concreto por faceta do elemento na direção das solicitações na chapa

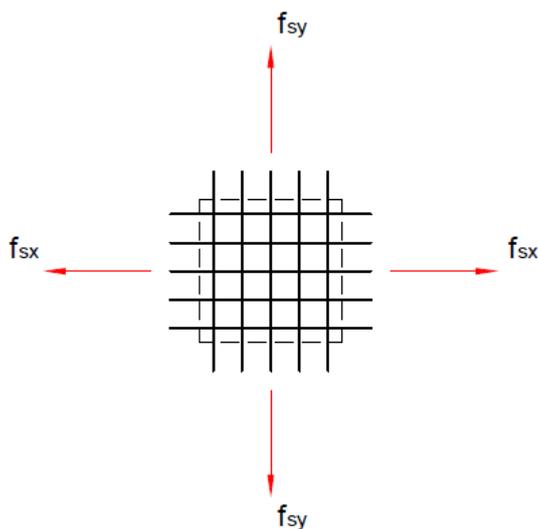


Figura 2.10 – Forças nas armaduras

As forças nas armaduras, isoladamente, são mostradas na Figura 2.10..

As equações (2.11) a (2.13) são obtidas através do equilíbrio (Figura 2.11).

$$f_{c\varphi} \cos^2 \varphi + f_{sx} = f_x \quad (2.11)$$

$$f_{c\varphi} \sin^2 \varphi + f_{sy} = f_y \quad (2.12)$$

$$f_{c\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = f_{xy} \quad (2.13)$$

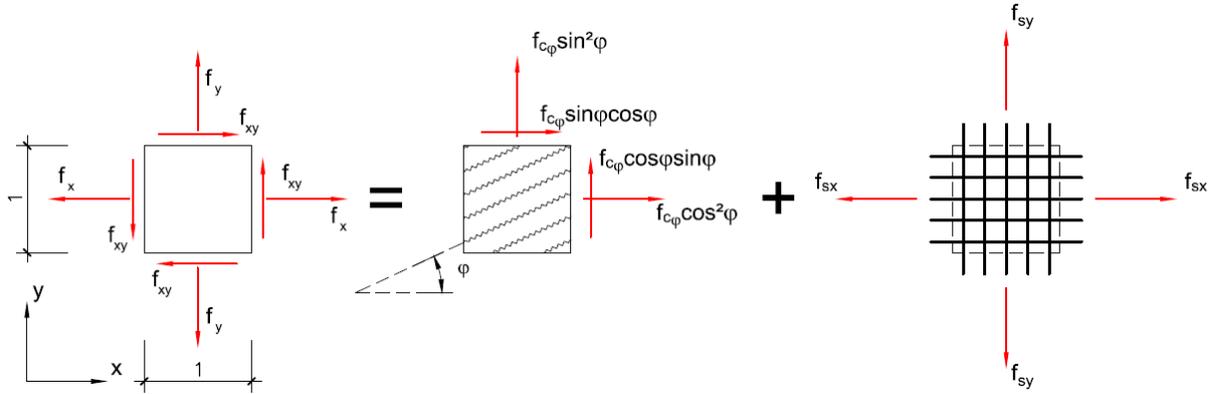


Figura 2.11 – Equilíbrio das solicitações na chapa com as forças resistentes por unidade de comprimento

Multiplicando-se ambos os lados da equação (2.13) por  $\cot \varphi$ , obtém-se

$$f_{c\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = f_{xy} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \rightarrow f_{xy} \cot \varphi = f_{c\varphi} \cos^2 \varphi \quad (2.14)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (2.13) por  $\tan \varphi$ , tem-se

$$f_{c\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = f_{xy} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \rightarrow f_{xy} \tan \varphi = f_{c\varphi} \sin^2 \varphi \quad (2.15)$$

Substituindo-se (2.14) e (2.15) em (2.11) e (2.12), respectivamente, e reescrevendo-se a equação (2.13), encontra-se

$$f_{xy} \cot \varphi + f_{sx} = f_x \quad (2.16)$$

$$f_{xy} \tan \varphi + f_{sy} = f_y \quad (2.17)$$

$$f_{c\varphi} = f_{xy} \left( \frac{1}{\cos \varphi \sin \varphi} \right) = f_{xy} (\tan \varphi + \cot \varphi) \quad (2.18)$$

As equações (2.16) a (2.18) podem ser reescritas através das seguintes expressões:

$$f_{c\varphi} = f_{xy} (\tan \varphi + \cot \varphi) \quad (2.19)$$

$$f_{sx} = f_x - f_{xy} \cot \varphi \quad (2.20)$$

$$f_{sy} = f_y - f_{xy} \tan \varphi \quad (2.21)$$

onde as forças no concreto  $f_{c\varphi}$  e no aço  $f_{sx}$  e  $f_{sy}$  por unidade de comprimento, são definidas em função apenas das solicitações  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_{xy}$  na chapa e do ângulo das fissuras  $\varphi$ .

Somando-se ambos os lados das equações (2.19), (2.20) e (2.21), obtém-se

$$\begin{aligned}
f_{c\varphi} + f_{sx} + f_{sy} &= f_{xy}(\tan\varphi + \cot\varphi) + f_x - f_{xy}\cot\varphi + f_y - f_{xy}\tan\varphi \\
f_{c\varphi} + f_{sx} + f_{sy} &= f_x + f_y
\end{aligned} \tag{2.22}$$

De acordo com (2.22), a maximização da parcela  $f_{c\varphi}$  promove a minimização da soma das forças nas armaduras  $f_{sx}$  e  $f_{sy}$ . Considerando-se que, por definição,

$$f_{c\varphi} < 0$$

para obtenção das menores forças nas armaduras, o valor absoluto da tensão no concreto  $|f_{c\varphi}|$  deve ser minimizado.

Maximiza-se o denominador da expressão (2.18) de forma a se minimizar o valor da tensão no concreto.

$$\begin{aligned}
f(\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi &\rightarrow f'(\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\
f'(\varphi) = \cos(2\varphi) &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Esta condição ocorre nas seguintes situações:

$$\cos(2\varphi) = 0 \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \varphi = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{2.24}$$

Através da análise da equação (2.19), obtém-se a seguinte conclusão:

$$f_{xy} \leq 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \tag{2.25}$$

$$f_{xy} > 0 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Substituindo-se (2.25) em (2.19), (2.20) e (2.21), tem-se

$$\begin{aligned}
f_{c\varphi} = f_{xy} \left( \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \right) &= -2|f_{xy}| & f_{c\varphi} &= -2|f_{xy}| \\
f_{sx} = f_x - f_{xy} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} &= f_x + |f_{xy}| & f_{sx} &= f_x + |f_{xy}| \\
f_{sy} = f_y - f_{xy} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} &= f_y + |f_{xy}| & f_{sy} &= f_y + |f_{xy}|
\end{aligned} \tag{2.26}$$

O conjunto de equações (2.26) define o caso de dimensionamento A, no qual são necessárias armaduras nas duas direções (x e y).

Quando  $f_x + |f_{xy}| < 0$ , o conjunto de equações (2.26) fornece valores negativos para a força na armadura em x. O ângulo de fissuras  $\varphi$  é determinado considerando-se  $f_{sx} = 0$  na equação (2.20).

$$f_{sx} = f_x - f_{xy} \cot \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \cot \varphi = \frac{f_x}{f_{xy}} \quad (2.27)$$

Substituindo-se (2.27) em (2.19), (2.20) e (2.21), encontra-se

$$f_{c\varphi} = f_{xy} \left( \frac{f_{xy}}{f_x} + \frac{f_x}{f_{xy}} \right) = \frac{f_{xy}^2}{f_x} + f_x \quad f_{c\varphi} = \frac{f_{xy}^2}{f_x} + f_x$$

$$f_{sx} = 0 \quad = \quad f_{sx} = 0 \quad (2.28)$$

$$f_{sy} = f_y - f_{xy} \frac{f_{xy}}{f_x} = f_y - \frac{f_{xy}^2}{f_x} \quad f_{sy} = f_y - \frac{f_{xy}^2}{f_x}$$

O conjunto de equações (2.28) define o caso de dimensionamento B, em que a armadura na direção x é desnecessária ao equilíbrio da chapa.

Quando  $f_y + |f_{xy}| < 0$ , o conjunto de equações (2.26) fornece valores negativos para a força na armadura em y. O ângulo de fissuras  $\varphi$  é determinado considerando-se  $f_{sy} = 0$  em (2.21).

$$f_{sy} = f_y - f_{xy} \tan \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{f_y}{f_{xy}} \quad (2.29)$$

Substituindo-se (2.29) em (2.19), (2.20) e (2.21), obtém-se

$$f_{c\varphi} = f_{xy} \left( \frac{f_y}{f_{xy}} + \frac{f_{xy}}{f_y} \right) = \frac{f_{xy}^2}{f_y} + f_y \quad f_{c\varphi} = \frac{f_{xy}^2}{f_y} + f_y$$

$$f_{sx} = f_x - f_{xy} \frac{f_{xy}}{f_y} = f_x - \frac{f_{xy}^2}{f_y} \quad = \quad f_{sx} = f_x - \frac{f_{xy}^2}{f_y} \quad (2.30)$$

$$f_{sy} = 0 \quad f_{sy} = 0$$

O conjunto de equações (2.30) define o caso de dimensionamento C, para o qual a armadura na direção y é dispensada para o equilíbrio da chapa.

Nos casos B e C as relações mínimas entre armaduras perpendiculares devem ser respeitadas de acordo com a norma de referência que estiver sendo utilizada.

A divisão da força  $f_c$  no concreto pela espessura da chapa  $t_c$  fornece a tensão no concreto  $\sigma_c$ . As áreas de aço  $a_{sx}$  e  $a_{sy}$  nas direções x e y, respectivamente, são calculadas, através da divisão da força na armadura pela tensão de projeto admitida para o aço empregado  $f_{yd}$ , estabelecida na norma utilizada.

$$\sigma_c = \frac{f_c}{t_c} \quad (2.31)$$

$$a_{sx} = \frac{f_{sx}}{f_{yd}} \quad (2.32)$$

$$a_{sy} = \frac{f_{sy}}{f_{yd}} \quad (2.33)$$

A tensão no concreto deve ser inferior à tensão admissível recomendada pela norma adotada. As taxas mínimas e as relações mínimas entre armaduras perpendiculares também devem ser respeitadas conforme a mesma norma.

A Tabela 2.1 resume as equações de dimensionamento da chapa fissurada de concreto armado com duas camadas de armaduras ortogonais e coincidentes com as direções das solicitações  $f_x$  e  $f_y$  na chapa. Esta tabela é semelhante à adotada pelo CEB-FIP (1982).

Tabela 2.1 – Equações de dimensionamento para uma chapa fissurada de concreto armado com duas camadas de armaduras ortogonais

Caso	Solicitação por unidade de comprimento	$f_{sx}$	$f_{sy}$	$f_{c\phi}$
A	$f_x \geq - f_{xy} $ e $f_y \geq - f_{xy} $	$f_x +  f_{xy} $	$f_y +  f_{xy} $	$-2 \times  f_{xy} $
B	$f_x < - f_{xy} $ e $f_y > \frac{f_{xy}^2}{f_x} > - f_{xy} $	0	$f_y - \frac{f_{xy}^2}{f_x}$	$\frac{f_{xy}^2}{f_x} + f_x$
C	$f_x > \frac{f_{xy}^2}{f_y} > - f_{xy} $ e $f_y < - f_{xy} $	$f_x - \frac{f_{xy}^2}{f_y}$	0	$\frac{f_{xy}^2}{f_y} + f_y$

## 2.5.ELEMENTO DECHAPA COM ARMADURA ESCONSA

As armaduras são orientadas nas direções dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , formados com o eixo da chapa. As forças por unidade de comprimento nas armaduras resistentes são denominadas  $f_{s\alpha}$  e  $f_{s\beta}$ . A força de compressão no concreto por unidade de comprimento, segundo a orientação das microfissuras, é denominada  $f_{c\phi}$ . O ângulo de orientação das microfissuras  $\phi$  também é tomado em relação ao eixo x da chapa.

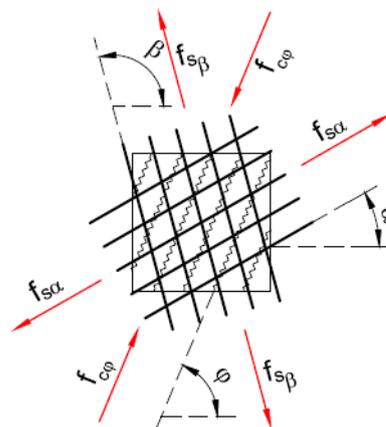


Figura 2.12 – Forças resistentes na chapa com armadura esconsa

As forças no concreto em cada faceta do elemento são mostradas na Figura 2.13..

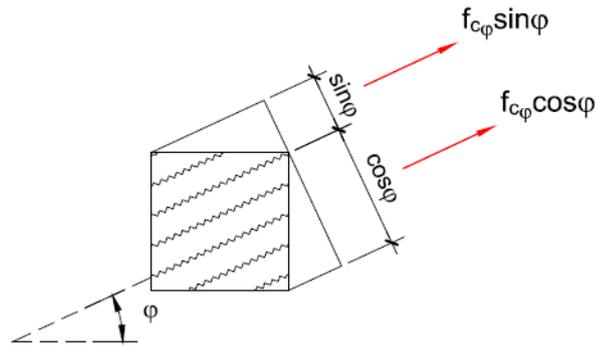


Figura 2.13 – Forças no concreto por faceta do elemento

A decomposição dessas forças nas direções  $x$  e  $y$ , coincidentes com as solicitações  $f_x$  e  $f_y$  na chapa é mostrada na Figura 2.14..

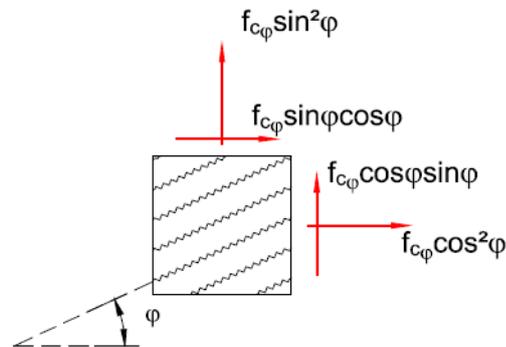


Figura 2.14 – Forças no concreto por faceta do elemento na direção das ações na chapa

As forças nas armaduras, nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , assim como a decomposição dessas forças, nas direções  $x$  e  $y$ , são apresentadas na Figura 2.15 e na Figura 2.16, respectivamente.

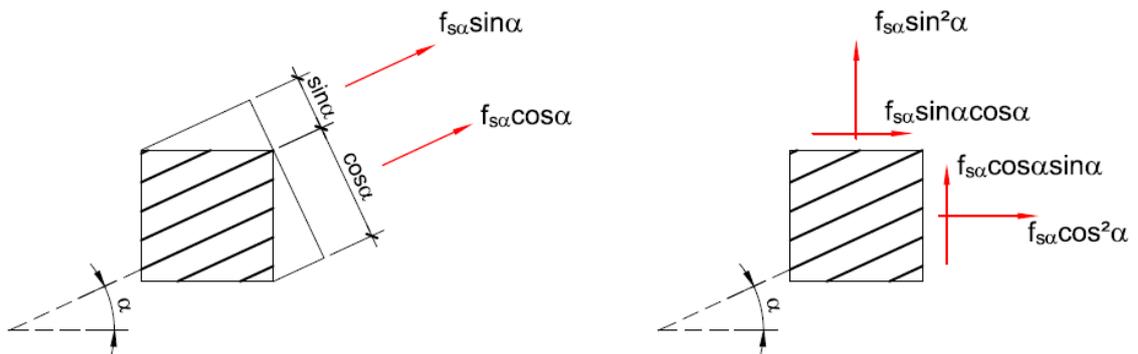


Figura 2.15 – Forças nas armaduras na direção  $\alpha$  e decomposição em  $x$  e  $y$

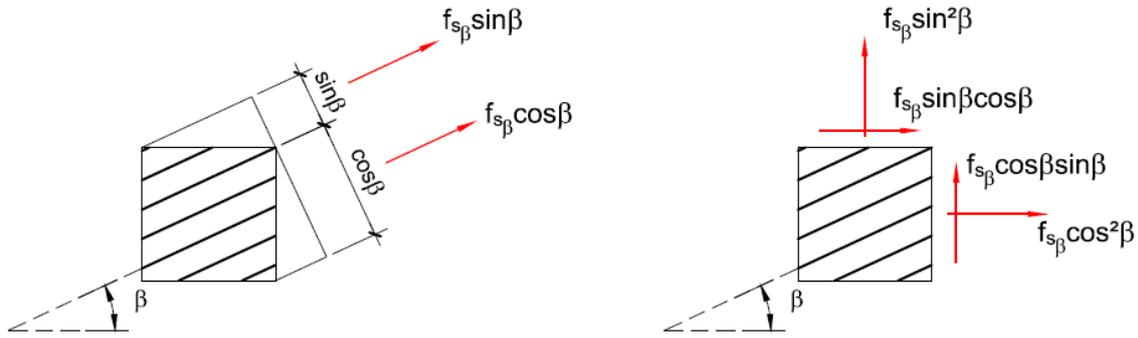


Figura 2.16 – Forças nas armaduras na direção  $\beta$  e decomposição em  $x$  e  $y$

O equilíbrio das solicitações na chapa com as forças resistentes fornece

$$f_{c\varphi} \cos^2 \varphi + f_{s\alpha} \cos^2 \alpha + f_{s\beta} \cos^2 \beta = f_x \quad (2.34)$$

$$f_{c\varphi} \sin^2 \varphi + f_{s\alpha} \sin^2 \alpha + f_{s\beta} \sin^2 \beta = f_y \quad (2.35)$$

$$f_{c\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + f_{s\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + f_{s\beta} \cos \beta \sin \beta = f_{xy} \quad (2.36)$$

As equações (2.34), (2.35) e (2.36) podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \varphi & \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta \\ \cos \varphi \sin \varphi & \cos \alpha \sin \alpha & \cos \beta \sin \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{c\varphi} \\ f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Através da inversão do sistema, obtém-se

$$f_{c\varphi} = \frac{[-\sin \beta \sin \alpha f_x - \cos \beta \cos \alpha f_y + \sin(\beta + \alpha) f_{xy}]}{\sin(\beta - \varphi) \sin(\varphi - \alpha)} \quad (2.38)$$

$$f_{s\alpha} = \frac{[\sin \beta \sin \varphi f_x + \cos \beta \cos \varphi f_y - \sin(\beta + \varphi) f_{xy}]}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\varphi - \alpha)} \quad (2.39)$$

$$f_{s\beta} = \frac{[\sin \varphi \sin \alpha f_x + \cos \varphi \cos \alpha f_y - \sin(\varphi + \alpha) f_{xy}]}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta - \varphi)} \quad (2.40)$$

As equações (2.38), (2.39) e (2.40) fornecem as forças por unidade de comprimento no concreto e nas armaduras, em função das solicitações  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_{xy}$  na chapa, dos ângulos de inclinação das armaduras  $\alpha$  e  $\beta$ , e das microfissuras  $\varphi$ , que será determinado adiante.

Somando-se ambos os lados das equações (2.38), (2.39) e (2.40), tem-se

$$f_{c\varphi} + f_{s\alpha} + f_{s\beta} = f_x + f_y \quad (2.41)$$

De acordo com (2.41), a maximização da parcela  $f_{c\varphi}$  promove a minimização da soma das forças nas armaduras  $f_{s\alpha}$  e  $f_{s\beta}$ . Considerando-se que, por definição,

$$f_{c\varphi} < 0$$

para obtenção das menores forças nas armaduras, o valor absoluto da tensão no concreto  $|f_{c\varphi}|$  deve ser minimizado.

Maximiza-se, então, o denominador da equação (2.38) de forma a minimizar o valor da tensão no concreto.

$$f(\varphi) = \sin(\beta - \varphi)\sin(\varphi - \alpha)$$

$$f'(\varphi) = \cos(\varphi - \alpha)\sin(\beta - \varphi) - \cos(\beta - \varphi)\sin(\varphi - \alpha) \quad (2.42)$$

Tomada por base a seguinte relação trigonométrica:

$$\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) = \sin(a - b)$$

e fazendo-se as substituições

$$a = \beta - \varphi \quad e \quad b = \varphi - \alpha$$

obtem-se

$$f'(\varphi) = \sin(\beta + \alpha - 2\varphi) \quad (2.43)$$

Assim, para  $|f_{c\varphi}|_{\min}$ , tem-se

$$\sin(\beta + \alpha - 2\varphi) = 0 \quad (2.44)$$

A condição é satisfeita nas seguintes situações:

$$\beta + \alpha - 2\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (2.45)$$

$$\beta + \alpha - 2\varphi = -\pi \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\alpha + \beta + \pi}{2} \quad (2.46)$$

Substituindo-se (2.45) e (2.46) em **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** e verificando-se a condição

$$f_{c\varphi} < 0$$

obtem-se a seguinte conclusão:

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad se \quad -\sin\beta\sin\alpha f_x - \cos\beta\cos\alpha f_y + \sin(\beta + \alpha)f_{xy} \leq 0 \quad (2.47)$$

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta + \pi}{2} \quad se \quad -\sin\beta\sin\alpha f_x - \cos\beta \cdot \cos\alpha f_y + \sin(\beta + \alpha)f_{xy} > 0$$

Os valores de  $\varphi$  indicados em (2.47) em conjunto com as equações **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**, (2.39) e (2.40) definem o caso A de dimensionamento, quando são necessárias armaduras nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ .

O caso B de dimensionamento é definido, quando, para o ângulo das fissuras  $\varphi$  obtido por (2.47), a equação (2.39) fornece valores negativos para a armadura na direção  $\alpha$ .

O ângulo das fissuras  $\varphi$  é determinado fazendo-se  $f_{s\alpha} = 0$  na equação (2.39).

$$f_{s\alpha} = \frac{[\sin\beta\sin\varphi f_x + \cos\beta\cos\varphi f_y - \sin(\beta + \varphi)f_{xy}]}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\varphi - \alpha)} = 0 \quad (2.48)$$

A equação (2.48) é satisfeita, quando

$$\sin\beta\sin\varphi \cdot f_x + \cos\beta\cos\varphi \cdot f_y - \sin(\beta + \varphi)f_{xy} = 0 \quad (2.49)$$

Substituindo-se  $\sin(\beta + \varphi)$  por  $\sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi$ , obtém-se

$$\tan\varphi = \frac{\sin\beta f_{xy} - \cos\beta \cdot f_y}{\sin\beta f_x - \cos\beta \cdot f_{xy}} \quad (2.50)$$

A equação (2.50) fornece o ângulo das fissuras  $\varphi$  para o caso B de dimensionamento.

O caso C de dimensionamento é definido, quando, para o ângulo das fissuras  $\varphi$  obtido pelas equações (2.47), a equação (2.40) fornece valores negativos para a armadura na direção  $\beta$ .

O ângulo das fissuras  $\varphi$  é determinado fazendo-se  $f_{s\beta} = 0$  na equação (2.40).

$$f_{s\beta} = \frac{[\sin\varphi\sin\alpha f_x + \cos\varphi\cos\alpha f_y - \sin(\varphi + \alpha)f_{xy}]}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta - \varphi)} = 0 \quad (2.51)$$

A equação (2.51) é satisfeita, quando

$$\sin\varphi\sin\alpha f_x + \cos\varphi\cos\alpha f_y - \sin(\varphi + \alpha)f_{xy} = 0 \quad (2.52)$$

Substituindo-se  $\sin(\varphi + \alpha)$  por  $\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha$ , obtém-se

$$\tan\varphi = \frac{\sin\alpha f_{xy} - \cos\alpha f_y}{\sin\alpha f_x - \cos\alpha f_{xy}} \quad (2.53)$$

A equação (2.53) fornece o ângulo das fissuras  $\varphi$  para o caso C de dimensionamento.

A Tabela 2.2 resume as equações de dimensionamento da chapa fissurada de concreto armado com duas camadas de armaduras, em direções quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$ , coincidentes ou não com as direções das solicitações  $f_x$  e  $f_y$ .

Da mesma forma que para a chapa com armaduras ortogonais, a divisão da força  $f_c$  no concreto pela espessura da chapa  $t_c$  fornece a tensão no concreto  $\sigma_c$ . As áreas de aço  $a_{s\alpha}$  e  $a_{s\beta}$  nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, são calculadas, através da divisão da força na armadura pela tensão de projeto admitida para o aço empregado  $f_{yd}$ , definida na norma utilizada.

$$\sigma_c = \frac{f_c}{t_c} \quad (2.54)$$

$$a_{s\alpha} = \frac{f_{s\alpha}}{f_{yd}} \quad (2.55)$$

$$a_{s\beta} = \frac{f_{s\beta}}{f_{yd}} \quad (2.56)$$

A tensão no concreto deve ser inferior à tensão admissível, estabelecida na norma considerada.

Tabela 2.2 – Equações de dimensionamento de uma chapa fissurada de concreto armado com duas camadas de armaduras em direções quaisquer

$f_{s\alpha}$	$f_{s\alpha} = \frac{[\sin\beta\sin\varphi f_x + \cos\beta\cos\varphi f_y - \sin(\beta + \varphi)f_{xy}]}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\varphi - \alpha)}$
$f_{s\beta}$	$f_{s\beta} = \frac{[\sin\varphi\sin\alpha f_x + \cos\varphi\cos\alpha f_y - \sin(\varphi + \alpha)f_{xy}]}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta - \varphi)}$
$f_{c\varphi}$	$f_{c\varphi} = \frac{[-\sin\beta\sin\alpha f_x - \cos\beta\cos\alpha f_y + \sin(\beta + \alpha)f_{xy}]}{\sin(\beta - \varphi)\sin(\varphi - \alpha)}$
Caso A – $f_{s\alpha} \geq 0$ e $f_{s\beta} \geq 0$	
$\varphi$	$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ se } -\sin\beta\sin\alpha f_x - \cos\beta\cos\alpha f_y + \sin(\beta + \alpha)f_{xy} \leq 0$ $\varphi = \frac{\alpha + \beta + \pi}{2} \text{ se } -\sin\beta\sin\alpha f_x - \cos\beta\cos\alpha f_y + \sin(\beta + \alpha)f_{xy} > 0$
Caso B – $f_{s\alpha} < 0$ e $f_{s\beta} \geq 0$	
$\varphi$	$\tan\varphi = \frac{\sin\beta f_{xy} - \cos\beta f_y}{\sin\beta f_x - \cos\beta f_{xy}}$
Caso C – $f_{s\alpha} \geq 0$ e $f_{s\beta} < 0$	
$\varphi$	$\tan\varphi = \frac{\sin\alpha f_{xy} - \cos\alpha f_y}{\sin\alpha f_x - \cos\alpha f_{xy}}$

## 2.6.RELAÇÕES MÍNIMAS ENTRE ARMADURASE ARMADURAS MÍNIMAS

A revisão bibliográfica do estado da arte do modelo da chapa fissurada foi apresentada nos itens anteriores. Neste item, pretende-se oferecer uma contribuição a essa teoria através da proposta de armaduras mínimas absolutas e relações mínimas entre armaduras oblíquas.

Duas propostas são apresentadas para a relação mínima entre as armaduras principal e secundária.

A primeira proposta é garantir 20% da força da armadura principal na direção ortogonal à mesma. Definindo-se  $\alpha$  como a armadura principal, tem-se

$$f_{s\beta, \min} \sin^2(\beta - \alpha) = 0,20 f_{s\alpha}$$

$$f_{s\beta, \min} \geq \max \left[ \frac{0,20}{\sin^2(\beta - \alpha)} f_{s\alpha}; f_{s\beta, \text{nec}} \right] \quad (2.57)$$

Quando  $\beta$  for a armadura principal, encontra-se

$$f_{s\alpha, \min} \geq \max \left[ \frac{0,20}{\sin^2(\beta - \alpha)} f_{s\beta}; f_{s\alpha, nec} \right] \quad (2.58)$$

A segunda proposta é garantir, na direção ortogonal à máxima resultante das forças nas armaduras, uma força resultante mínima, equivalente a 20% dessa resultante máxima.

A Figura 2.17 mostra as forças nas armaduras  $f_{s\alpha}$  e  $f_{s\beta}$ , por unidade de comprimento, nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ .

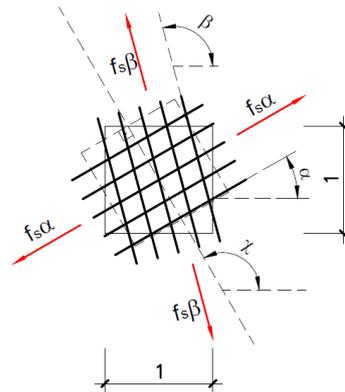


Figura 2.17 – Forças nas armaduras na direção  $\alpha$  e  $\beta$  e direção  $\chi$  qualquer

A resultante das forças numa direção  $\chi$  qualquer (Figura 2.17) é determinada através da decomposição das forças  $f_{s\alpha}$  e  $f_{s\beta}$ , nessa direção, como mostrado na Figura 2.18 para  $f_{s\beta}$ .

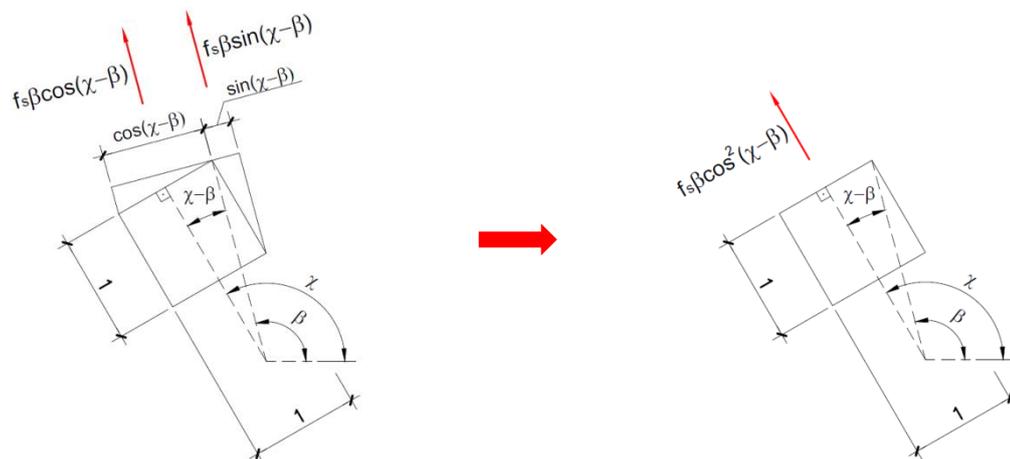


Figura 2.18 – Decomposição de  $f_{s\beta}$  segundo a direção  $\chi$

A resultante das forças nas armaduras por unidade de comprimento, segundo a direção  $\chi$ , é dada por

$$f_{s\chi} = f_{s\alpha} \cos^2(\chi - \alpha) + f_{s\beta} \cos^2(\chi - \beta) \quad (2.59)$$

Derivando-se a expressão (2.59)(2.59), obtém-se

$$\tan(2\chi_1) = \tan(2\chi_2) = \frac{f_{s\alpha} \sin(2\alpha) + f_{s\beta} \sin(2\beta)}{f_{s\alpha} \cos(2\alpha) + f_{s\beta} \cos(2\beta)} \quad (2.60)$$

que fornece os ângulos  $\chi_1$  e  $\chi_2$  das resultantes  $f_{s\chi_1}$  máxima e  $f_{s\chi_2}$  mínima.

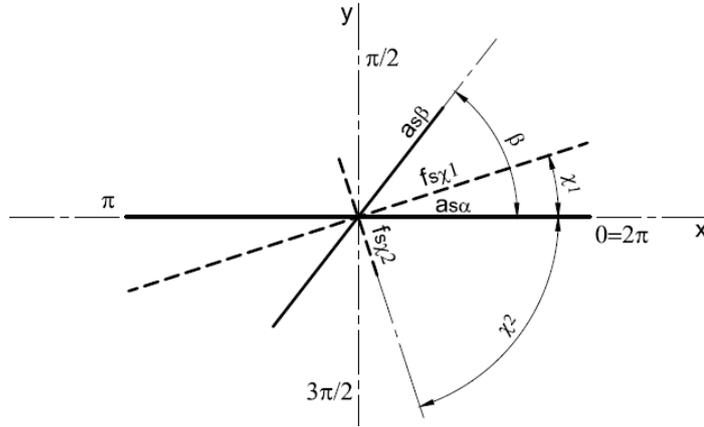


Figura 2.19 – Representação gráfica de  $a_{s\alpha}$ ,  $a_{s\beta}$ ,  $f_{s\chi_1}$  e  $f_{s\chi_2}$

Os ângulos  $2\chi_1$  e  $2\chi_2$  se relacionam por intermédio da tangente comum entre eles (Figura 2.20) através da expressão

$$\chi_2 = \chi_1 - \frac{\pi}{2} \tag{2.61}$$

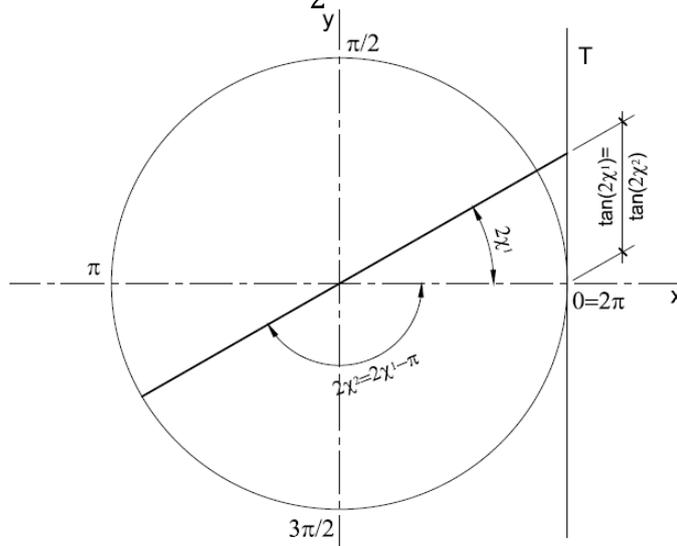


Figura 2.20 – Representação gráfica de  $\tan(2\chi_1) = \tan(2\chi_2)$

A relação  $r_\beta$  entre as forças nas armaduras nas direções  $\beta$  e  $\alpha$  é dada por

$$r_\beta = \frac{f_{s\beta}}{f_{s\alpha}} \tag{2.62}$$

A relação  $r_\chi$  entre a resultante  $f_{s\chi}$  e a força na armadura  $f_{s\alpha}$  é definida por

$$r_\chi = \frac{f_{s\chi}}{f_{s\alpha}} \tag{2.63}$$

Utilizando-se as relações (2.62)(2.62) e (2.63), a equação (2.60) pode ser reescrita em função da relação  $r_\beta$  entre as forças nas armaduras, nas direções  $\beta$  e  $\alpha$ , ou seja

$$\tan(2\chi_1) = \tan(2\chi_2) = \frac{\sin(2\alpha) + r_\beta \sin(2\beta)}{\cos(2\alpha) + r_\beta \cos(2\beta)} \quad (2.64)$$

A relação mínima entre armaduras ortogonais recomendada por diversas normas é igual a 20%. Adotando-se o mesmo critério, porém, para as forças extremas, nas direções  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , tem-se

$$\frac{f_{s\chi_2}}{f_{s\chi_1}} = 0,20 \quad (2.65)$$

A resolução das expressões (2.64) e (2.59), de forma iterativa, permite obter-se a relação mínima  $r_{\beta,\text{mín}}$  entre as forças nas armaduras, nas direções  $\beta$  e  $\alpha$ , que satisfaz a equação (2.65) para diversos ângulos de esconsidade.

O processo iterativo segue o fluxograma mostrado na Figura 21. As relações mínimas obtidas para diversos ângulos entre armaduras são apresentadas na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Armadura secundária mínima para diferentes ângulos entre armaduras

$\beta - \alpha$ (°)	90,0	85,0	80,0	75,0	70,0	65,0	60,0	55,0	50,0	48,2	45,0
$a_{s\beta}/a_{s\alpha}, \text{mín}$	0,200	0,202	0,210	0,222	0,243	0,275	0,325	0,414	0,625	1,000	1,000*

Verifica-se que o processo não apresenta convergência quando o ângulo entre as armaduras é inferior a 48,2°. Neste caso, a força resultante máxima  $f_{s\chi_1}$  assume valores muito maiores que  $f_{s\chi_2}$ . e nenhum valor de  $r_\beta$  satisfaz a equação (2.65). Não é aconselhável a utilização de ângulos entre armaduras oblíquas inferiores a 48,2°.

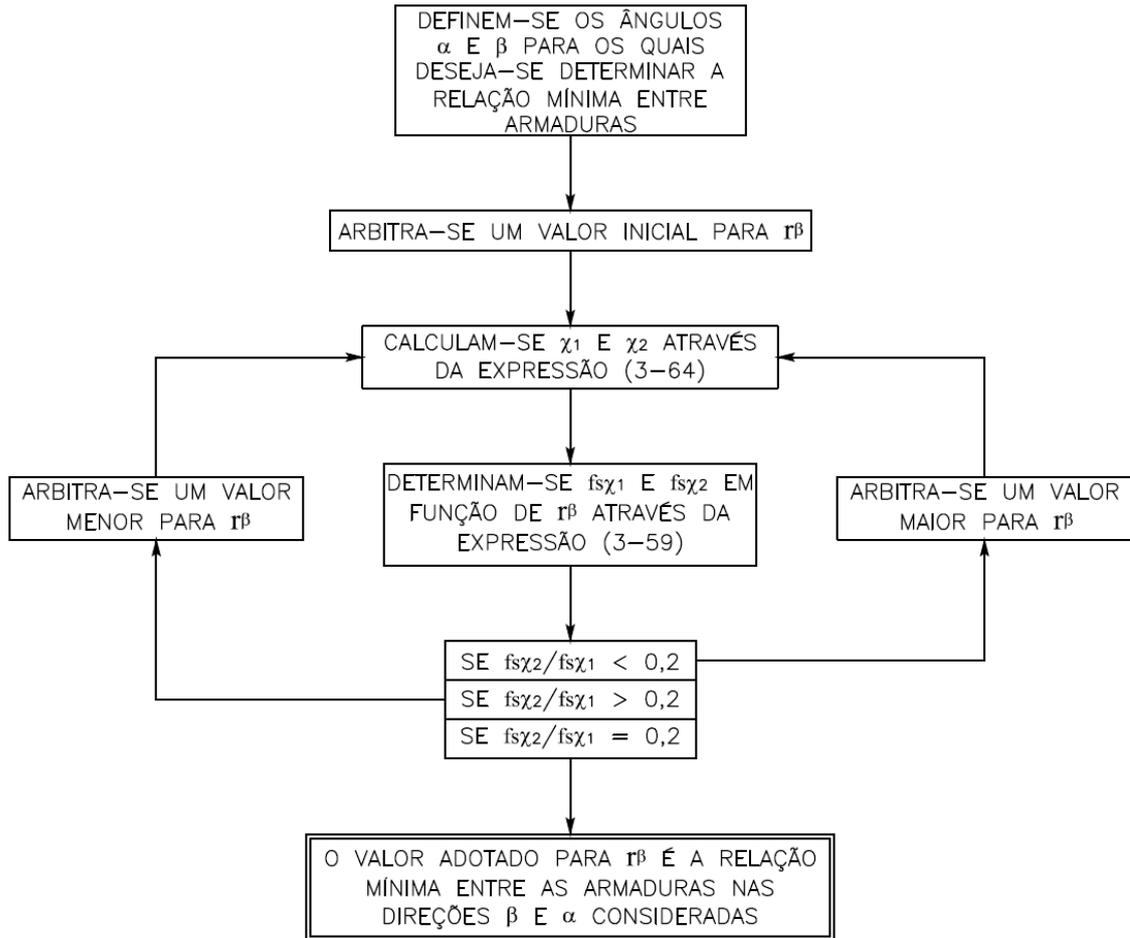


Figura 2.2.1 – Fluxograma do processo de determinação da relação mínima entre armaduras nas direções  $\beta$  e  $\alpha$

Neste trabalho, como alternativa para o estudo teórico de casos limites, optou-se por manter a relação  $r_\beta = 1$  e majorar as armaduras calculadas de forma a satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{f_{s\chi_2, \text{calculado}}}{f_{s\chi_1, \text{majorado}}} = 0,20 \quad (2.66)$$

onde

- $f_{s\chi_2, \text{calculado}}$  é a resultante mínima das forças por unidade de comprimento associadas às armaduras calculadas;
- $f_{s\chi_1, \text{majorado}}$  é a resultante máxima das forças por unidade de comprimento associadas às armaduras calculadas, majoradas por um fator  $k$ .

Os fatores de majoração  $k$  são obtidos de forma iterativa através do processo mostrado no fluxograma da Figura 2.22 e são apresentados na Tabela 2.4 para diversos ângulos entre as armaduras.

Tabela 2.4 – Fatores de majoração da armadura calculada para diversos ângulos entre armaduras

$\beta - \alpha$ (°)	$\leq 48,2$	45,0	40,0	35,0	30,0	25,0	20,0	15,0	10,0	5,0	0,0
k	1,000	1,166	1,510	2,012	2,786	4,069	6,433	11,539	26,129	104,92	$\infty$

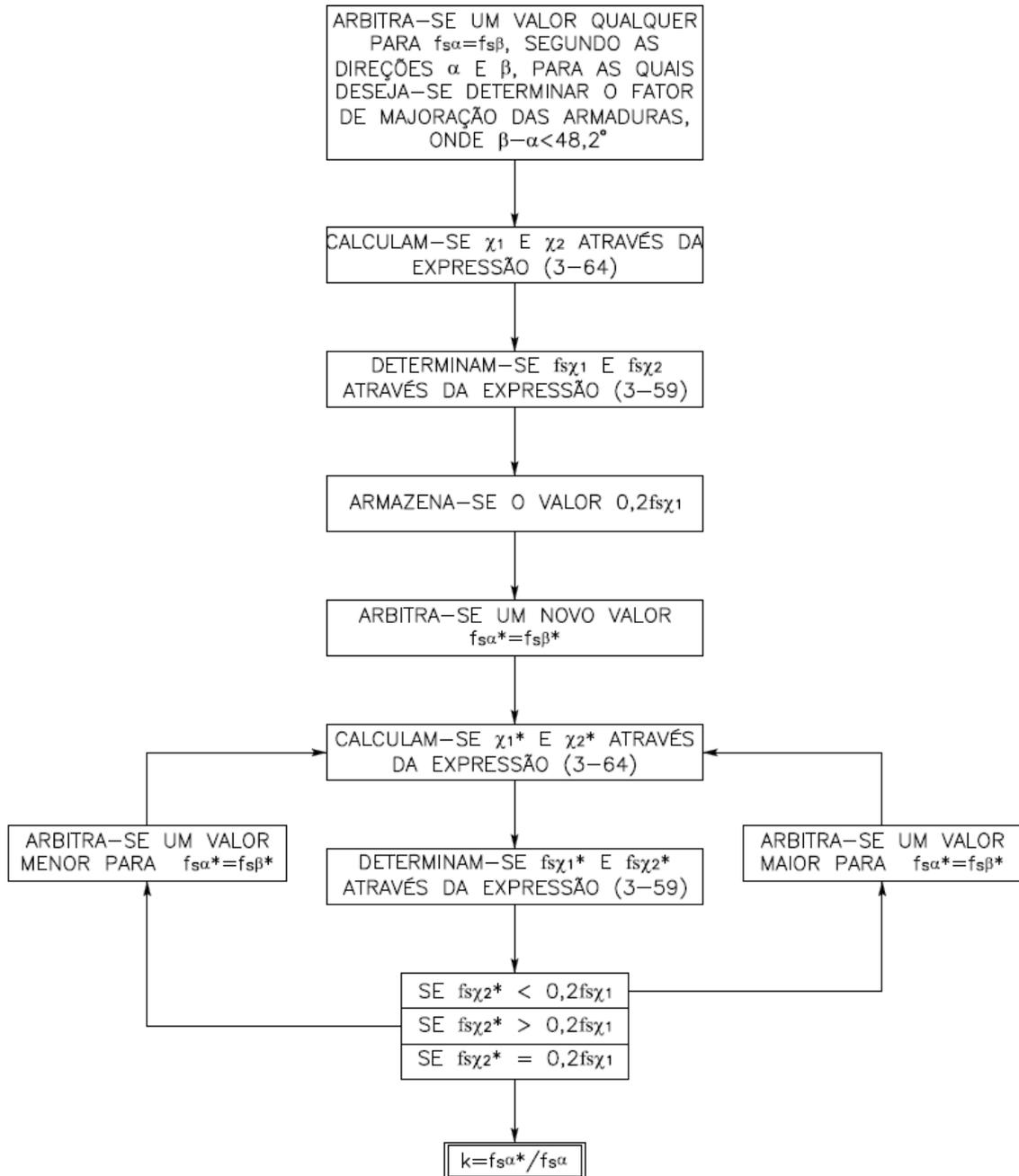


Figura 2.22 – Fluxograma do processo de determinação dos fatores k de majoração da armadura

O gráfico da Figura 2.23 mostra o aumento do fator de majoração k com a diminuição do ângulo entre as armaduras. Nele, observa-se também que a majoração das armaduras pode inviabilizar o detalhamento com ângulos muito pequenos entre as armaduras.

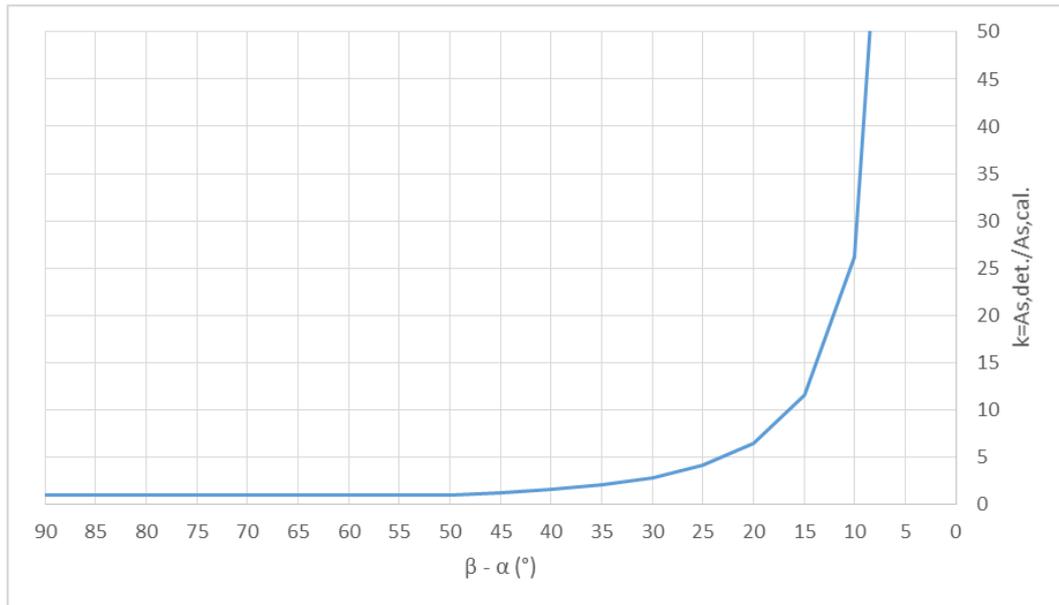


Figura 2.23 – Fatores de majoração da armadura calculada em função do ângulo entre as armaduras

Além de respeitar-se a relação mínima entre as forças, é também necessário garantir-se uma força mínima absoluta  $f_{s,min}$  na direção  $\chi_2$ . Neste trabalho adotou-se a força associada à taxa mínima recomendada pela NBR 6118:2014. Para concretos com  $f_{ck} \leq 30 \text{MPa}$ , essa taxa mínima é 0,15%, e aumenta com a elevação da resistência característica do concreto.

$$f_{s\chi_2,min} \geq \rho_{s,min} f_{yd} = 0,15\% A_c f_{yd} \quad (2.67)$$

onde

- $f_{s\chi_2,min}$  é a força mínima absoluta na direção  $\chi_2$ ;
- $\rho_{min}$  é a taxa geométrica mínima de armadura;
- $f_{yd}$  é a tensão de escoamento de projeto do aço;
- $A_c$  é a área de concreto da seção.

O fluxograma mostrado na Figura 2.24 apresenta o processo iterativo de verificação do atendimento ou determinação da armadura mínima que satisfaz a expressão (2.67), considerando  $\alpha$  como a direção da armadura principal.

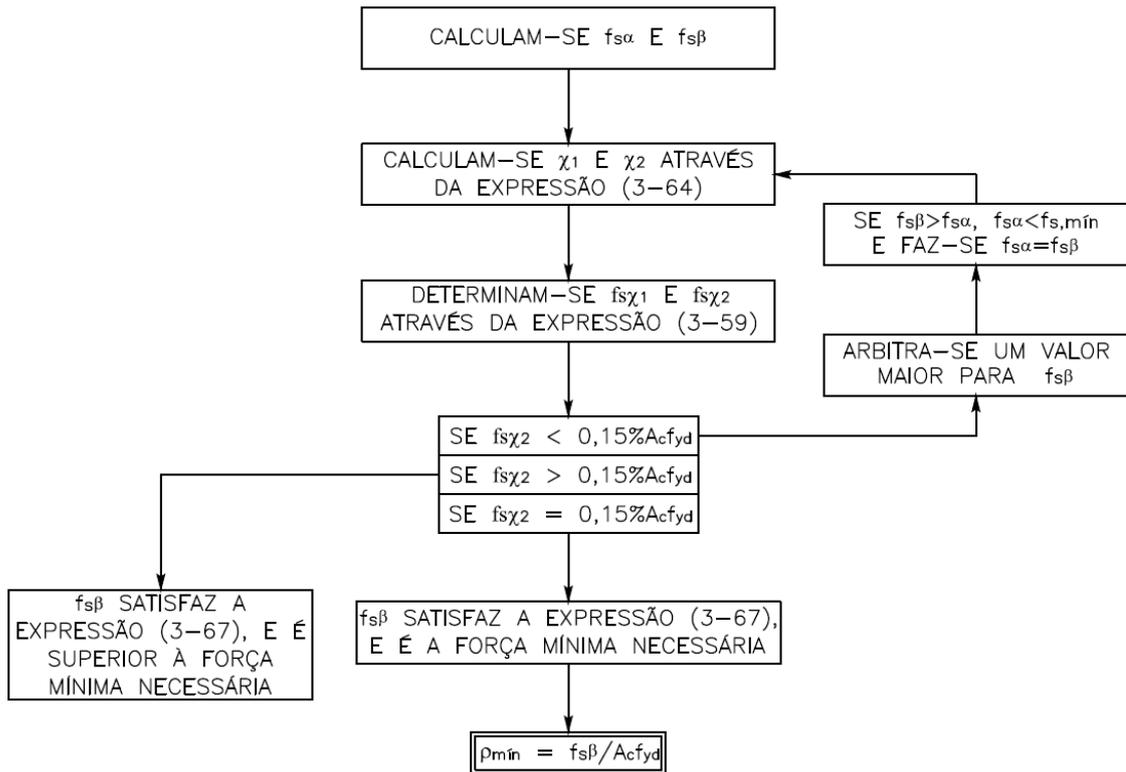


Figura 2.24 – Fluxograma do processo de verificação da força mínima  $f_{s,min}$  na direção  $\chi_2$  e determinação da armadura secundária mínima

O gráfico apresentado na Figura 2.25 representa o aumento da armadura mínima em função do aumento da esconsidade. As curvas iniciam a partir do ponto onde a armadura principal é a mínima para aquela esconsidade. Para malhas ortogonais, a armadura mínima é sempre 0,15% da área de concreto, independentemente da armadura transversal. Para malhas oblíquas, as taxas mínimas de armadura secundária  $\rho_{s,\beta,min}$  diminuem com o aumento da taxa da armadura principal  $\rho_{s,\alpha}$ , pois a armadura principal também tem uma componente na direção  $\chi_2$  da força resultante mínima, para todas as esconsidades.

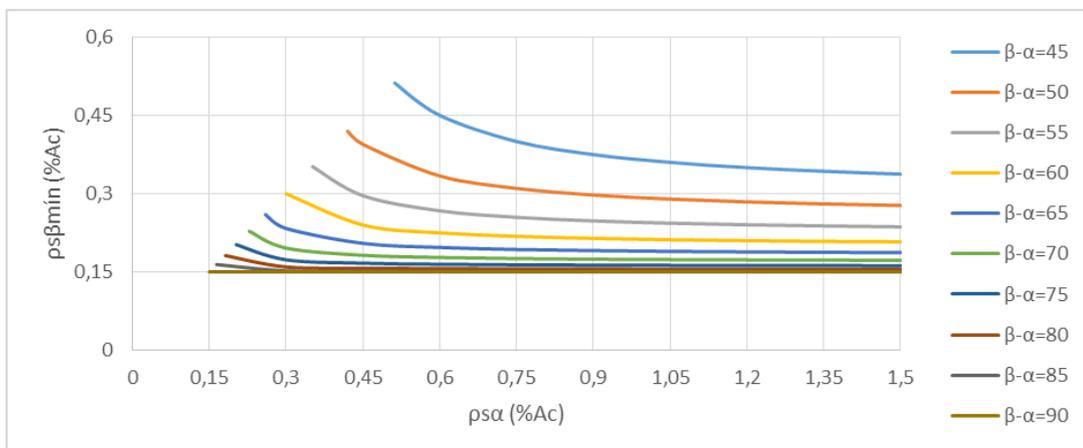


Figura 2.25 – Taxas de armaduras mínimas para  $f_{ck} \leq 30\text{MPa}$

A Tabela 2.5 indica os valores máximos das curvas apresentadas na Figura 2.25, que podem ser adotados, para uso expedito em aplicações práticas, como a taxa geométrica de armadura mínima absoluta, para concretos até a classe de resistência C30, e para as classes C35, C40 e C45.

Tabela 2.5 – Taxa geométrica mínima de armadura para diversos ângulos de escondidade

$\beta - \alpha$ (°)	90,0	85,0	80,0	75,0	70,0	65,0	60,0	55,0	50,0	45,0	
$\rho_{s,min}$	Até C30	0,150%	0,164%	0,182%	0,202%	0,228%	0,260%	0,300%	0,352%	0,420%	0,512%
	C35	0,164%	0,180%	0,198%	0,221%	0,249%	0,284%	0,328%	0,385%	0,459%	0,560%
	C40	0,179%	0,196%	0,217%	0,241%	0,272%	0,310%	0,358%	0,420%	0,501%	0,611%
	C45	0,194%	0,212%	0,235%	0,262%	0,295%	0,336%	0,388%	0,455%	0,543%	0,662%

Os valores do gráfico foram obtidos de conforme o fluxograma apresentado na Figura 2.26.

Neste trabalho, adotou-se a segunda proposta de armadura mínima.

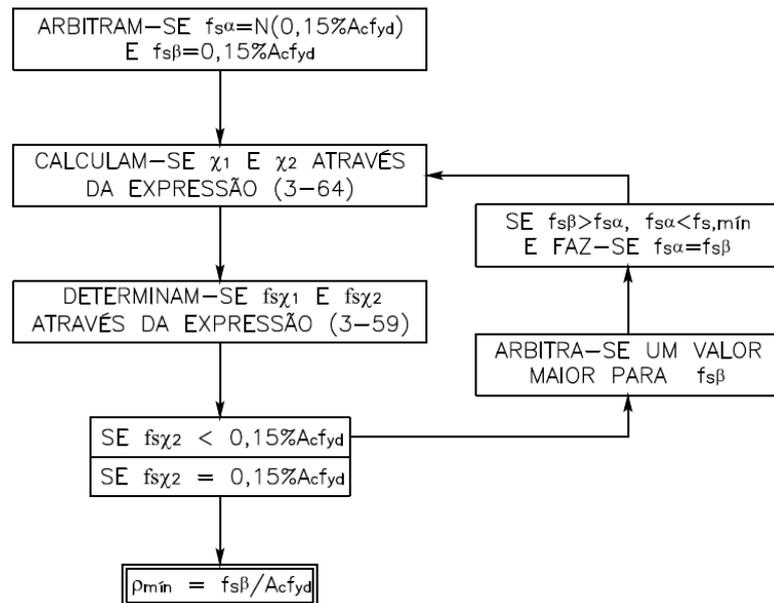


Figura 2.26 – Fluxograma do processo de determinação da taxa mínima de armadura secundária em função da armadura principal

## 2.7. DIMENSIONAMENTO DE CASCAS ÀS SOLICITAÇÕES TRANSVERSAIS AO PLANO DO ELEMENTO

### 2.7.1. Determinação do cortante principal

O dimensionamento de lajes de concreto armado às solicitações cortantes transversais  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$ , tomadas isoladamente, somando-se as armaduras obtidas, não é

adequado, pois, para cada orientação do elemento, a soma das armaduras encontradas apresentará resultados diferentes.

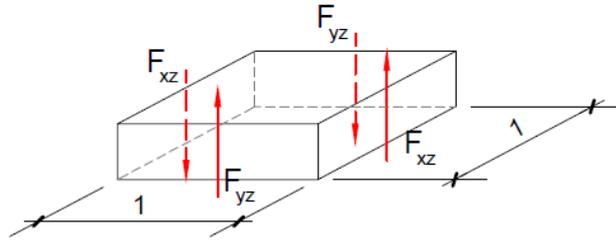


Figura 2.27 – Elemento laminar sujeito à  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$

SCHULZ (1988) mostra que existe, para cada pontoda estrutura, uma direção principal, segundo a qual o esforço cortante é máximo e para este a laje deve ser dimensionada. A demonstração é baseada somente nas condições de equilíbrio, como se explica, a seguir.

Seja um elemento laminar de dimensões unitárias sujeito às solicitações  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$ , como o apresentado na Figura 2.27.

Em um plano qualquer, com inclinação  $\theta$  (Figura 2.28), existirá uma força  $F_{x\theta z}$  por unidade de comprimento, mais bem visualizada na Figura 2.29.

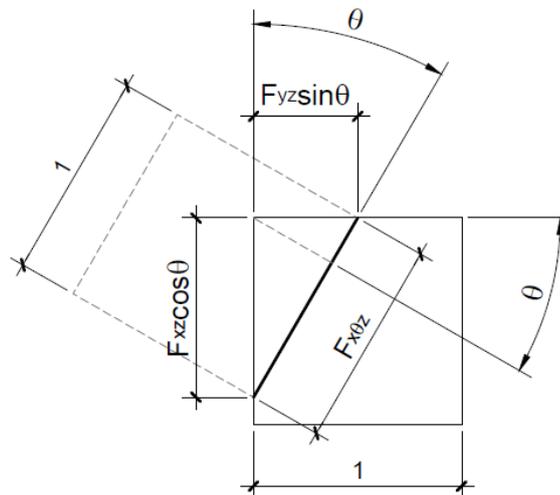


Figura 2.28 – Equilíbrio das forças transversais (planta)

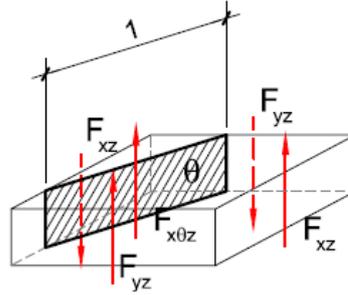


Figura 2.29 – Equilíbrio das forças transversais (vista espacial)

As condições de equilíbrio das forças transversais (Figura 2.28 e Figura 2.29)

forneem

$$F_{x\theta z} = F_{xz} \cos\theta + F_{yz} \sin\theta \quad (2.68)$$

O valor extremo de  $F_{x\theta z}$  é obtido através da condição

$$\frac{d}{d\theta} F_{x\theta z} = -F_{xz} \sin\theta + F_{yz} \cos\theta = 0 \quad (2.69)$$

A expressão ( fornece

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{F_{yz}}{F_{xz}} \quad (2.70)$$

Considerando-se que  $F_{yz}$  e  $F_{xz}$  representam, respectivamente, o cateto oposto e o cateto adjacente, tem-se

$$\sin\theta = \frac{F_{yz}}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} \quad (2.71)$$

$$\cos\theta = \frac{F_{xz}}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} \quad (2.72)$$

Substituindo-se (2.71) e (2.72) em (2.68), obtém-se

$$F_{x\theta z} = \sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2} \quad (2.73)$$

Como mostra a Figura 2.30, na direção perpendicular a  $\theta$ , existirá uma força  $F_{y\theta z}$ , por unidade de comprimento, dada por

$$F_{y\theta z} = F_{xz} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + F_{yz} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.74)$$

A equação (2.74) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_{y\theta z} = F_{xz} \sin(\theta) - F_{yz} \cos(\theta) \quad (2.75)$$

Substituindo-se (2.71) e (2.72) em (2.75) encontra-se

$$F_{y\theta z} = F_{xz} \frac{F_{yz}}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} - F_{yz} \frac{F_{xz}}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} = 0 \quad (2.76)$$

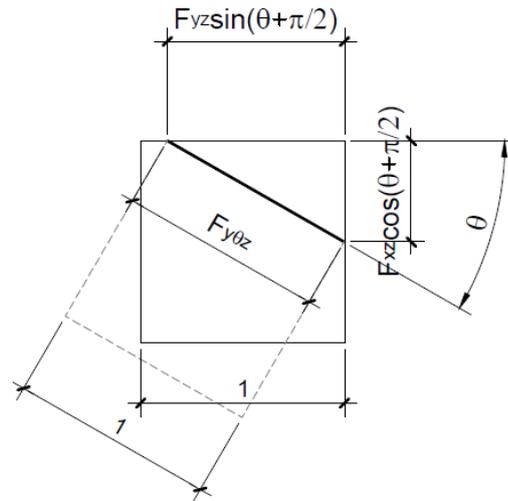


Figura 2.30 – Interseção do plano  $\theta$  com o elemento (planta)

Assim, em cada ponto de uma estrutura laminar, existe uma direção principal  $\theta$ , na qual a sollicitação cortante é máxima e para a qual a estrutura deverá ser dimensionada, uma vez que, na direção perpendicular à  $\theta$ , a força cortante é nula.

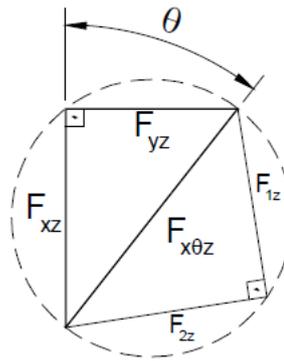


Figura 2.31 – Círculo de Tales para as forças cortantes

A Figura 2.31 representa o círculo de Tales, resumindo a transformação dos cortantes. Nele estão representadas as forças cortantes transversais  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$ , nas direções  $x$  e  $y$ , as forças  $F_{1z}$  e  $F_{2z}$  em duas direções quaisquer, perpendiculares entre si, e a força  $F_{x\theta z}$ , conforme a direção principal  $\theta$ . O diâmetro do círculo ( $F_{x\theta z}$ ) é a força cortante máxima e  $\theta$  é a direção principal, porque a força no plano perpendicular a ela é zero.

Para observar-se a modificação da direção do cortante máximo, em função da posição do ponto estudado na laje e das condições de apoio, foram analisados dois modelos. As lajes estudadas têm dimensões em planta de 4,00m x 2,50m e 0,15m de espessura. Os modelos foram elaborados no programa SAP 2000, utilizando-se elementos de casca fina, discretizados em malha de 0,25m x 0,25m. Foi aplicado um carregamento de 2,50kN/m<sup>2</sup> na direção da gravidade, além do peso próprio, calculado, automaticamente, pelo programa.

No primeiro modelo, apresentado na Figura 2.32, a laje foi apoiada em todos os bordos, enquanto no segundo modelo (Figura 2.36) os apoios foram dispostos apenas ao longo do bordo maior da laje. Todos os apoios restringem os deslocamentos nas direções X, Y e Z e liberam a rotação em torno dos três eixos.

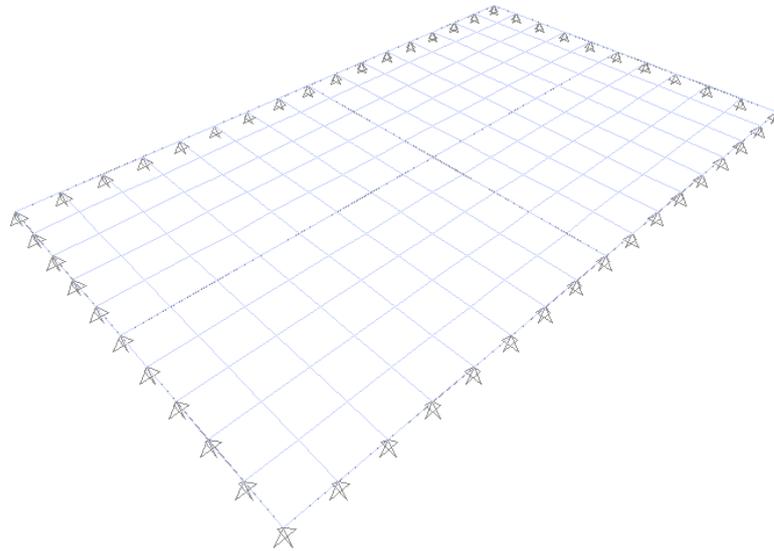


Figura 2.32 – Modelo com todos os bordos apoiados

Foram escolhidos 15 pontos em cada laje, devidamente identificados pelo nó correspondente nos modelos, para observar a mudança de direção do cortante máximo. Esses pontos estão apresentados na Figura 2.33.

A Figura 2.34 apresenta os valores obtidos na análise para  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$  na laje apoiada em todos os bordos. Os valores de  $F_{x\theta z}$  ( $F_{m\acute{a}x}$ ) foram calculados pela equação (2.73) e os valores de  $\theta$  calculados pela equação (2.70), ambos representados graficamente na Figura 2.35.

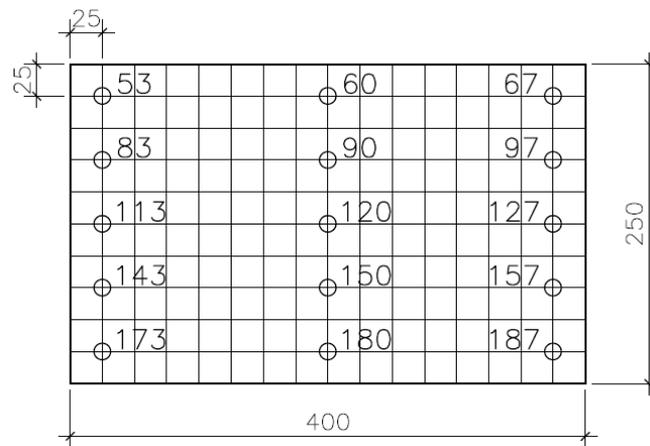


Figura 2.33 – Nós estudados no modelo com todos os bordos apoiados

53	$F_{xz} = -1,37 \text{ kN}$ $F_{yz} = 1,49 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 2,02 \text{ kN}$ $\theta = -47,5^\circ$	60	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 4,91 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 4,91 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 1,37 \text{ kN}$ $F_{yz} = 1,49 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 2,02 \text{ kN}$ $\theta = 47,5^\circ$	67
83	$F_{xz} = -2,99 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,53 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,03 \text{ kN}$ $\theta = -10,0^\circ$	90	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 2,29 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 2,29 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 2,99 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,53 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,03 \text{ kN}$ $\theta = 10,0^\circ$	97
113	$F_{xz} = -3,48 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,48 \text{ kN}$ $\theta = 0,0^\circ$	120	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 0,00 \text{ kN}$ $\theta = -$	$F_{xz} = 3,48 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,48 \text{ kN}$ $\theta = 0,0^\circ$	127
143	$F_{xz} = -2,99 \text{ kN}$ $F_{yz} = -0,53 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,03 \text{ kN}$ $\theta = 10,0^\circ$	150	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 2,29 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 2,29 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 2,99 \text{ kN}$ $F_{yz} = -0,53 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,03 \text{ kN}$ $\theta = -10,0^\circ$	157
173	$F_{xz} = -1,37 \text{ kN}$ $F_{yz} = -1,49 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 2,02 \text{ kN}$ $\theta = 47,5^\circ$	180	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = -4,91 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 4,91 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 1,37 \text{ kN}$ $F_{yz} = -1,49 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 2,02 \text{ kN}$ $\theta = -47,5^\circ$	187

Figura 2.34 – Resultados da análise, cortantes transversais máximos e suas respectivas direções para a laje retangular apoiada nos 4 bordos

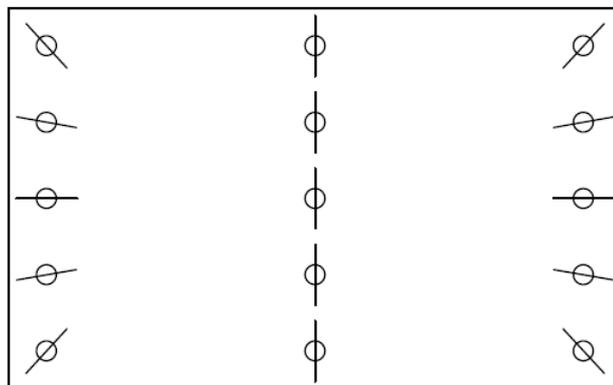


Figura 2.35 – Representação gráfica das direções dos cortantes máximos para a laje retangular apoiada nos 4 bordos

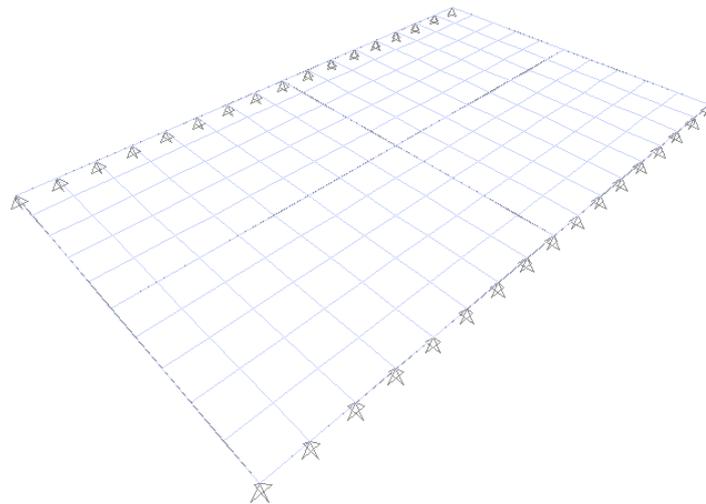


Figura 2.36 – Modelo com apoios apenas ao longo da maior direção da laje

53	$F_{xz} = -0,48 \text{ kN}$ $F_{yz} = 5,88 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 5,90 \text{ kN}$ $\theta = -85,4^\circ$	60	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 6,12 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 6,12 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 0,48 \text{ kN}$ $F_{yz} = 5,88 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 5,90 \text{ kN}$ $\theta = 85,4^\circ$	67
83	$F_{xz} = -1,03 \text{ kN}$ $F_{yz} = 2,94 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,11 \text{ kN}$ $\theta = -70,8^\circ$	90	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 3,04 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,04 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 1,03 \text{ kN}$ $F_{yz} = 2,94 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,11 \text{ kN}$ $\theta = 70,8^\circ$	97
113	$F_{xz} = -1,19 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 1,19 \text{ kN}$ $\theta = 0,0^\circ$	120	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 0,00 \text{ kN}$ $\theta = -$	$F_{xz} = 1,19 \text{ kN}$ $F_{yz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 1,19 \text{ kN}$ $\theta = 0,0^\circ$	127
143	$F_{xz} = -1,03 \text{ kN}$ $F_{yz} = -2,94 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,11 \text{ kN}$ $\theta = 70,8^\circ$	150	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = -3,04 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,04 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 1,03 \text{ kN}$ $F_{yz} = -2,94 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 3,11 \text{ kN}$ $\theta = -70,8^\circ$	157
173	$F_{xz} = -0,48 \text{ kN}$ $F_{yz} = -5,88 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 5,90 \text{ kN}$ $\theta = 85,4^\circ$	180	$F_{xz} = 0,00 \text{ kN}$ $F_{yz} = -6,12 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 6,12 \text{ kN}$ $\theta = 90,0^\circ$	$F_{xz} = 0,48 \text{ kN}$ $F_{yz} = -5,88 \text{ kN}$ $F_{\theta z} = 5,90 \text{ kN}$ $\theta = -85,4^\circ$	187

Figura 2.37 – Resultados da análise, e cortantes transversais máximos e suas respectivas direções para uma laje retangular apoiada apenas nos bordos maiores

A Figura 2.37 ilustra os resultados obtidos na análise para  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$  da laje apoiada apenas pelos bordos maiores. Da mesma forma que para a laje apoiada em todos os bordos, os

valores de  $F_{x\theta z}(F_{m\acute{a}x})$  e de  $\theta$  foram calculados pelas equações (2.73) e (2.70), respectivamente, e estão representados na Figura 2.38.

Os programas de análise atuais fornecem não só as forças cortantes transversais nas direções ortogonais 1 e 2, mas também o cortante máximo e a direção principal na qual ele se desenvolve. Como não poderia ser diferente, os valores obtidos pelas equações (2.73) e (2.70) foram os mesmos apresentados pelo programa de análise.

A análise da Figura 2.35 e da Figura 2.38 mostra que as cargas “buscam” o apoio mais próximo. Esse comportamento é bastante intuitivo e fica bem evidenciado, no estudo das lajes esconsas, no item 3.3.

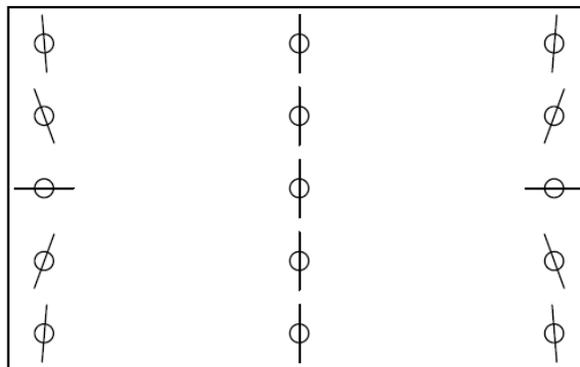


Figura 2.38 – Representação gráfica das direções dos cortantes máximos para uma laje retangular apoiada apenas nos bordos maiores

### 2.7.2. Deslocamento do diagrama de forças nas armaduras tracionadas

Assim como os elementos lineares, os elementos laminares de concreto armado podem ser dimensionados à força transversal máxima por unidade de comprimento  $F_{x\theta z}$ , utilizando-se analogia da treliça e demais fórmulas de dimensionamento. As considerações pertinentes aos elementos laminares devem ser aplicadas de acordo com a norma em utilização.

A consideração da força cortante máxima é importante, pois em geral, conduz à economia. A área de aço total necessária para resistir ao cortante máximo é, normalmente, inferior à soma das áreas calculadas para cada direção individualmente. Entretanto, quando os valores de  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$  são próximos ao limite da não necessidade de armadura de cisalhamento, a verificação para o cortante máximo pode indicar necessidade de armadura.

Nos elementos lineares, a solitação cortante causa um acréscimo de forças, nos banzos da treliça, considerado, simplificada, pela decalagem do diagrama dessas forças. No caso dos elementos laminares, haverá um acréscimo de forças nas chapas extremas, que é dado, segundo a direção  $\theta$  do cortante principal, pela expressão

$$\Delta F_{x\theta} = |F_{x\theta z}| \frac{\cot\phi}{2} \quad (2.77)$$

onde ângulo  $\phi$  corresponde ao ângulo de inclinação das bielas.

Como o ângulo  $\theta$  é definido para a obtenção do valor máximo do cortante transversal, esta força é sempre positiva e dada por

$$\Delta F_{x\theta} = F_{x\theta z} \frac{\cot\phi}{2} \quad (2.78)$$

Uma vez que o dimensionamento das armaduras no plano do elemento laminar é feito a partir de duas direções ortogonais x e y, o acréscimo de forças deve ser transformado para o sistema x,y, comomostrado na Figura 2.39.

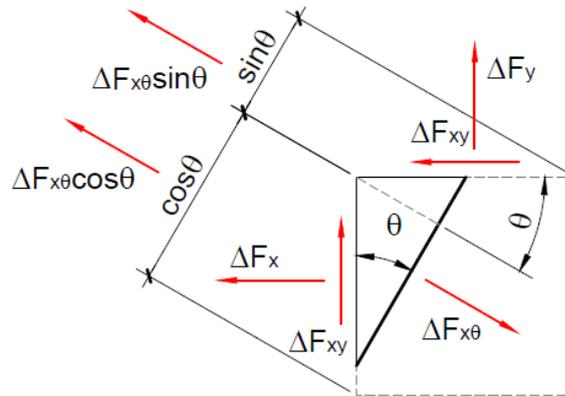


Figura 2.39 – Acréscimo de forças nas direções x e y das chapas extremas  
As condições de equilíbrio fornecem

$$\Delta F_x = \Delta F_{x\theta} \cos^2\theta \quad (2.79)$$

$$\Delta F_y = \Delta F_{x\theta} \sin^2\theta \quad (2.80)$$

$$\Delta F_{xy} = \Delta F_{x\theta} \cos\theta \sin\theta \quad (2.81)$$

Substituindo-se (2.78) em (2.79), (2.80) e (2.81) encontra-se

$$\Delta F_x = F_{x\theta z} \frac{\cot\phi}{2} \cos^2\theta \quad (2.82)$$

$$\Delta F_y = F_{x\theta z} \frac{\cot\phi}{2} \sin^2\theta \quad (2.83)$$

$$\Delta F_{xy} = F_{x\theta z} \frac{\cot\phi}{2} \cos\theta \sin\theta \quad (2.84)$$

Substituindo-se (2.71), (2.72) e (2.73) em (2.82), (2.83) e (2.84), obtém-se

$$\Delta F_x = \frac{F_{xz}^2}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} \frac{\cot\phi}{2} \quad (2.85)$$

$$\Delta F_y = \frac{F_{yz}^2}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} \frac{\cot\phi}{2} \quad (2.86)$$

$$\Delta F_{xy} = \frac{F_{xz} \cdot F_{yz}}{\sqrt{F_{yz}^2 + F_{xz}^2}} \frac{\cot\phi}{2} \quad (2.87)$$

As equações (2.85), (2.86) e (2.87) definem os acréscimos das forças nas chapas, nas direções X e Y, devido à força cortante transversal à chapa, apenas em função das solicitações no elemento laminar. O valor do ângulo de inclinação das bielas  $\phi$  é usualmente tomado por  $45^\circ$ , de acordo com a teoria clássica de Mörsch.

MARTI (1990) obteve as mesmas equações que SCHULZ (1988), porém escritas de forma ligeiramente diferente. MARTI (1990) defende que os acréscimos de forças só devem ser considerados, se for necessária armadura de cisalhamento. Este critério é o adotado neste trabalho.

### 3. APLICAÇÃO DA TEORIA

#### 3.1. CASOS ESTUDADOS

Neste capítulo é analisado o efeito da esconsidade na determinação das armaduras, através do estudo de casos práticos.

Para avaliação do comportamento das lajes de pontes esconsas foram elaborados 12 modelos em elementos finitos, sendo 4 para pontes estruturadas em laje sem vigas, 4 para pontes estruturadas por lajes com vigas laterais invertidas e 4 para pontes de vigas múltiplas ligadas por laje e transversinas.

As armaduras no plano das lajes foram dimensionadas, aplicando-se a teoria da chapa fissurada com armadura esconsa. As armaduras transversais foram obtidas, considerando-se o esforço cortante equivalente, dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes, com base nos procedimentos da NBR 6118:2014.

O referido estudo limitou-se ao dimensionamento das armaduras; a verificação da fadiga nas mesmas não faz parte do escopo deste trabalho.

Os resultados do dimensionamento das armaduras no plano das lajes são apresentados e, em seguida, realizada uma análise comparativa de tal dimensionamento para diversos ângulos de esconsidade.

#### 3.2. AÇÕES A CONSIDERAR NO DIMENSIONAMENTO DE LAJES DE PONTES

As ações a serem consideradas no dimensionamento das lajes de pontes variam de acordo com o sistema estrutural adotado e com a concepção da obra. Os sistemas estruturais mais utilizados no Brasil estão sujeitos às seguintes ações:

- peso próprio estrutural
- sobrecarga permanente
  - pavimentação
  - carga de recapeamento
  - lastro e equipamentos de via (pontes ferroviárias)
  - aterro sobre a laje
  - guarda-rodas
  - guarda-corpos
  - passeios elevados
  - etc.

- carga móvel
- choque de veículos contra as barreiras

Nos sistemas estruturais em que as lajes são ligadas rigidamente à infraestrutura, como nas passagens inferiores, também devem ser consideradas, no dimensionamento, as ações horizontais longitudinais aplicadas à estrutura, tais como

- frenagem e aceleração
- empuxo de terra
- empuxo de sobrecarga

As ações horizontais transversais não costumam causar solicitações apreciáveis nas lajes. Determinadas estruturas podem estar sujeitas a outras ações que não são citadas aqui.

No Brasil as ações a serem consideradas nos projetos de pontes são preconizadas pelas seguintes normas:

- ABNT NBR 7187:2003 - Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido – Procedimento
- ABNT NBR 7188:2013 - Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas
- ABNT NBR 7189:1985 - Cargas móveis para projeto estrutural de obras ferroviárias

### 3.3. PONTES EM LAJE SEM VIGAS LATERAIS

#### 3.3.1. Descrição dos modelos

Foram estudadas 4 pontes em laje com vão livre entre apoios de 10,40 m, segundo a direção do tráfego, de acordo com ângulos de esconsidade  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . Todas as lajes têm 60cm de espessura. Os tabuleiros apresentam 12,80m de largura, acomodando duas faixas de 3,50m, acostamentos de 2,50 m e barreiras New Jersey. A Figura 3.1 detalha a seção transversal adotada.

As geometrias em planta das pontes estudadas são apresentadas da Figura 3.2 à Figura 3.5.

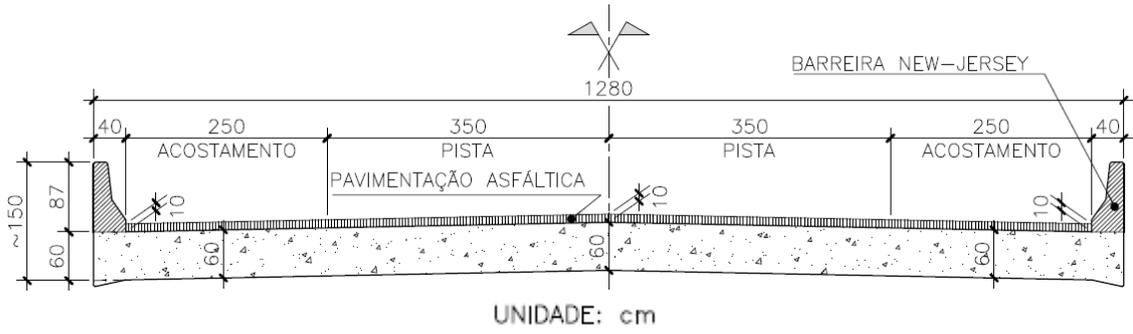


Figura 3.1 –Seção transversal típica das pontes 1 a 4

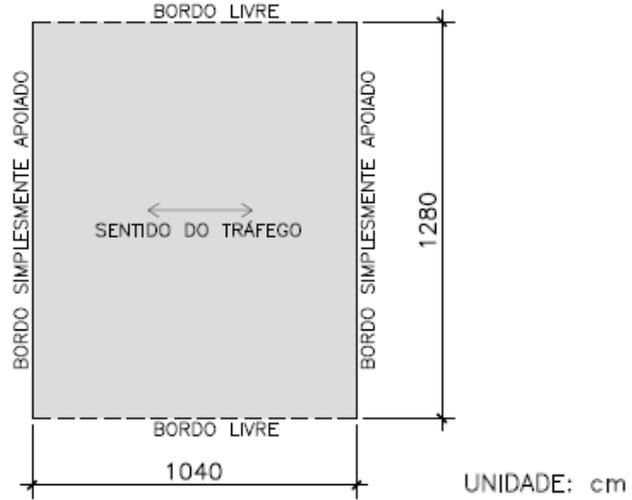


Figura 3.2 – Modelo 1 (L=10,40m, e=0°)

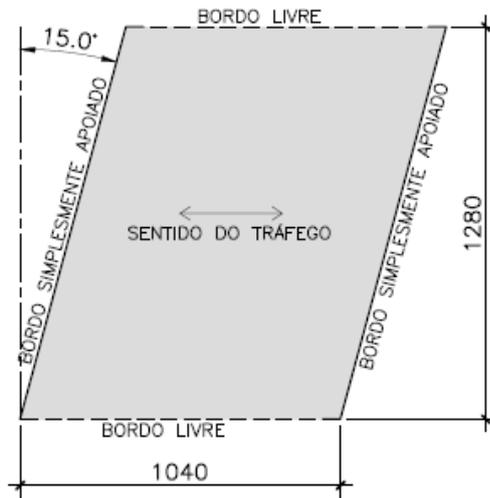


Figura 3.3 – Modelo 2 (L=10,40m, e=15°)

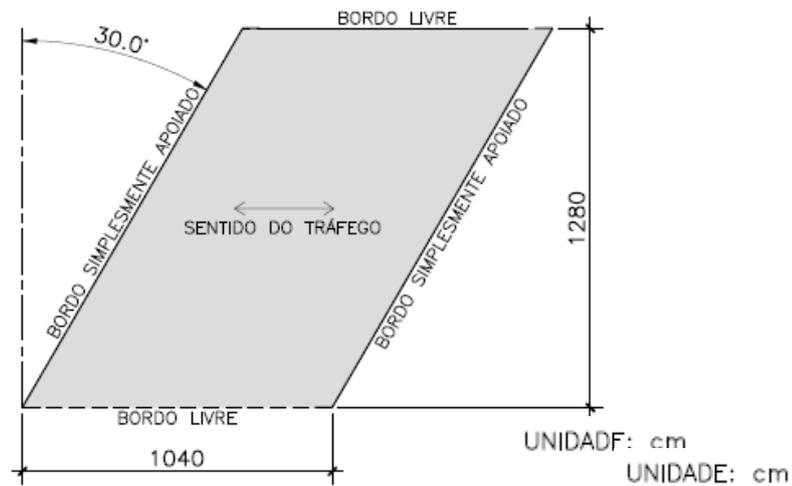


Figura 3.4 – Modelo 3(L=10,40m, e=30°)

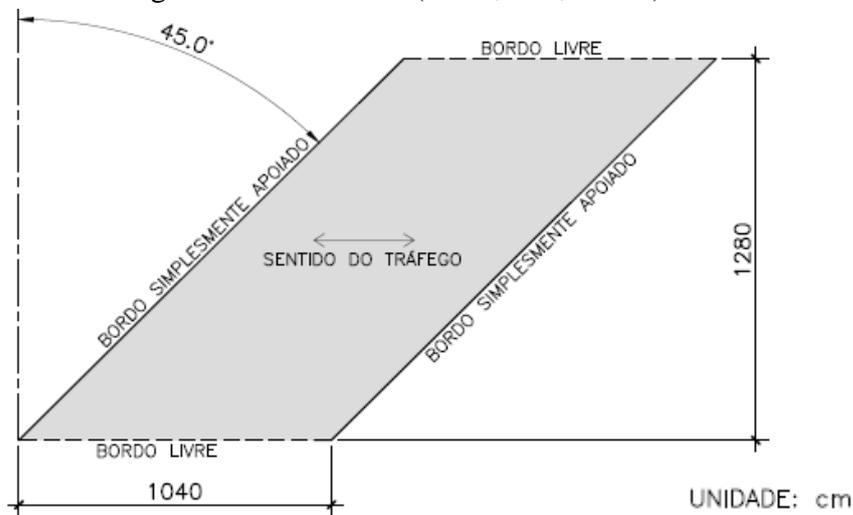


Figura 3.5 – Modelo 4(L=10,40m, e=45°)

As pontes foram modeladas no programa SAP2000 utilizando-se elementos de casca fina, discretizados em malha de 0,20m x 0,20m. Os bordos transversais ao tráfego foram considerados simplesmente apoiados.

Os eixos locais dos elementos de casca fina foram posicionados com a direção 1 na direção da armadura principal da laje, no sentido do tráfego. Dessa forma, o ângulo  $\alpha$  de uma das camadas de armaduras, utilizado nas equações de dimensionamento resumidas na Tabela 2.2, é sempre zero. Conseqüentemente, o ângulo  $\beta$  é dado por

$$\beta = 90^\circ - e \quad (3.1)$$

onde  $e$  é o ângulo de escoradia da laje em graus.

Foi adotado o concreto C35, com resistência característica à compressão  $f_{ck}$  de 35 MPa. O módulo de elasticidade do concreto foi determinado de acordo com o preconizado pela NBR 6118:2014 para o cálculo do módulo de elasticidade secante, considerando agregados de granito ou gnaíse ( $\alpha_E = 1,0$ ).

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} = \left(0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80}\right) \alpha_E (5600 \sqrt{f_{ck}}) \quad (3.2)$$

$$\left(0,8 + 0,2 \frac{35}{80}\right) 1,0 (5600 \sqrt{35}) = 29.403 \text{ MPa}$$

Para o coeficiente de Poisson  $\nu$  foi adotado o valor de 0,20 conforme recomendação da mesma norma.

O peso próprio estrutural foi calculado automaticamente pelo programa, e foram considerados como sobrecarga permanente a pavimentação asfáltica, acrescida da carga de recapeamento, e o peso das barreiras tipo New Jersey.

A carga de pavimentação  $g_{pav}$  das barreiras New Jersey  $g_{NJ}$  são dadas por

$$g_{pav.} = h_{pav.} \gamma_{pav.} + g_{rec.} \quad (3.3)$$

$$g_{pav.} = (0,10m)(24 \text{ kN/m}^3) + 2,0 \text{ kN/m}^2 = 4,4 \text{ kN/m}^2$$

$$g_{NJ} = \frac{S_{NJ} \gamma_{conc.}}{L_T^{elem.}} = \frac{(0,232 \text{ m}^2)(25 \text{ kN/m}^3)}{2(0,2 \text{ m})} = 14,50 \text{ kN/m}^2 \quad (3.4)$$

onde

- $h_{pav.}$  é a altura de pavimentação;
- $\gamma_{pav.}$  é o peso específico da pavimentação;
- $g_{rec.}$  é a carga de recapeamento, definida pela NBR 7187:2003
- $S_{NJ}$  é a área da seção transversal da barreira New-Jersey;
- $\gamma_{conc.}$  é o peso específico do concreto;
- $L_T^{elem.}$  é a dimensão transversal dos elementos em que a barreira New Jersey

será considerada, ou seja, os 2 elementos do bordo livre, cada um com 0,20m de largura.

Para carga móvel foi adotada a Classe 45 da NBR 7188:2013 ponderada pelos coeficientes de impacto vertical (CIV), de número de faixas (CNF) e de impacto adicional (CIA), definidos nessa norma.

O coeficiente de impacto vertical é dado pela seguinte expressão:

$$CIV = \begin{cases} 1,35, \text{ para vãos menores que } 10,0m \\ 1 + 1,06 \left( \frac{20}{L + 50} \right), \text{ para vãos entre } 10,0m \text{ e } 200m \end{cases} \quad (3.5)$$

onde  $L$  é o vão teórico do elemento carregado, expresso em metros.

Nas pontes estudadas,  $L=10,40m$ , assim, o coeficiente de impacto vertical é dado por

$$CIV = 1 + 1,06 \left( \frac{20}{10,4 + 50} \right) = 1,351 \quad (3.6)$$

O coeficiente de número de faixas é definido por

$$CNF = 1 - 0,05(n - 2) > 0,9 \quad (3.7)$$

onde  $n$  é o número inteiro de faixas de tráfego rodoviário a serem carregadas sobre um tabuleiro transversalmente contínuo. Acostamentos e faixas de segurança não são consideradas faixas de tráfego.

De acordo com a Figura 3.1,  $n=2$ . Assim, a expressão (3.7) fornece

$$CNF = 1 - 0,05(2 - 2) = 1,00 \quad (3.8)$$

A NBR 7188:2013 preconiza que as seções localizadas a uma distância horizontal, normal às juntas, inferior a 5,0m devem ser dimensionadas com os esforços de carga móvel majorados pelo coeficiente de impacto adicional (CIA), dado por

$$\begin{aligned} CIA &= 1,25, \text{ para obras em concreto ou mistas} \\ CIA &= 1,15, \text{ para obras em aço} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por simplificação, o coeficiente de impacto adicional foi aplicado a todas as solicitações devido às cargas móveis.

Para a aplicação da carga móvel, foi utilizado o trem tipo simplificado, onde o carregamento distribuído é posicionado inclusive na área do veículo-tipo. Nesse caso, deve-se subtrair a força resultante da carga distribuída, na área do veículo, de seu peso total. O trem tipo simplificado é mostrado na Figura 3.6.

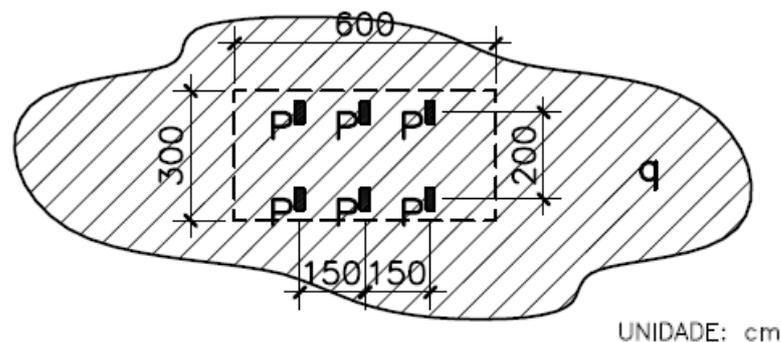


Figura 3.6 – Trem tipo simplificado em planta

As cargas da multidão  $q$  e de cada roda  $P$  são dadas por

$$\begin{aligned} q &= 5 \text{ kN/m}^2 \\ P &= \frac{450 \text{ kN} - [(6,00\text{m})(3,00\text{m})]5 \text{ kN/m}^2}{6 \text{ rodas}} = 60 \text{ kN/roda} \end{aligned} \quad (3.10)$$

O veículo-tipo foi disposto em 6 posições pré-definidas, como mostrado na Figura 3.7. A carga distribuída  $q$  foi aplicada em toda a superfície dos tabuleiros, descontadas apenas as áreas referentes aos guarda-rodas. As cargas das rodas foram aplicadas no modelo, em uma área equivalente à área de contato das rodas com o pavimento, projetada na superfície média da laje, considerando-se um espreadimento da carga em  $45^\circ$  (Figura 3.8). O comprimento e a largura de contato da roda do veículo com a pavimentação são os definidos na NBR 7188:2013, e valem 0,2m e 0,5m, respectivamente.

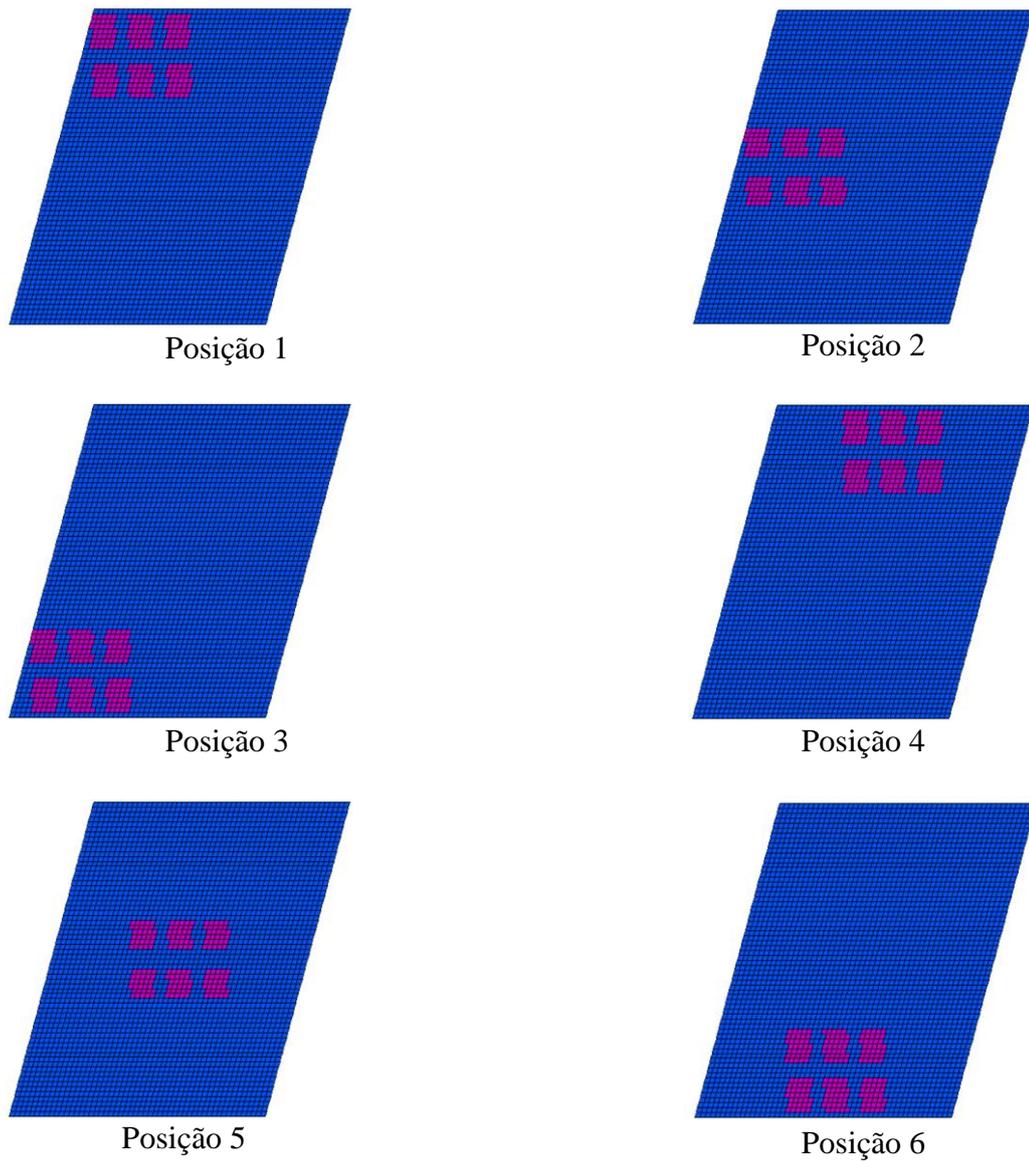


Figura 3.7 – Posicionamentos pré-definidos do veículo-tipo

A largura  $L_T$  e comprimento  $L_L$  da projeção do contato da roda com o pavimento, na superfície média da laje, são dados por

$$L_T = 0,50m + 2 \left( h_{pav.} + \frac{h_{laje}}{2} \right) \quad (3.11)$$

$$L_T = 0,50m + 2 \left( 0,10m + \frac{0,60m}{2} \right) = 1,30m$$

$$L_L = 0,20m + 2 \left( h_{pav.} + \frac{h_{laje}}{2} \right) \quad (3.12)$$

$$L_L = 0,20m + 2 \left( 0,10m + \frac{0,60m}{2} \right) = 1,00m$$

onde  $h_{pav}$  é a altura de pavimentação e  $h_{laje}$  é a altura da laje.

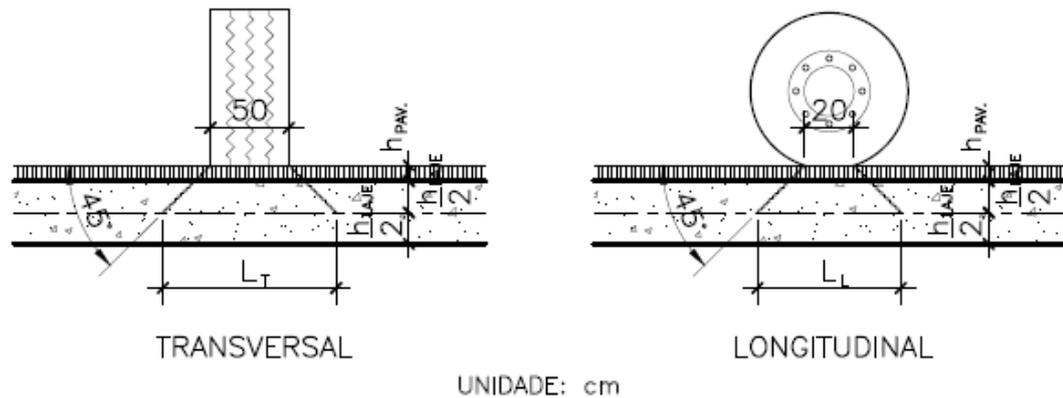


Figura 3.8 – Projeção do contato da roda com a pavimentação na superfície média da laje

Como as projeções da roda na superfície média da laje e as distâncias entre eixos do veículo-tipo não são múltiplos da malha discretizada,  $L_T$  e  $L_L$  foram adaptados, caso a caso, a valores próximos dos calculados aplicando-se a expressão (3.11), buscando-se respeitar tanto os comprimentos entre eixos quanto os das projeções das rodas. A carga  $Q$  de cada roda, por unidade de área, é dada por

$$Q = \frac{P}{L_T L_L} \quad (3.13)$$

### 3.3.2. Reações negativas e levantamento das lajes nos cantos

O processamento dos modelos indicou que em alguns nós de apoio houve reação negativa, mesmo nas combinações de cargas permanentes com as móveis. Tal comportamento só seria possível, caso o tipo de aparelho de apoio utilizado oferecesse vinculação contra o levantamento da laje, como uma articulação Freyssinet. Esse tipo de solução, todavia, está em desuso e as soluções usuais são a utilização de aparelhos de apoio de borracha neoprene fretada ou simples apoio em junta seca, que não impedem o levantamento da laje.

Foram elaborados modelos alternativos, simulando-se as soluções usuais, para a comparação dos resultados. A utilização de neoprenes foi simulada com a restrição apenas dos nós referentes aos aparelhos de apoio. Foram considerados 7 aparelhos de apoio de cada lado, afastados transversalmente de 2,0m, conforme mostrado na Figura 3.9. A solução em junta seca foi simulada, modificando-se a restrição em Z dos modelos originais para resistir apenas à compressão.

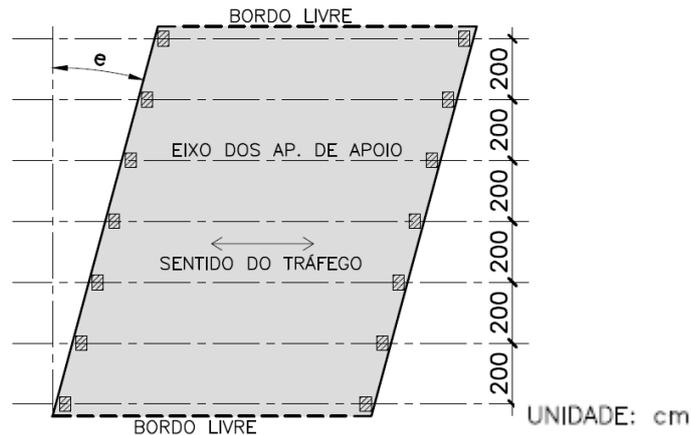


Figura 3.9 – Posicionamento dos aparelhos de apoio na laje

O modelo, considerando aparelhos de apoio em neoprene, apresentou reações de peso próprio bastante superiores aos levantamentos devido às cargas móveis. As solicitações na região do meio do vão foram bastante semelhantes às dos outros dois modelos. Entretanto, a introdução das forças elevadas de reação nos apoios gera uma região de perturbação nas solicitações, dificultando a interpretação de resultados de pontos isolados. Por esse motivo, tal modelo foi descartado para este estudo, mesmo sendo aplicável ao dimensionamento prático. As tensões normais nos aparelhos de apoio de borracha neoprene fretada devem satisfazer valores mínimos para que não haja escorregamento. Caso essas tensões mínimas não sejam atendidas, deve-se reduzir a quantidade de aparelhos de apoio ou diminuir suas dimensões em planta, de forma a aumentar as tensões normais e garantir a estabilidade dos mesmos.

Verifica-se que praticamente não há alteração das solicitações nos modelos com restrição total à translação em Z e com a restrição em Z modificada para resistir apenas à compressão. Destaque-se, porém, que o canto de ângulo obtuso apresenta uma pequena redução do pico de solicitações no modelo modificado.

A Figura 3.10 apresenta o diagrama de  $M_x$ , devido ao peso próprio estrutural, no modelo com ângulo de escuridade de 45° e restrição total à translação em Z. A Figura 3.11 mostra o mesmo diagrama para o modelo com restrição em Z apenas à compressão e a Figura 3.12 apresenta o diagrama para o modelo com restrição localizada na posição dos aparelhos de apoio. A semelhança entre os diagramas é observada em todas as solicitações e carregamentos.

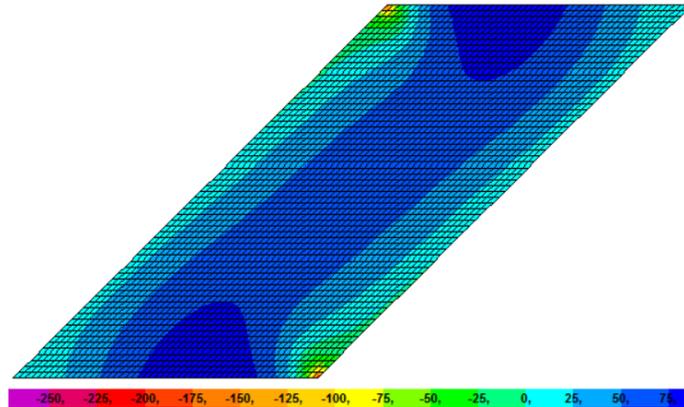


Figura 3.10 – Diagrama de  $M_x$  (kN.m/m) devido ao peso próprio estrutural para o modelo original

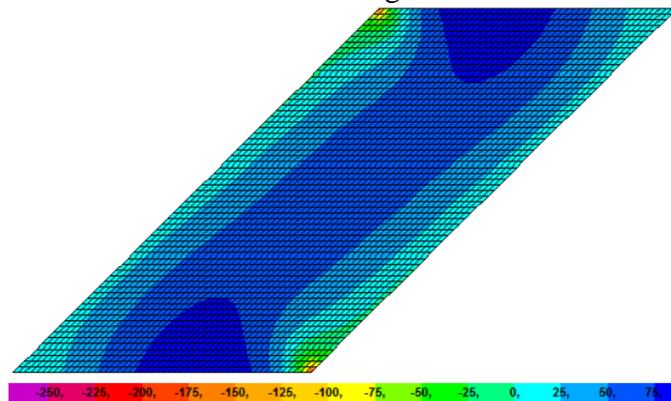


Figura 3.11 – Diagrama de  $M_x$  (kN.m/m) devido ao peso próprio estrutural para o modelo simulando junta seca

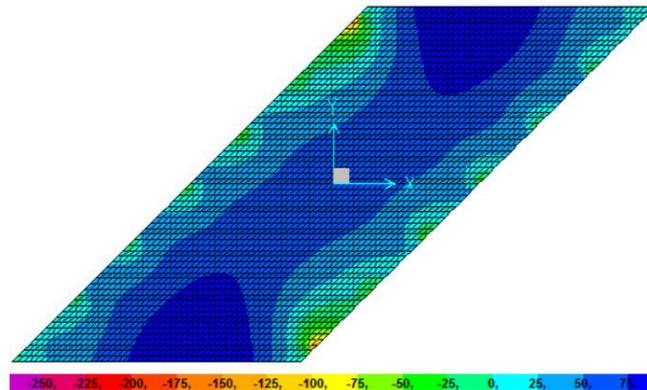


Figura 3.12 – Diagrama de  $M_x$  (kN.m/m) devido ao peso próprio estrutural para o modelo simulando a utilização de neoprenes

Os três tipos de vinculação são apropriados para a análise. Neste trabalho, porém, apenas o tipo proposto, inicialmente, foi utilizado, dado que resultam nas mesmas solicitações obtidas, simulando-se as condições de apoio de compressão apenas, com maior velocidade de processamento e sem apresentar as perturbações devido às reações elevadas nos aparelhos de apoio.

### 3.3.3. Critérios de dimensionamento

#### 3.3.3.1. Seções críticas e combinações

Foram escolhidos 6 pontos, em cada modelo, para o dimensionamento das armaduras, conforme apresentado na Figura 3.13.

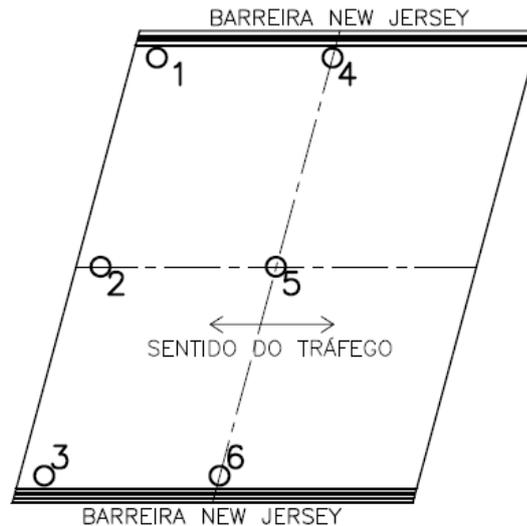


Figura 3.13 – Pontos escolhidos para o dimensionamento

As ações foram combinadas através da expressão a seguir:

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} F_{Gi,k} + \gamma_q \left[ F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \psi_{0j} F_{Qj,k} \right] \quad (3.14)$$

onde

- $F_{Gi,k}$  é o valor característico das ações permanentes;
- $F_{Q1,k}$  é o valor característico da ação variável considerada como ação principal para a combinação;
- $\psi_{0j} F_{Qj,k}$  é o valor reduzido de cada uma das demais ações variáveis, tomadas como secundárias para a combinação.

A equação (3.14) é preconizada pela NBR 8681:2003 – Ações e segurança nas estruturas, para Combinações Últimas Normais.

As pontes estudadas estão sujeitas a uma única ação variável, não sendo necessária a utilização do fator de combinação  $\psi_0$  para ações variáveis de origens diferentes. A Tabela 3.1

resume os coeficientes de ponderação das ações adotados, também conforme a NBR 8681:2003.

Tabela 3.1 – Coeficientes de ponderação para as combinações últimas

Tipo de ação	Favorável	Desfavorável
Cargas permanentes	1,35	1,00
Cargas móveis	1,50	0,00

Para cada caso de posicionamento da carga móvel, a equação (3.14) e a Tabela 3.1 fornecem as seguintes combinações de dimensionamento:

$$F_d = \begin{cases} 1,35 \times F_{Gk} + 1,50 \times F_{Qk} \\ 1,00 \times F_{Gk} + 1,50 \times F_{Qk} \\ 1,35 \times F_{Gk} + 0,00 \times F_{Qk} \\ 1,00 \times F_{Gk} + 0,00 \times F_{Qk} \end{cases} \quad (3.15)$$

Tabela 3.2 – Combinações utilizadas no dimensionamento de cada ponto escolhido

Nº	Combinação
1	$1,35 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.1} + F_{mult.} )$
2	$1,00 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.1} + F_{mult.} )$
3	$1,35 \times F_g$
4	$1,00 \times F_g$
5	$1,35 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.2} + F_{mult.} )$
6	$1,00 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.2} + F_{mult.} )$
7	$1,35 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.3} + F_{mult.} )$
8	$1,00 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.3} + F_{mult.} )$
9	$1,35 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.4} + F_{mult.} )$
10	$1,00 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.4} + F_{mult.} )$
11	$1,35 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.5} + F_{mult.} )$
12	$1,00 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.5} + F_{mult.} )$
13	$1,35 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.6} + F_{mult.} )$
14	$1,00 \times F_g + 1,50 \times ( F_{veic.6} + F_{mult.} )$

-  $F_g$  é a solicitação devido às cargas permanentes

-  $F_{veic.i}$  é a solicitação devido às cargas do veículo na posição  $i$

-  $F_{mult.}$  é a solicitação devido às cargas de multidão

As duas últimas combinações consideram apenas a carga permanente, portanto são iguais em todos os casos de posicionamento da carga móvel. Assim, para cada ponto escolhido existem 14 combinações de dimensionamento diferentes. A Tabela 3.2 resume as combinações utilizadas para o dimensionamento dos seis pontos estudados em cada modelo.

### 3.3.3.2. Armaduras no plano da laje

Para o dimensionamento das armaduras no plano da laje, foram utilizados os parâmetros  $k_c = 0,3$  e  $k_z = 0,9$  nas equações (2.5) e (2.6), os mesmos recomendados por LEONHARDT (1978). Assim, o braço de alavanca médio  $z_m$  e a espessura das chapas  $t_c$  são dados por

$$z_m = k_z \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = 0,9 \left( \frac{0,57 + 0,56}{2} \right) = 0,509 \text{ m} \quad (3.16)$$

$$t_c = k_c \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = 0,3 \left( \frac{0,57 + 0,56}{2} \right) = 0,170 \text{ m} \quad (3.17)$$

Foi considerado o Aço CA-50, classificado pela NBR 7480:2007, para determinação das armaduras. A tensão de escoamento de projeto  $f_{yd}$  é dada por

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500 \text{ MPa}}{1,15} = 434,8 \text{ MPa} \quad (3.18)$$

onde  $f_{yk}$  é a tensão de escoamento característica do aço e  $\gamma_s$  é o coeficiente de ponderação da resistência do aço no estado-limite último (ELU).

A tensão admissível do concreto foi limitada a 60% da resistência de cálculo à compressão do concreto  $f_{cd}$ , como recomenda o Eurocode 2 (2004). Assim, o valor da tensão no concreto  $\sigma_c$  deve ser limitado a

$$\sigma_c \leq 0,60 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,60 \frac{35}{1,4} = 15,00 \text{ MPa} \quad (3.19)$$

onde  $\gamma_c$  é o coeficiente de ponderação da resistência do concreto no estado-limite último (ELU).

A partir do dimensionamento das 14 combinações de cada ponto, foram identificadas as combinações que forneceram os seguintes parâmetros:

- $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$  → força por unidade de comprimento máxima na armadura superior na direção do tráfego  $\alpha$

- $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  → força por unidade de comprimento máxima na armadura superior na direção transversal  $\beta$

- $f_{s\alpha, \text{inf}, \text{máx}}$  → força por unidade de comprimento máxima na armadura inferior na direção do tráfego  $\alpha$

- $f_{s\beta, \text{inf}, \text{máx}}$  → força por unidade de comprimento máxima na armadura inferior na direção transversal  $\beta$

- $|f_{c\phi}|_{\text{sup}, \text{máx}}$  → força por unidade de comprimento máxima no concreto, em módulo, segundo a inclinação das microfissuras  $\phi$ , na chapa superior

- $|f_{c\phi}|_{\text{inf,máx}} \rightarrow$  força por unidade de comprimento máxima no concreto, em módulo, segundo a inclinação das microfissuras  $\phi$ , na chapa inferior
- $F_{zd,\text{máx}} \rightarrow$  força cortante transversal de dimensionamento por unidade de comprimento máxima na casca ( $V_{sd}$ )

### 3.3.3.3. Armaduras transversais ao plano da laje

As armaduras transversais foram dimensionadas para  $F_{zd,\text{máx}}$  de acordo com o método preconizado pela NBR 6118:2014, que estabelece que as lajes devem ser armadas transversalmente ao seu plano se a força cortante solicitante de cálculo  $V_{sd}(F_{zd,\text{máx}})$  for maior que a força cortante resistente de cálculo  $V_{Rd1}$ , dada por

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd}k(1,2 + 40\rho_1) + 0,15\sigma_{cp}]b_wd \quad (3.20)$$

onde

- $\tau_{Rd}$  é a tensão resistente de cálculo ao cisalhamento;
- $\rho_1 = A_{s1}/b_wd$ , não maior que  $|0,02|$ ;
- $A_{s1}$  é a área da armadura de tração decalada e ancorada na seção considerada;
- $\sigma_{cp} = N_{sd}/A_c$
- $N_{sd}$  é a força longitudinal na seção devido à protensão ou carregamento, considerando-se a compressão com sinal positivo;
- $A_c$  é área de concreto na seção considerada;
- $k$  é um coeficiente que assume os seguintes valores:
  - $k = 1$  para elementos em que 50% da armadura inferior não chega até o apoio
  - $k = |1,6 - d| \geq 1$  para os demais casos, com  $d$  em metros
- $b_w$  é a largura mínima da seção ao longo da altura útil  $d$ . No caso das lajes dimensionadas a uma força cortante por unidade de comprimento,  $b_w$  assume valor unitário.

A expressão (3.20) aplica-se a vigas e lajes estruturadas em apenas um sentido. Sendo assim, a direção da força cortante principal coincide com a direção das armaduras longitudinais  $A_{s1}$  e da força longitudinal  $N_{sd}$  na seção. Os métodos preconizados pelo Eurocode 2 (2004) e pelo CEB-FIP Model Code 2010, para a determinação da força cortante resistente de cálculo, também consideram elementos estruturados em apenas uma direção.

Na avaliação da força cortante resistente de cálculo de lajes estruturadas em duas direções ortogonais  $x$  e  $y$ , o CEB-FIP Model Code 1990 e o Eurocode 2 (2004) fornecem a

seguinte expressão, para a determinação da taxa equivalente de armadura  $\rho_\theta$ , na direção  $\theta$  do cortante principal:

$$\rho_\theta = \rho_x \cos^4 \theta + \rho_y \sin^4 \theta \quad (3.21)$$

onde

- $\rho_x$  é a taxa de armadura no plano da laje na face tracionada na direção x;
- $\rho_y$  é a taxa de armadura no plano da laje na face tracionada na direção y;
- $\theta$  é o ângulo entre o eixo x e a direção do cortante principal, calculada pela equação (2.70).

A Figura 3.14 apresenta a variação da direção  $\theta$  do cortante principal nas pontes em laje sem vigas laterais. Junto aos apoios, essa direção é praticamente ortogonal à aresta de apoio em todos os casos, enquanto na região do meio do vão, varia bastante, em função do posicionamento do veículo-tipo. O ângulo entre o esforço cortante principal e a armadura principal é nulo nas lajes ortogonais, mas cresce com o aumento da esconsidade. Como a direção das armaduras nem sempre concorda com a direção principal de cisalhamento, e a expressão (3.21) se aplica somente às lajes com armaduras ortogonais, optou-se por desconsiderar, a favor da segurança, a contribuição de  $\rho_1$  em  $V_{Rd1}$  (expressão (3.20)).

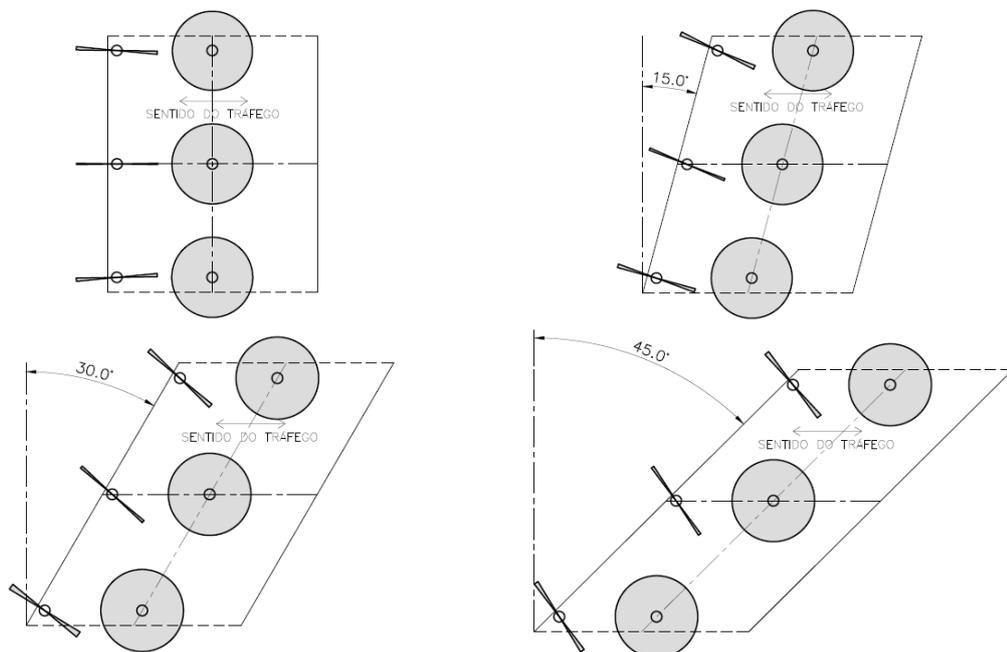


Figura 3.14 – Variação da direção do cortante principal de dimensionamento nos Modelos 1 a

4

Segundo a NBR 6118:2014 a tensão resistente de cálculo ao cisalhamento  $\tau_{Rd}$  é dada por

$$\tau_{Rd} = 0,25 f_{ctd} \quad (3.22)$$

onde  $f_{ctd}$  é a resistência à tração de cálculo do concreto dada por

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} \quad (3.23)$$

A resistência à tração direta característica inferior  $f_{ctk,inf}$  é dada por

$$f_{ctk,inf} = 0,7f_{ctm} \quad (3.24)$$

com  $f_{ctm} = (0,3)(f_{ck})^{\frac{2}{3}}$ .

Para os casos estudados, a expressão (3.23) fornece, para a resistência à tração de cálculo do concreto,

$$f_{ctd} = (0,7)(0,3)(35)^{\frac{2}{3}} / 1,4 = 1,605 \text{ MPa} \quad (3.25)$$

A tensão resistente de cálculo ao cisalhamento dada pela equação **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** é

$$\tau_{Rd} = 0,25(1,605) = 0,401 \text{ MPa} \quad (3.26)$$

Para as pontes em laje, foi considerado, simplificada, na aplicação da expressão **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**  $k=1$ , admitindo-se que o detalhamento das armaduras possa ser diferenciado para cada ponto dimensionado. A força longitudinal na seção, devido aos carregamentos, foi considerada como a força principal por unidade de comprimento  $F_l$  no plano da casca, correspondente à combinação que determinou  $F_{zd,máx}$ .

Verificada a necessidade de armadura transversal em cada ponto, as armaduras no plano da laje foram recalculadas considerando-se os acréscimos de forças nas chapas, de acordo com as equações (2.85), (2.86) e (2.87). O dimensionamento das armaduras foi feito seguindo-se o modelo de cálculo I da NBR 6118:2014, em que se admite a inclinação  $\phi=45^\circ$  das diagonais de compressão, em relação ao plano da laje. Admite-se ainda que a parcela complementar  $V_C$  seja constante, independentemente de  $V_{Sd}$ .

A verificação da compressão da diagonal do concreto é atendida quando

$$V_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} b_w d > V_{Sd} \quad (3.27)$$

com  $\alpha_v = (1 - f_{ck}/250)$  e  $f_{ck}$  expresso em MPa.

A parcela da força cortante resistida pela armadura transversal  $V_{sw}$  é dada por

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_C \quad (3.28)$$

A parcela da força cortante resistida por mecanismos complementares ao modelo da treliça  $V_C$ , na flexão simples ou flexo-tração com a linha neutra cortando a seção, é dada por

$$V_C = V_{C0} = 0,6f_{ctd} b_w d \quad (3.29)$$

nos elementos tracionados ou na flexo-tração, quando a linha neutra encontra-se fora da seção,  $V_C=0$ .

Na flexo-compressão  $V_C$  é dado por

$$V_C = V_{C0} (1 + M_0/M_{Sd,máx}) \leq 2V_{C0} \quad (3.30)$$

onde

- $M_0$  é o momento que anula a tensão normal de compressão na borda da seção (tracionada por  $M_{d,máx}$ ), provocada pelas forças normais de diversas origens concomitantes a  $V_{sd}$ .
- $M_{Sd,máx}$  é o momento fletor de cálculo máximo no trecho em análise, não se considerando o momento isostático de protensão, mas o hiperestático.

A armadura transversal  $A_{sw}$  é dada por

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sw}}{0,9df_{ywd}} (\text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha) \geq 0,2 \frac{f_{ctm}b_w \text{sen}\alpha}{f_{ywk}} \quad (3.31)$$

onde

- $s$  é o espaçamento da armadura transversal medido segundo o eixo do elemento;
- $\alpha$  é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento, podendo-se tomar  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Neste trabalho será considerado  $\alpha=90^\circ$ ;
- $f_{ywd}$  é a tensão na armadura transversal passiva, limitada a  $f_{yd}$ , no caso de estribos, e  $0,7f_{ywd}$ , no caso de barras dobradas, não assumindo valores maiores que 435MPa.

Nas lajes, a resistência dos estribos ainda deve ser limitada a 250MPa, para lajes de até 15cm de espessura, e 435MPa, para lajes com espessura superior a 35cm, sendo permitida a interpolação linear para alturas intermediárias.

Nas lajes estudadas, onde  $f_{ck}=35\text{MPa}$  e está sendo considerado o emprego do aço CA-50, a armadura transversal mínima é

$$\frac{A_{sw,mín}}{s} \geq 0,2 \frac{(0,3)(35)^{\frac{2}{3}} 1,00 \text{sen}90^\circ}{500} = 12,84 \text{cm}^2/\text{m} \quad (3.32)$$

### 3.3.4. Resultados do dimensionamento das cascas às solicitações transversais ao plano dos elementos

As Figuras 3.15 a 3.18 apresentam o cortante principal de dimensionamento, sua direção  $\theta$  e o cortante resistente de cálculo nas quatro pontes em laje sem vigas laterais estudadas.

Não foi necessária armadura de cisalhamento para a ponte sem esconsidade. Para a ponte com ângulo de esconsidade  $e=15^\circ$ , o cortante principal de dimensionamento no ponto 1 (canto de ângulo obtuso) superou a força cortante resistente, portanto, a região deve ser armada. Nas pontes com ângulo de esconsidade  $e=30^\circ$  e  $e=45^\circ$ , são necessárias armaduras de cisalhamento junto ao apoio nos cantos de ângulo obtuso e no eixo das pontes. Em todos os casos, os mecanismos complementares ao modelo em treliça foram suficientes para resistir ao cortante principal de dimensionamento, resultando em armadura mínima.

### 3.3.5. Resultados do dimensionamento das armaduras no plano das lajes e tensões no concreto

Nas Figuras 3.19 a 3.42, são apresentados os resultados do dimensionamento dos 6 pontos escolhidos para as pontes sem vigaslaterais.

Na determinação das armaduras e tensões no concreto, foram considerados os acréscimos de força por unidade de comprimento, devido à força cortante transversal, apenas nos pontos onde foi necessária a utilização de armadura transversal ao plano da laje.

Sobre a armadura superior, na direção  $\alpha$ , observa-se que

- embora as lajes sejam laje biapoiadas, são necessárias armaduras superiores no canto de ângulo obtuso das lajes esconsas;
- as áreas de aço necessárias são pequenas, mas aumentam à medida que aumenta a esconsidade;
- no eixo da ponte, junto ao apoio, também são necessárias armaduras nos casos com elevados ângulos de esconsidade;
- nos demais pontos, não são necessárias armaduras;
- em todos os casos, as armaduras calculadas foram inferiores às armaduras mínimas.

$V_{Sd}$ ,  $V_{Rd1}$  e  $A_{sw}$



Figura 3.15– Forças cortantes de dimensionamento e resistentes no modelo 1 ( $e=0^\circ$ )

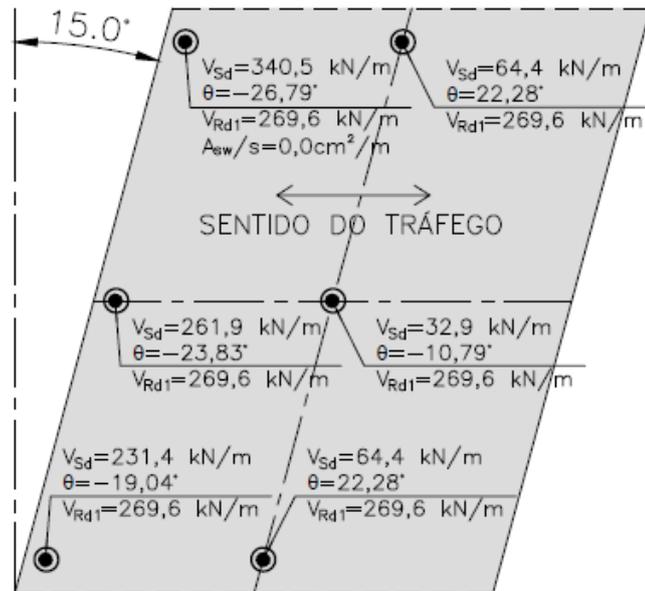


Figura 3.16 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 2 ( $e=15^\circ$ )

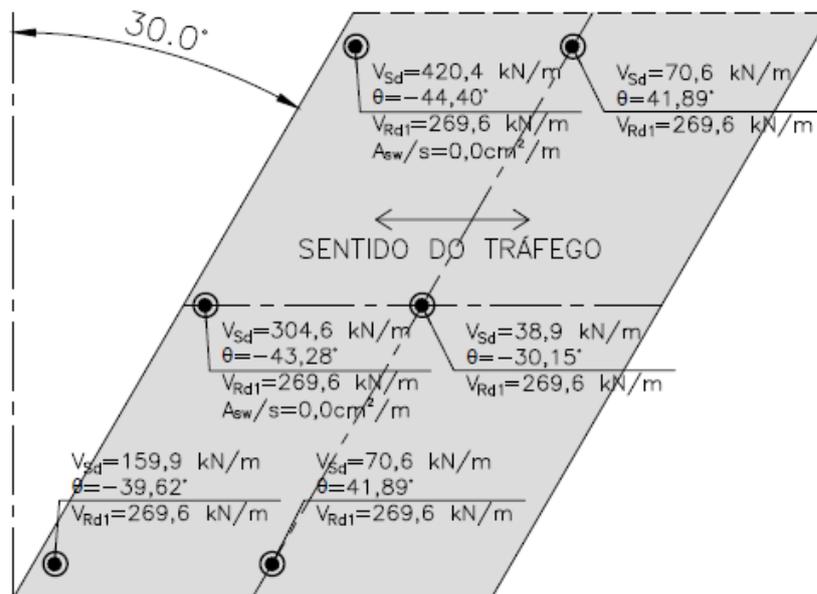


Figura 3.17 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 3 ( $e=30^\circ$ )

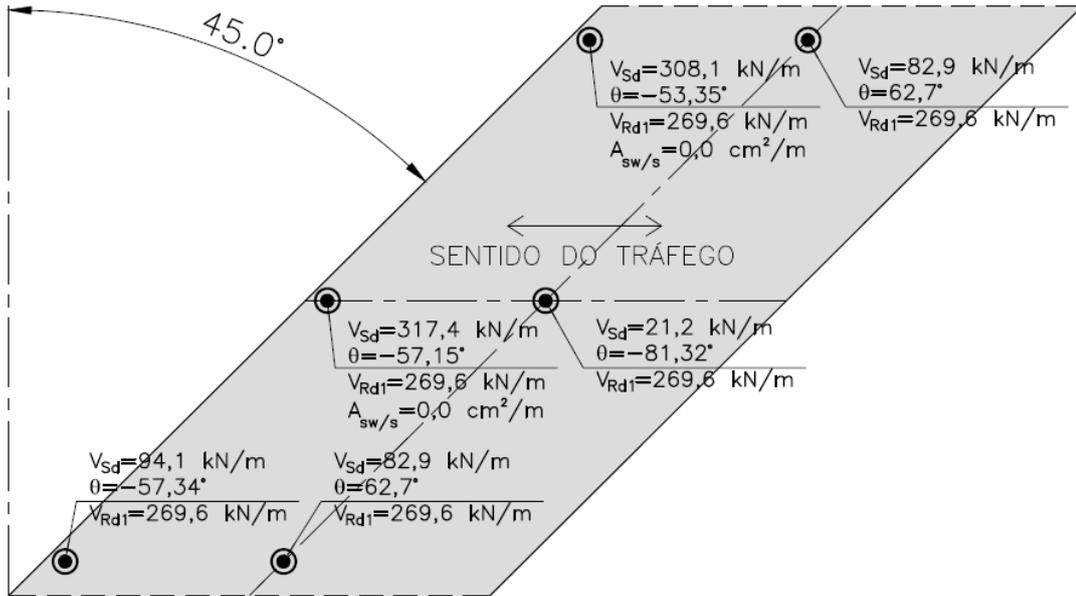


Figura 3.18 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente no modelo 4 ( $e=45^\circ$ )

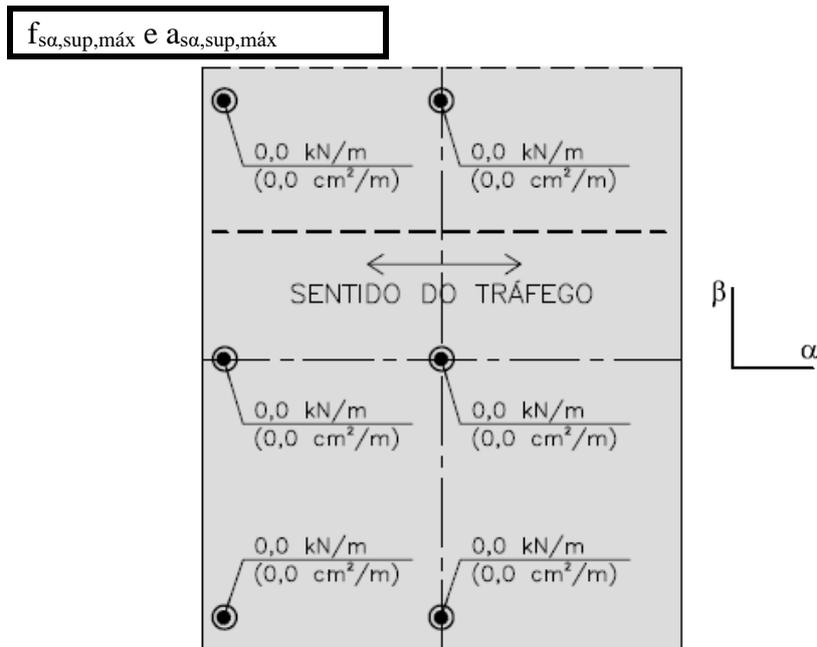


Figura 3.19 – Resultados para  $\hat{f}_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , com  $e=0^\circ$

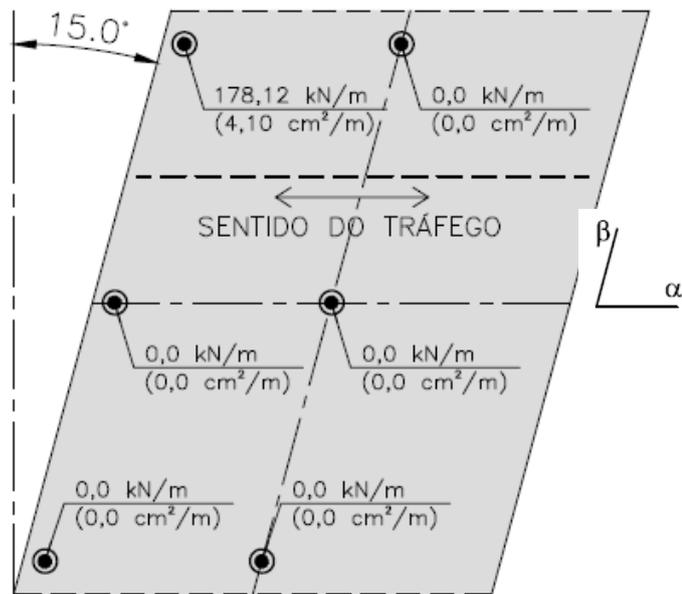


Figura 3.20 – Resultados para  $f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , com  $e=15^\circ$

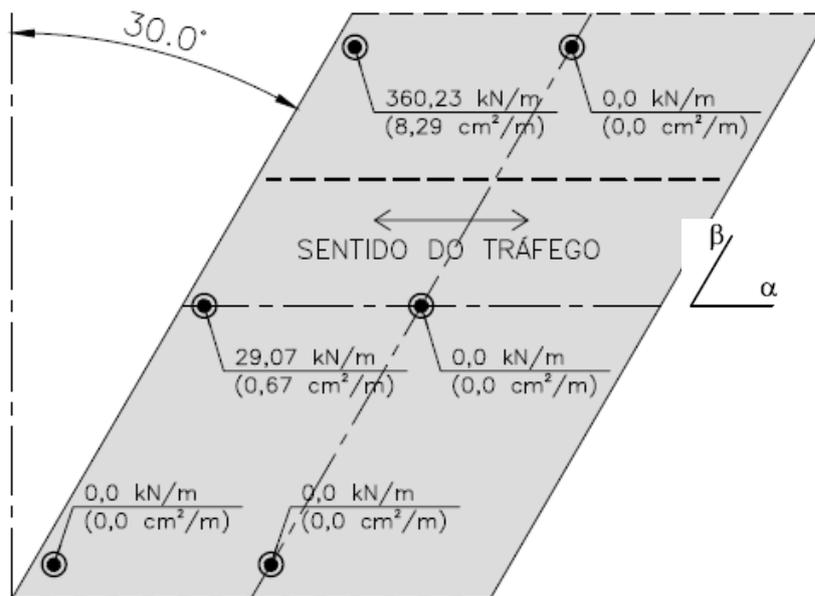


Figura 3.21 – Resultados para  $f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , com  $e=30^\circ$

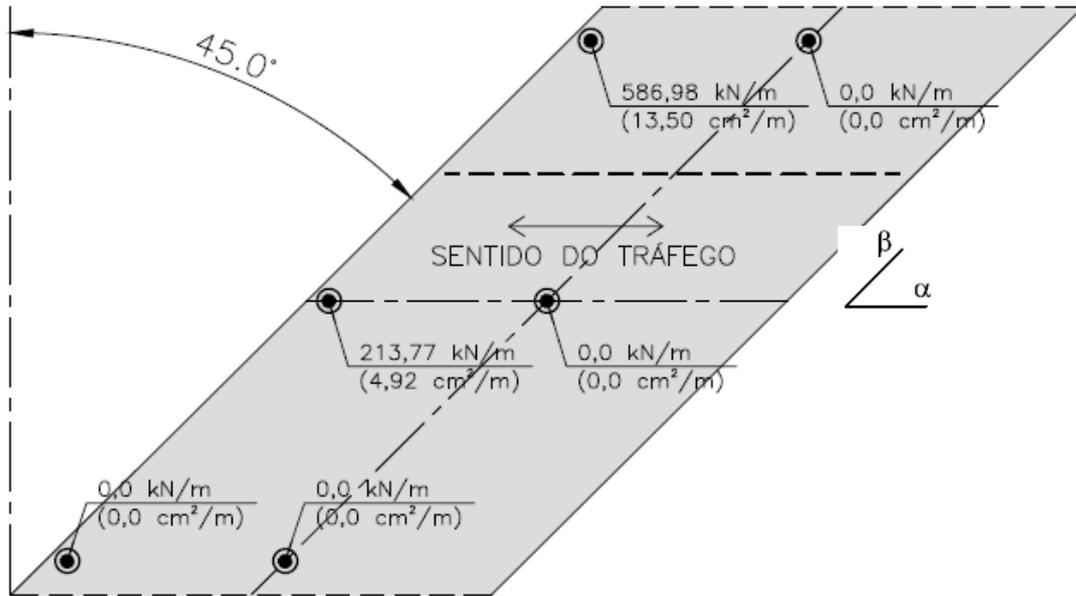


Figura 3.22 – Resultados para  $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ ,  $\text{come}=45^\circ$

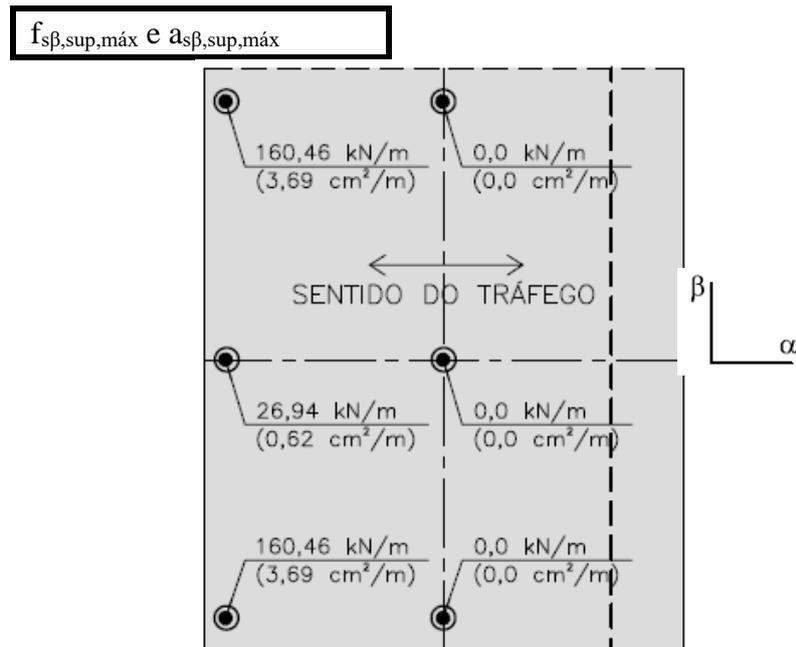


Figura 3.23 – Resultados para  $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ ,  $\text{com}=0^\circ$

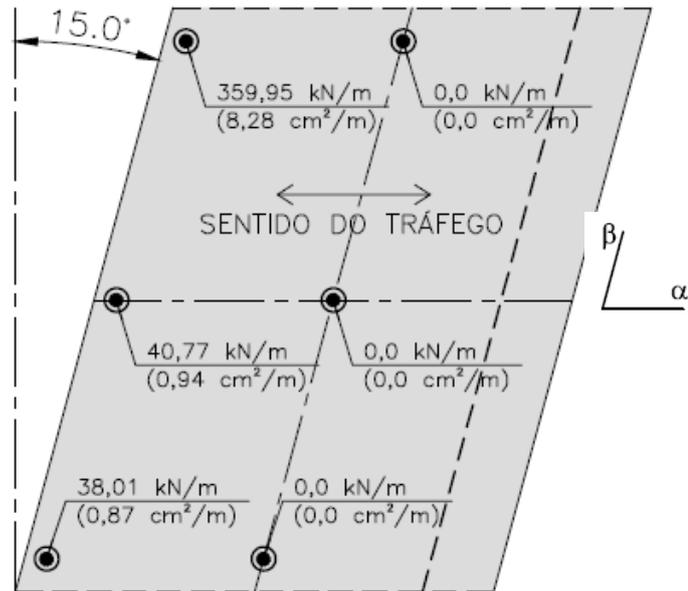


Figura 3.24 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ ,  $come=15^\circ$

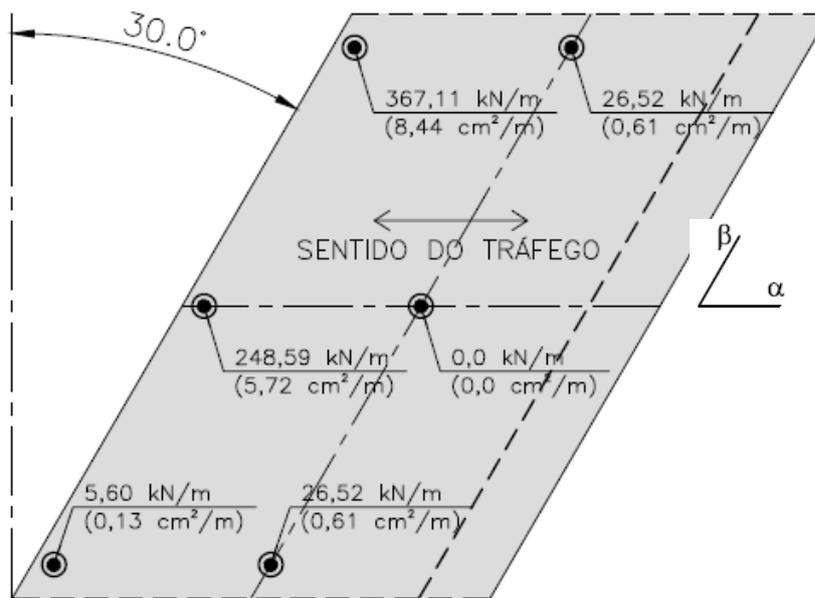


Figura 3.25 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ ,  $come=30^\circ$

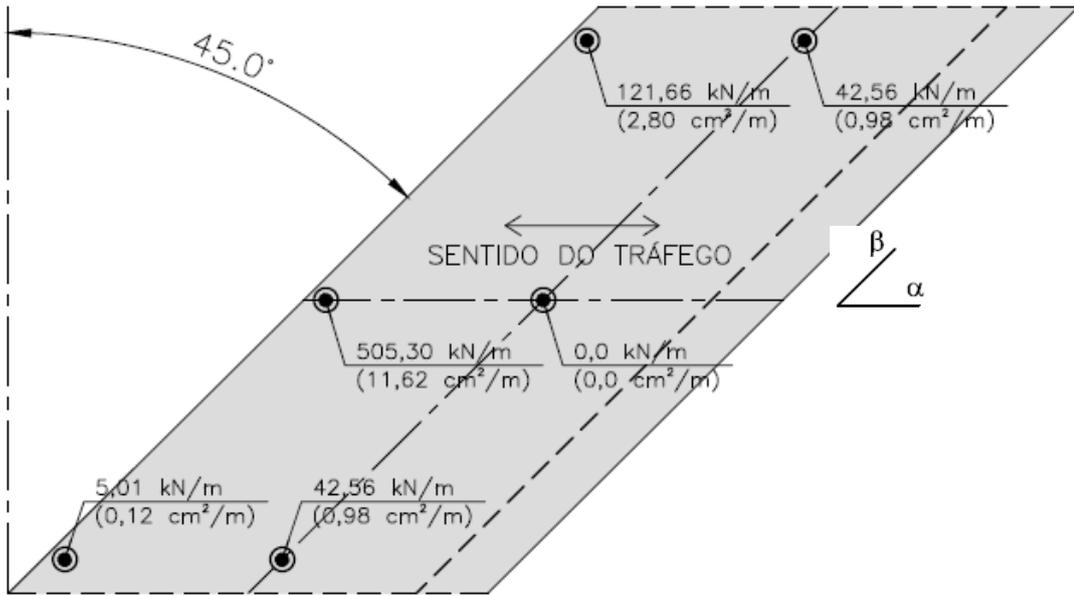


Figura 3.26 – Resultados para  $f_{s\beta,\text{sup,máx}}$  e  $a_{s\beta,\text{sup,máx}}$ ,  $\text{come}=45^\circ$

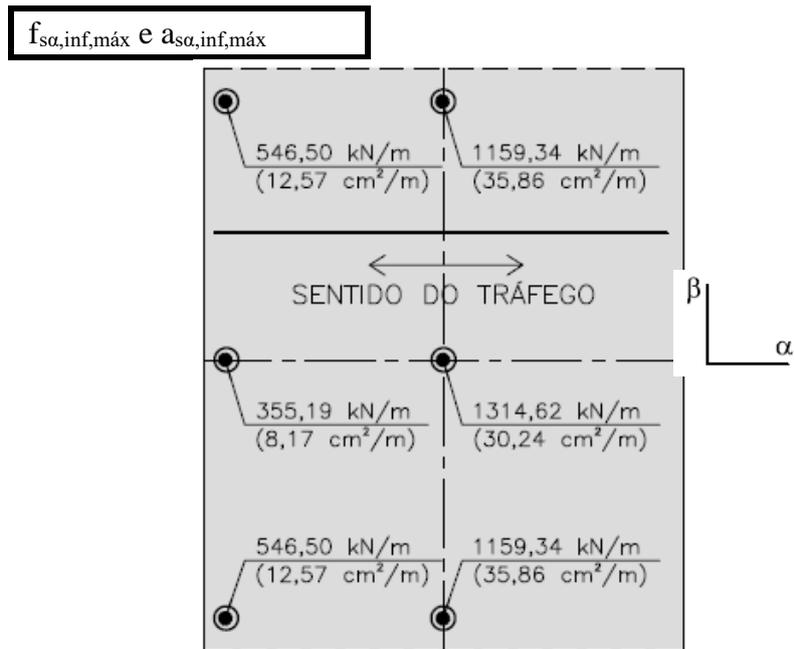


Figura 3.27 – Resultados para  $f_{s\alpha,\text{inf,máx}}$  e  $a_{s\alpha,\text{inf,máx}}$ ,  $\text{come}=0^\circ$

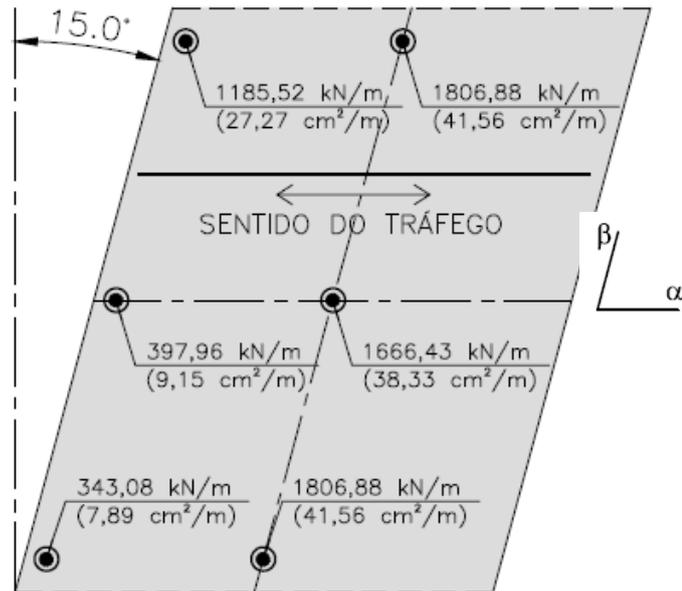


Figura 3.28– Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\text{come}=15^\circ$

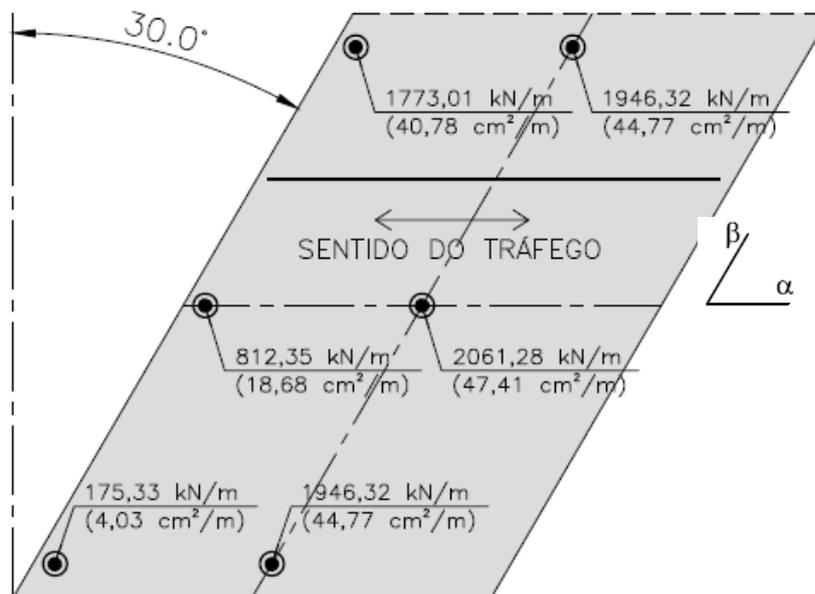


Figura 3.29 – Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\text{come}=30^\circ$

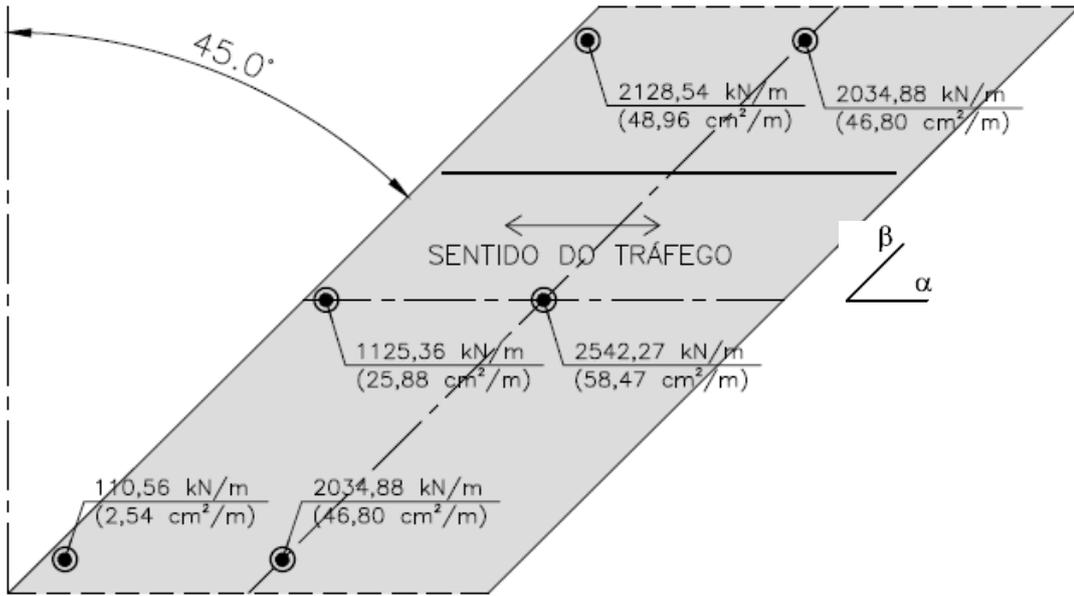


Figura 3.30 – Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=45^\circ$

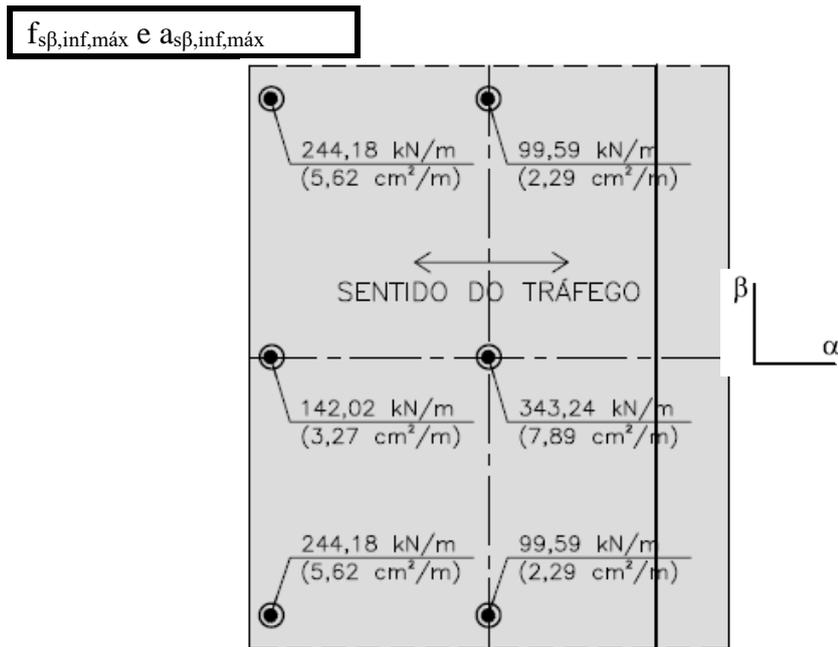


Figura 3.31 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=0^\circ$

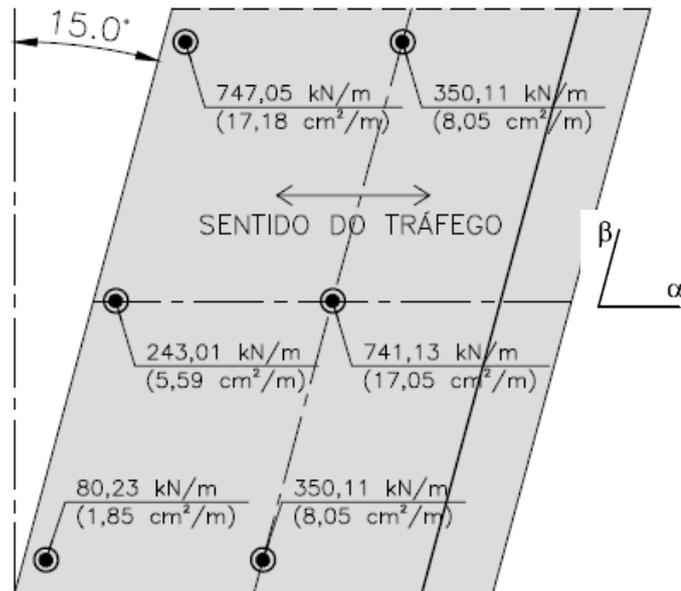


Figura 3.32 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=15^\circ$

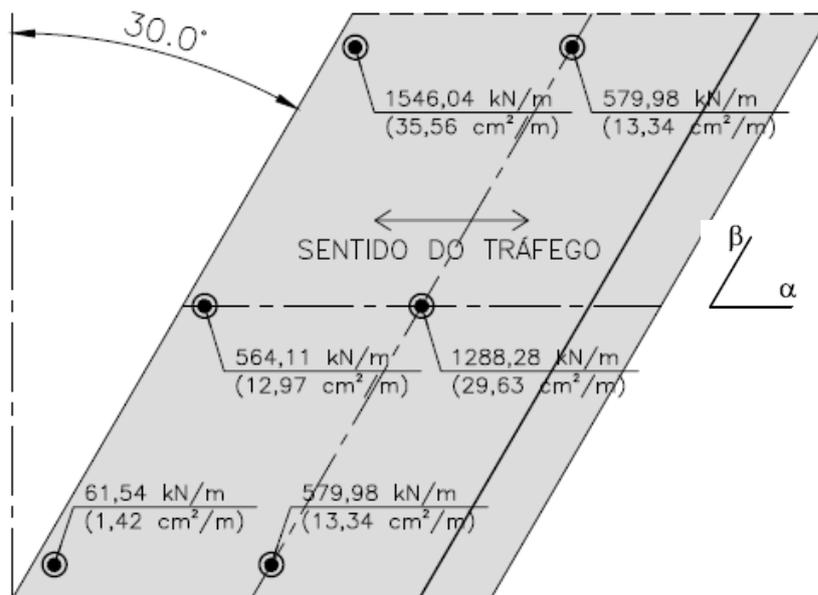


Figura 3.33 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=30^\circ$

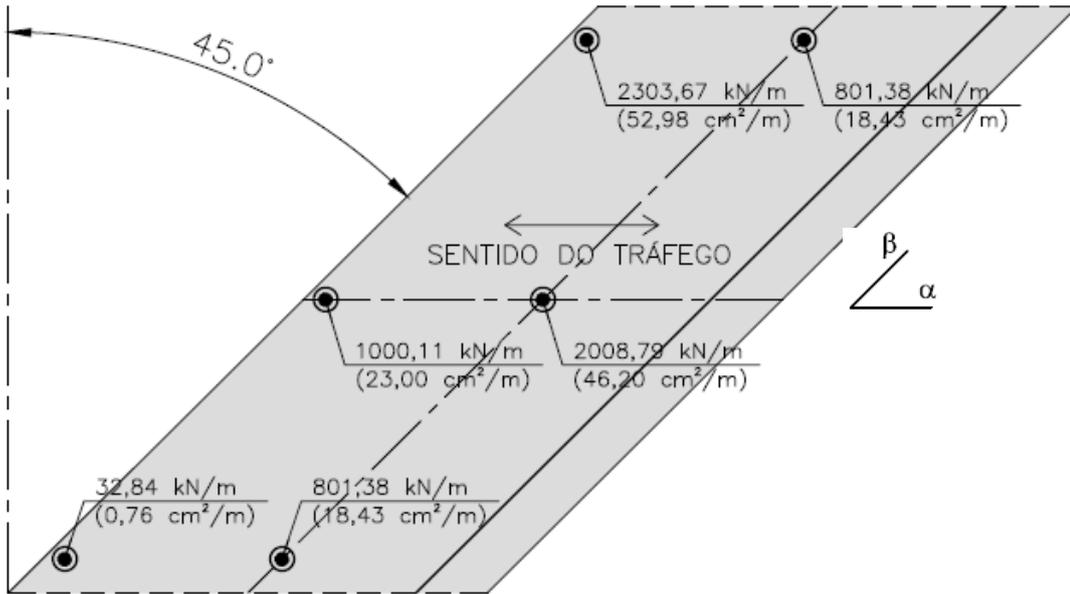


Figura 3.34 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=45^\circ$

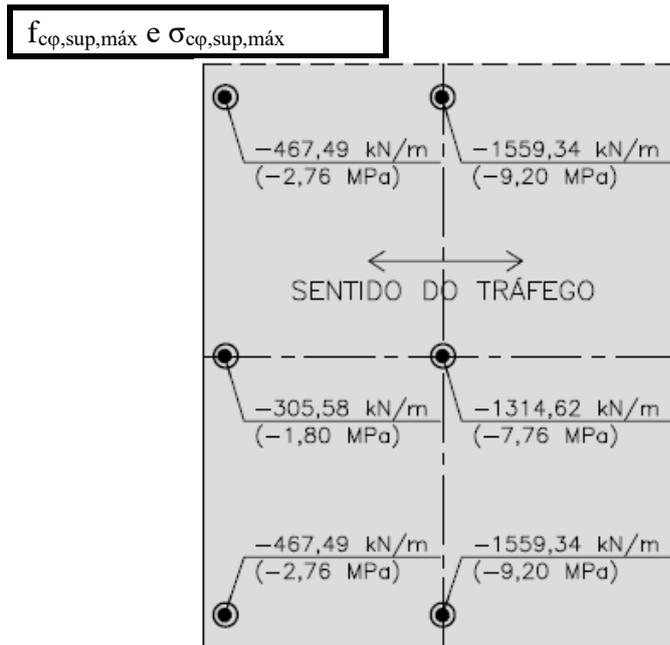


Figura 3.35 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ ,  $come=0^\circ$

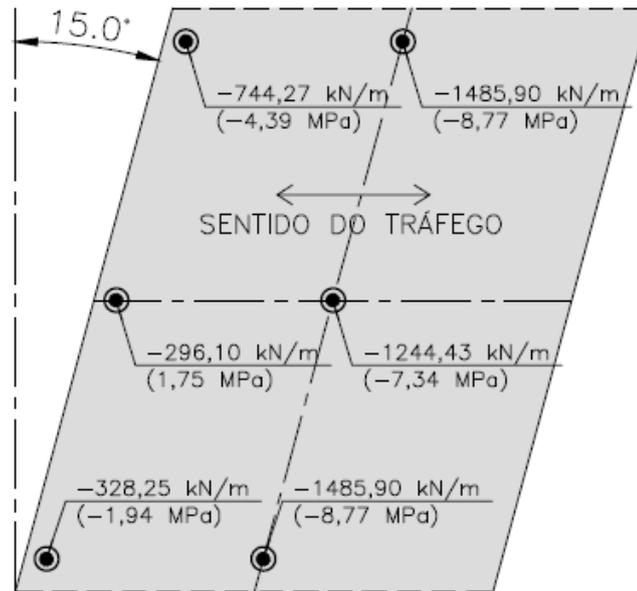


Figura 3.36 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,máx}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,máx}$ , come=15°

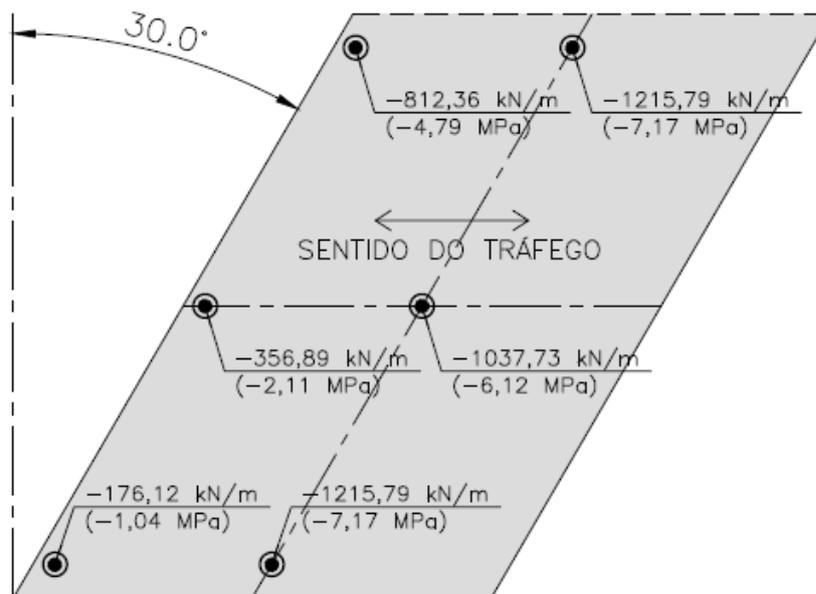


Figura 3.37 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,máx}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,máx}$ , come=30°

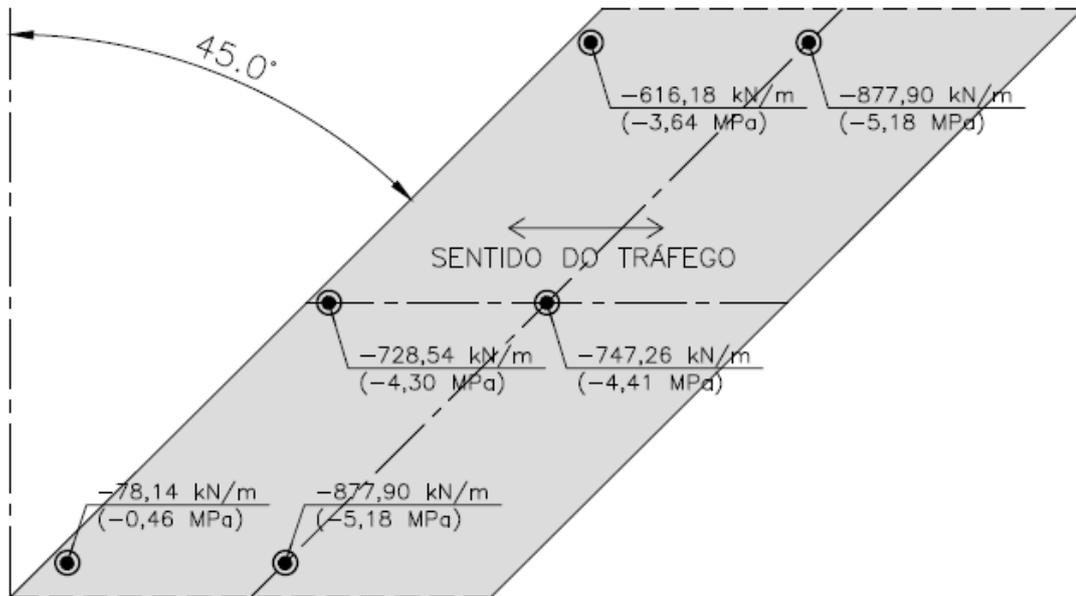


Figura 3.38 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ ,  $come=45^\circ$

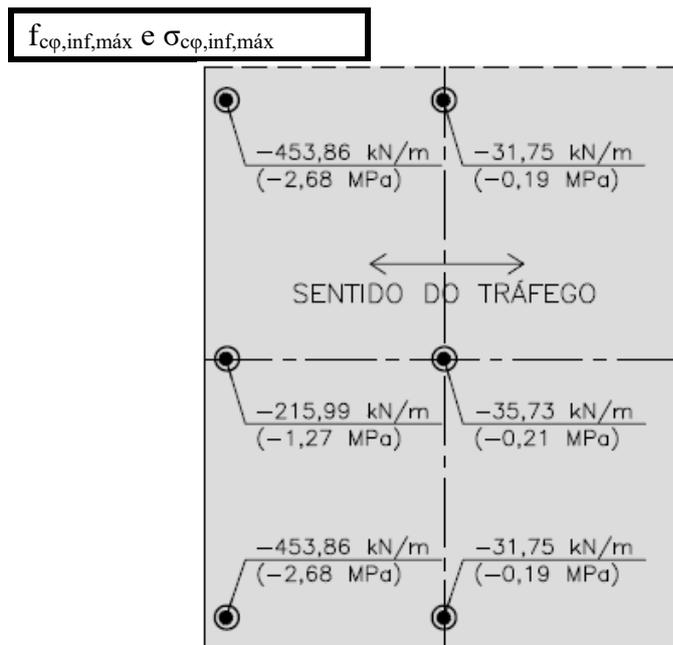


Figura 3.39 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=0^\circ$

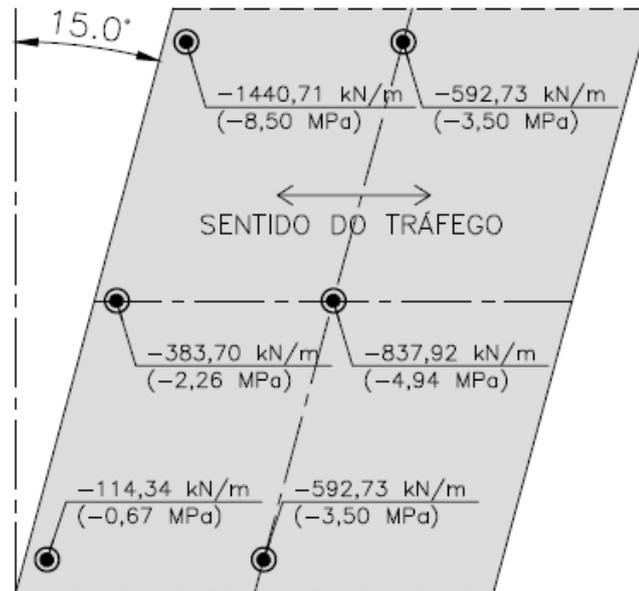


Figura 3.40– Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , come=15°

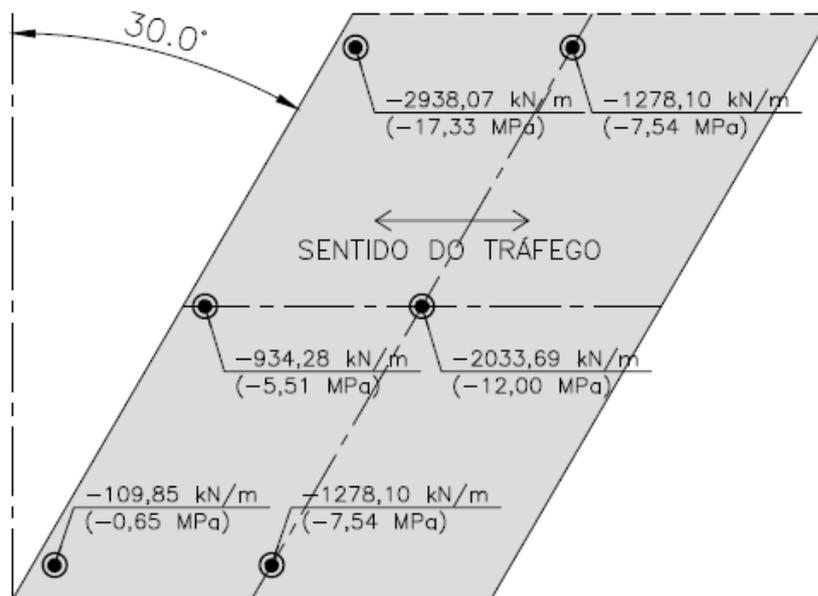


Figura 3.41 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , come=30°

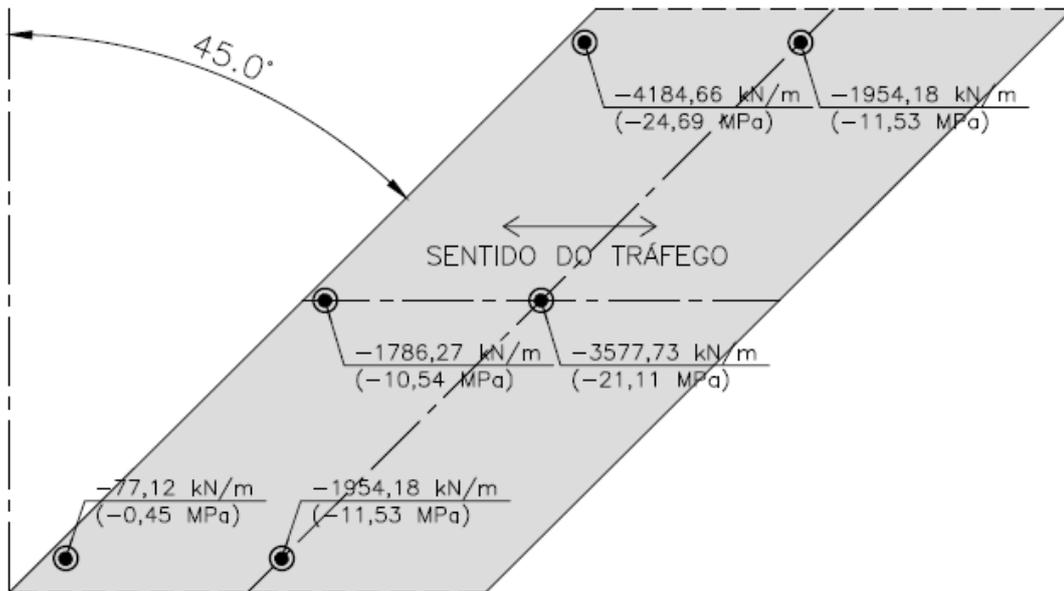


Figura 3.42 – Resultados para  $f_{cp,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{cp,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\text{come}=45^\circ$

Sobre a armadura superior, na direção  $\beta$ , nota-se que

- o dimensionamento não indica a necessidade dessa armadura, na região central das lajes, independentemente da esconsidade;
- no meio do vão, junto aos bordos livres, verificou-se a necessidade de armaduras para as pontes com ângulo de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , porém, as áreas de aço encontradas são muito pequenas;
- no eixo longitudinal da ponte, junto ao apoio, a necessidade de armadura aumenta com o aumento da esconsidade;
- no canto de ângulo agudo, a armadura calculada diminui, com o aumento da esconsidade, porém em nenhum caso apresenta quantidades significativas;
- em todos os casos, as armaduras calculadas foram inferiores às armaduras mínimas.

Sobre a armadura inferior, na direção  $\alpha$ , conclui-se que

- para a ponte sem esconsidade, a armadura máxima situa-se no meio do vão, junto aos bordos livres da laje, e é cerca de 20% maior do que no centro da mesma; essa diferença diminui com o aumento da esconsidade, e, para pontes com ângulo de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , a armadura, no centro laje, supera a dos bordos livres;
- a armadura, no centro da laje para as pontes com ângulo de esconsidade de  $15^\circ$ , supera em 25% aquela obtida para a ponte ortogonal; para a esconsidade máxima, o aumento em relação à ponte ortogonal é da ordem de 100%;

- próximo ao apoio, no canto obtuso, a armadura aumenta, significativamente, com a elevação do ângulo de esconsidade, e chega a superar a armadura no meio do vão, junto ao bordo livre, para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade;
- assim como no canto de ângulo obtuso, a armadura, no eixo da ponte, junto ao apoio, também aumenta, com a diminuição do ângulo  $\beta$  entre as camadas de aço; não chega, porém, a 50% da armadura, no meio do vão, mesmo na ponte de maior esconsidade;
- no canto de ângulo agudo, a armadura diminui, com o aumento do ângulo de esconsidade.

Sobre a armadura inferior, na direção  $\alpha$ , observa-se que

- na ponte sem esconsidade, a armadura máxima situa-se no eixo da ponte, no meio do vão; nas pontes esconsas, a armadura do canto de ângulo obtuso supera a armadura da região central da laje;
- em geral, a armadura, em todos os pontos, aumenta com a elevação do ângulo de esconsidade, com exceção do canto agudo, que apresenta diminuição da armadura;
- a armadura máxima para a ponte com ângulo de esconsidade de  $15^\circ$  é maior do que o dobro da armadura obtida para a ponte ortogonal;
- no meio do vão da ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , no eixo da ponte, a armadura transversal inferior é equivalente a quase 80% da armadura longitudinal inferior; nas pontes sem esconsidade a relação entre essas armaduras é da ordem de 25%.

Sobre as tensões no concreto das chapas superiores, nota-se que

- a variação das tensões, com o aumento do ângulo de esconsidade das pontes, é bastante suave;
- a chapa superior não apresenta elevadas tensões de compressão no concreto;
- no meio do vão, junto ao bordo livre das lajes, a tensão diminui, em módulo, com o aumento da esconsidade; o mesmo acontece no canto de ângulo agudo;
- no eixo da ponte, no meio do vão, a compressão no concreto diminui pouco, até o ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , apresentando maior diminuição apenas para a ponte com ângulo de esconsidade de  $45^\circ$ ;
- em nenhum caso a tensão no concreto excedeu a tensão admissível.

Sobre as tensões no concreto das chapas inferiores, conclui-se que

- com exceção do canto de ângulo agudo, o aumento da esconsidade eleva bastante as tensões no concreto, em módulo;
- o canto de ângulo obtuso apresenta as maiores tensões compressivas no concreto, estando acima da tensão admissível para os ângulos de esconsidade de 30° e 45°;
- no meio do vão, a tensão no concreto excede a admissível, no eixo da ponte, para o ângulo de esconsidade de 45°.

De maneira geral, observa-se que o aumento do ângulo de esconsidade resulta em maiores armaduras e maior compressão no concreto. O aumento das armaduras é bastante expressivo, sobretudo na malha inferior, que é mais densa. Na direção longitudinal, a maior armadura inferior encontrada, para a ponte com ângulo de esconsidade 45°, é quase o dobro da armadura obtida, no mesmo ponto, para a ponte sem esconsidade. Além disso, a armadura inferior transversal máxima, na ponte com ângulo de esconsidade de 45°, atinge valores quase 7 vezes superiores aos obtidos para a ponte sem esconsidade.

A desconsideração da esconsidade na determinação das armaduras não é adequada, mesmo para pequenos ângulos de esconsidade.

Com os parâmetros adotados para os braços de alavanca e espessura das chapas, as pontes com ângulos de esconsidade 30° e 45° não atendem à tensão admissível no concreto. A adoção de um concreto com maior resistência característica seria, portanto, uma solução, porém, no caso da ponte com ângulo de esconsidade 45°, seria necessário um concreto de 60 MPa. Uma laje com maior espessura aumentaria o custo e as solicitações, devido ao peso próprio, mas, possivelmente, também atenderia à tensão admissível.

O aumento das espessuras das chapas extremas, com conseqüente diminuição dos braços de alavanca, não apresentou resultados satisfatórios, pois, apesar do aumento da área de concreto, a elevação das solicitações nas chapas também aumentou a força no concreto, mantendo as chapas em compressão excessiva.

Da Figura 3.43 à Figura 3.46 são apresentados os diagramas de  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  e  $V_{máx}$ , respectivamente, devido às cargas permanentes para as pontes sem esconsidade e com ângulo de esconsidade 30°.

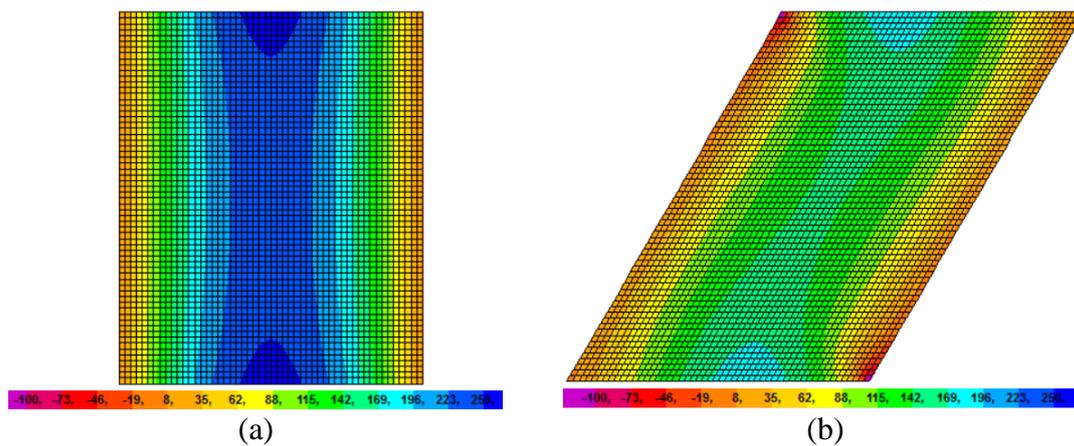


Figura 3.43 – Diagramas de  $M_x$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

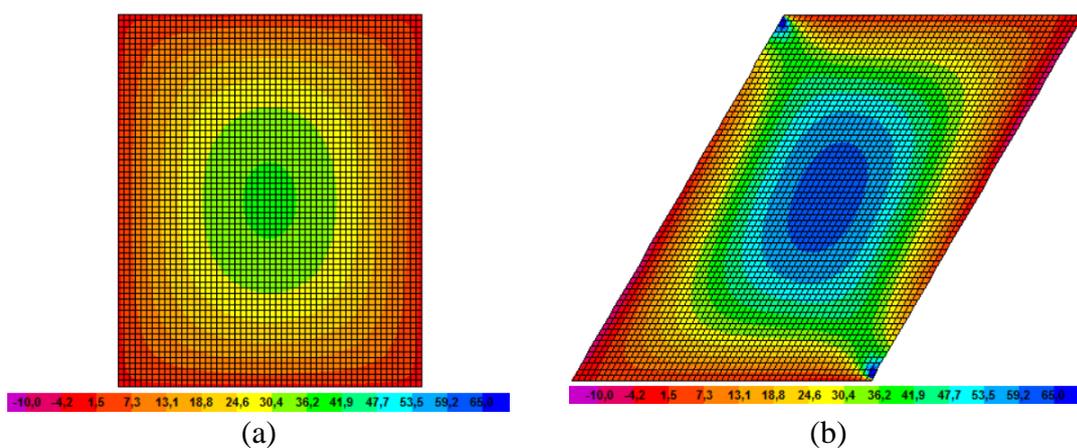


Figura 3.44 – Diagramas de  $M_y$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

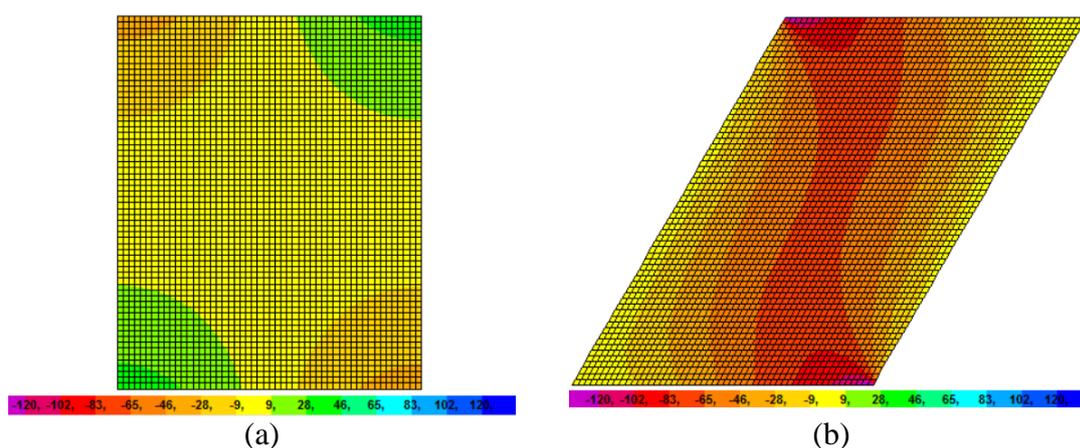


Figura 3.45 – Diagramas de  $M_{xy}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

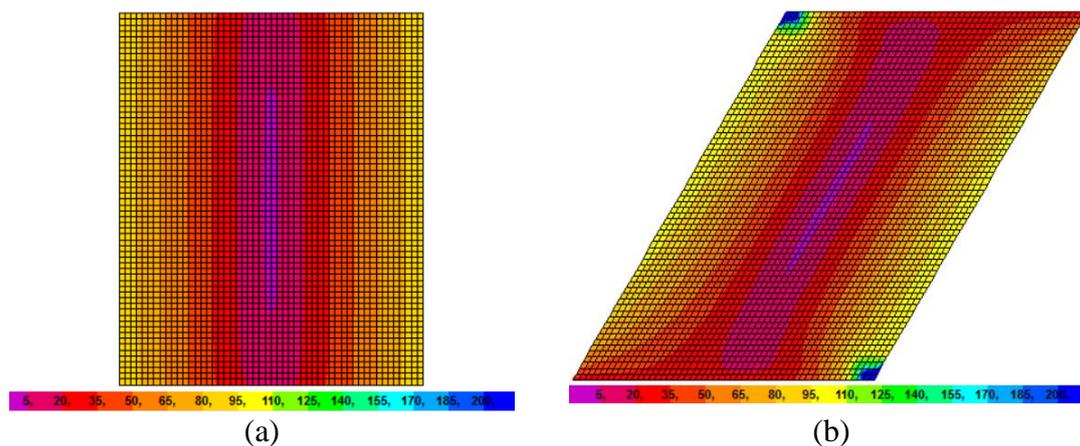


Figura 3.46 – Diagramas de  $V_{\text{máx}}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

O aumento das armaduras causado pela elevação do ângulo de esconsidade das pontes deve-se, principalmente, à não ortogonalidade das armaduras, mas também ao aumento dos momentos transversal  $M_y$ , e volvente  $M_{xy}$ , apesar da redução do momento longitudinal  $M_x$ . Os cortantes transversais para as cargas uniformes são semelhantes, entre as pontes sem esconsidade e aquelas com esconsidade, porém apresentam picos nos cantos de ângulos obtusos.

Observa-se que, na região dos cantos de ângulo obtuso, o momento volvente  $M_{xy}$  é bastante elevado nas lajes esconsas. Na ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , o momento volvente atinge valores da ordem de 50% do momento  $M_x$  máximo, no meio do vão, enquanto na ponte com  $45^\circ$  de esconsidade,  $M_{xy} \approx M_{x,\text{máx}}$ , o que justifica as elevadas armaduras obtidas nessa região.

O cálculo das áreas de aço para as solicitações obtidas através dos modelos esconsos, considerando-se malhas ortogonais, resultou em diminuição da armadura principal e aumento da armadura secundária com o aumento da esconsidade. No entanto, as armaduras totais foram inferiores àquelas calculadas para a malha oblíqua. Ressalta-se, no entanto, que a economia no peso de aço, é contrabalançada com maior trabalho no detalhamento, corte e dobra das armaduras, onerando a construção.

### 3.3.6. Peso total de aço e taxas de armadura

#### 3.3.6.1. Critérios adotados

O peso total de aço foi calculado, considerando-se três faixas de distribuição de armadura em cada direção. A Figura 3.47 mostra as faixas estabelecidas para a armadura longitudinal e a Figura 3.48 apresenta as faixas definidas para a armadura transversal.

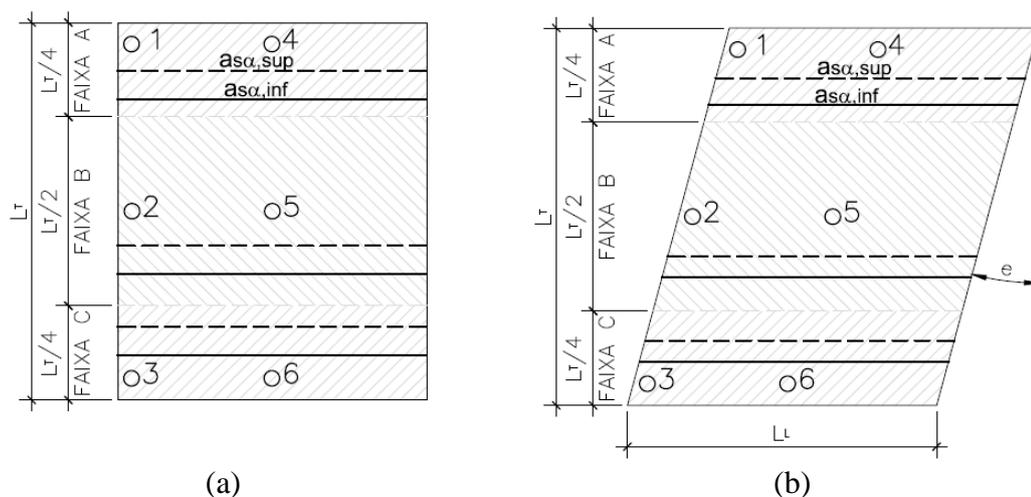


Figura 3.47 – Faixas consideradas para a distribuição das armaduras longitudinais nas lajes (a) normais (b) esconsas

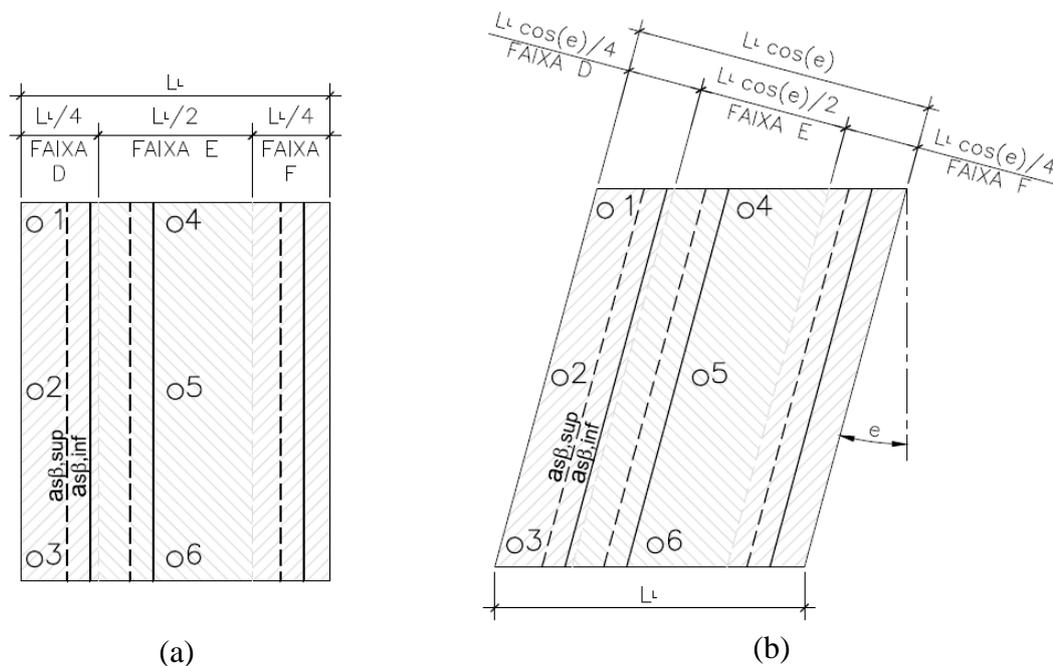


Figura 3.48 – Faixas consideradas para a distribuição das armaduras transversais nas lajes (a) normais (b) esconsas

Para as faixas A e C de distribuição da armadura longitudinal, foram adotadas a máxima armadura inferior e a superior, na direção  $\alpha$ , calculadas entre os pontos 1, 4, 3 e 6. Para a faixa B, foram adotadas a máxima armadura superior e a inferior, calculadas para os pontos 2 e 5.

Na direção transversal, para as faixas D e F, foi adotada a máxima armadura obtida na direção  $\beta$ , entre os pontos 1, 2 e 3, enquanto para a faixa E, adotou-se a máxima armadura obtida para os pontos 4, 5 e 6.

As bitolas e espaçamentos de cada faixa foram definidos, adotando-se a menor armadura superior à calculada, obtida por barras com diâmetros de 12,5mm, 16mm, 20mm e 25mm, em espaçamentos de 20cm, 17,5cm, 15cm, 12,5cm, 10cm e 7,5cm.

Para as lajes com armadura ortogonal, foram respeitadas a armadura mínima e a relação mínima entre armaduras calculadas, recomendadas pela NBR 6118:2014. Para as lajes com armaduras oblíquas, foram respeitadas as relações da Tabela 2.3 e as taxas mínimas da Tabela 2.5, calculadas no item 2.6.

De acordo com a NBR 6118:2014, a armadura mínima é determinada pelo dimensionamento da seção a um momento de flexão mínimo dado por

$$M_{d,min} = 0,8W_0f_{ctk,sup} \quad (3.34)$$

onde

- $W_0$  é o módulo de resistência da fibra tracionada da seção;
- $f_{ctk,sup}$  é a resistência característica superior do concreto à tração.

Além disso, a taxa de armadura mínima absoluta de 0,15% da área de concreto da seção deve ser respeitada.

A resistência característica superior do concreto à tração é dada por

$$f_{ctk,sup} = (1,3)(0,3)(f_{ck})^{2/3} \quad (3.35)$$

Para as lajes aqui estudadas a armadura mínima é dada pela taxa mínima absoluta e vale  $9\text{cm}^2/\text{m}$ .

Os comprimentos das barras foram calculados, considerando-se a dimensão da laje, segundo a direção da barra, com suas extremidades dobradas, estendendo-se até a face oposta. Os cobrimentos nominais foram fixados em 3cm. A Figura 3.49 apresenta a forma típica adotada para as armaduras.

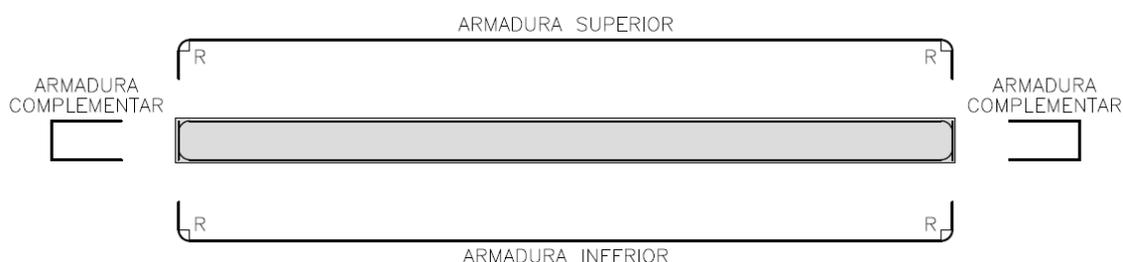


Figura 3.49 – Forma típica adotada para as armaduras

Os raios de dobramento das barras foram determinados, em função da bitola adotada, conforme a Tabela 3.3. Quando o comprimento total da barra superou 12m, adicionou-se a ele o comprimento de uma emenda por traspasse. Os comprimentos das emendas foram

calculados, admitindo-se a armadura superior, em região de má aderência, e a inferior, em região de boa aderência. Foram ainda estabelecidas emendas alternadas, com 50% delas na mesma seção, conforme mostra a Figura 3.50.

Tabela 3.3 – Raios de dobramento, comprimento dos arcos, comprimento das emendas e peso por metro das barras de aço, por bitola

$\varnothing$ (mm)	$R_{\text{dobra}}$ (cm)	$L_{\text{arco}}$ (cm)	$L_{\text{emenda}}$ (cm)		$p$ (kg/m)
			superior	inferior	
12,5	6,50	10,00	1,10	0,75	1
16	8,00	13,00	1,40	1,00	1,6
20	10,00	16,00	1,75	1,20	2,5
25	20,00	31,00	2,15	1,50	4

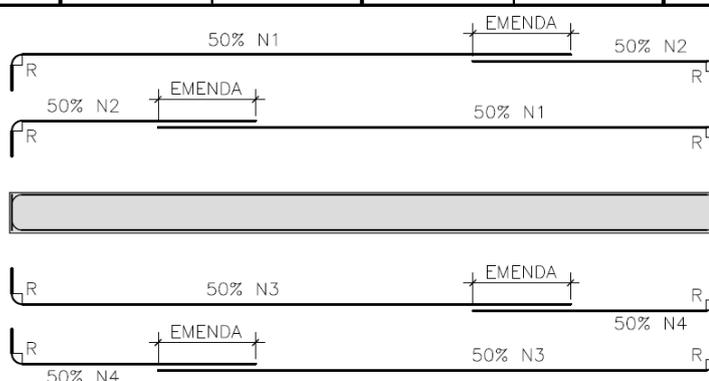


Figura 3.50 – Detalhe de emendas alternadas

Os comprimentos adotados para as emendas por transpasse e os pesos de cada bitola por metro foram considerados conforme mostrado na Tabela 3.3.

As armaduras transversais ao plano das lajes e complementares, tais como as armaduras de proteção das arestas vivas, foram desprezadas.

### 3.3.6.2. Detalhamento das armaduras

Nas Figuras 3.51 a 3.58, é apresentado o detalhamento esquemático das lajes sem vigas laterais.

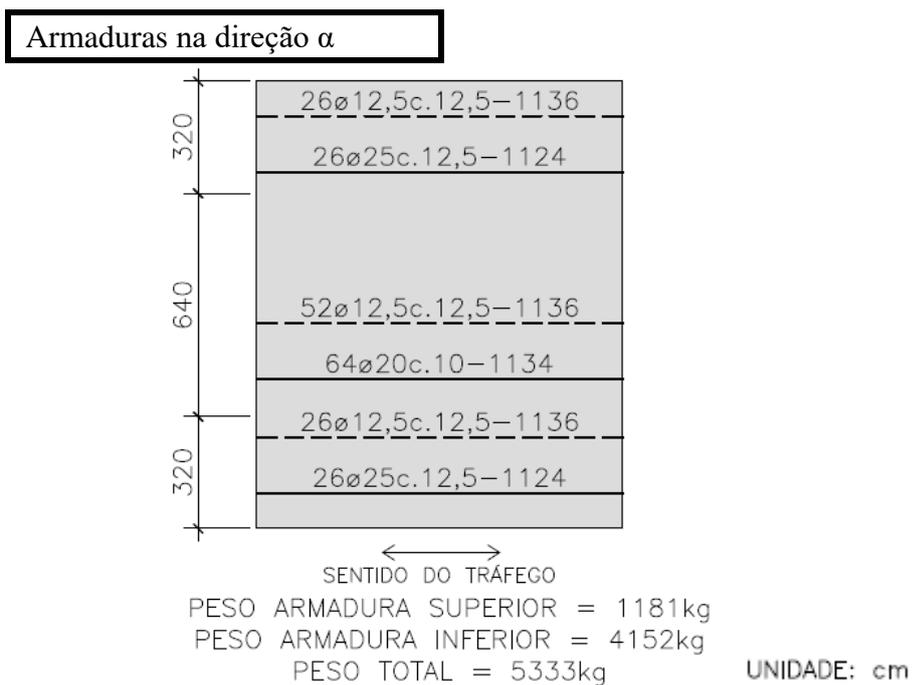


Figura 3.51 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ , come=0°

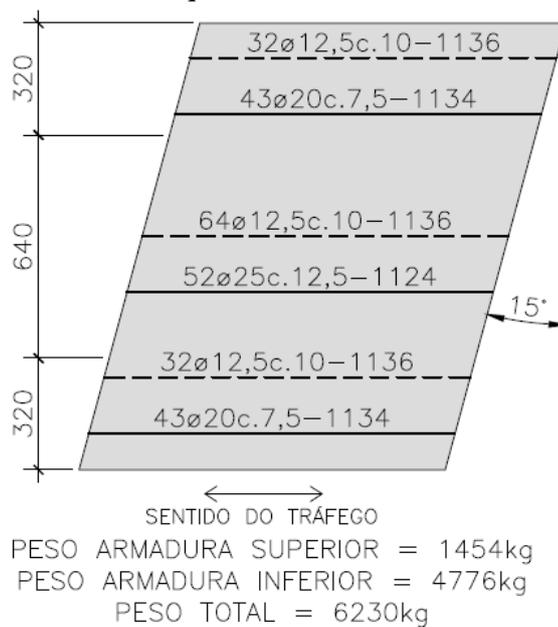


Figura 3.52 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ , come=15°

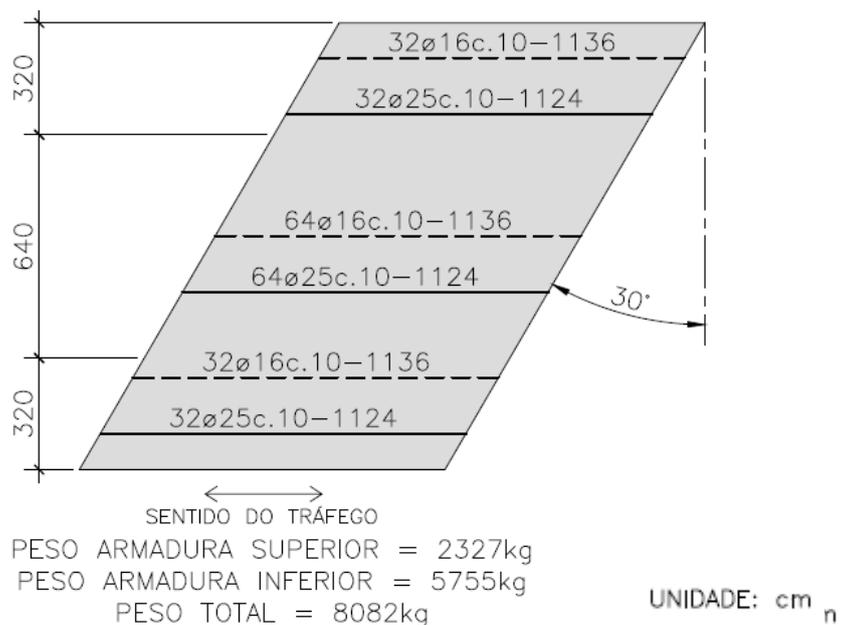


Figura 3.53 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ ,  $\text{come}=30^\circ$

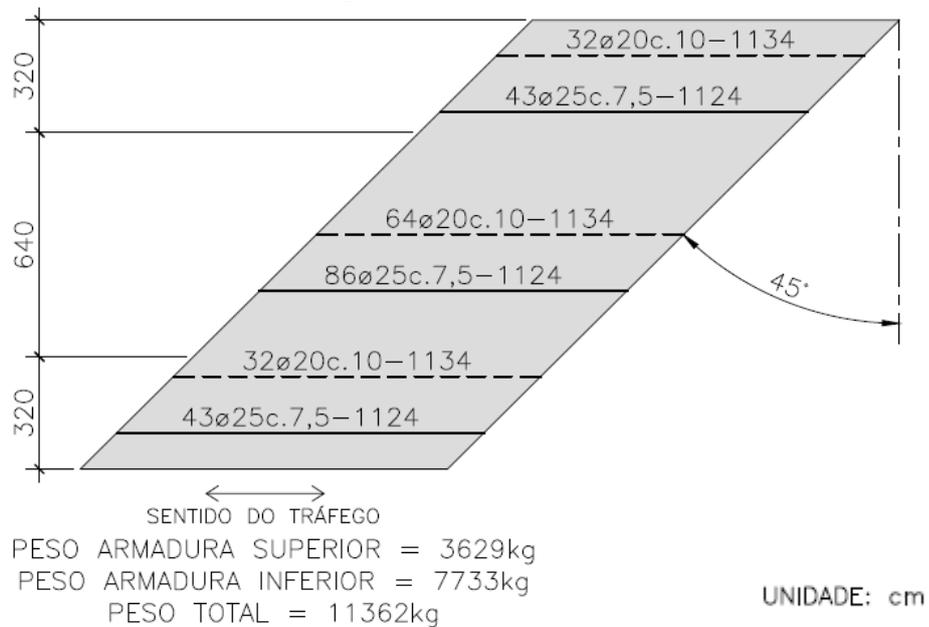


Figura 3.54 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ ,  $\text{come}=45^\circ$

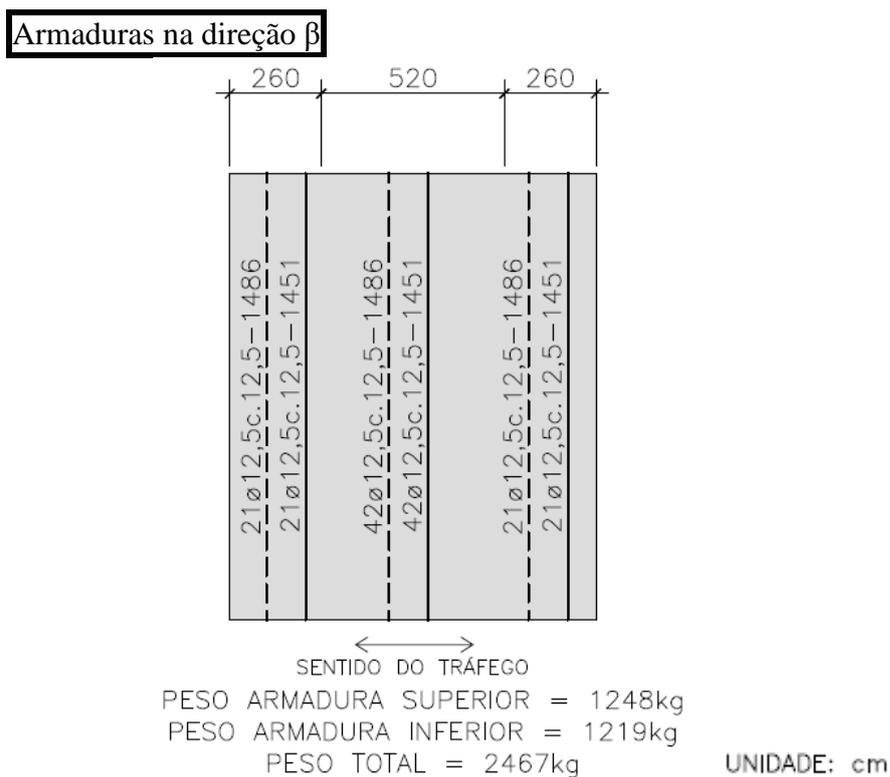


Figura 3.55 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ , come=0°

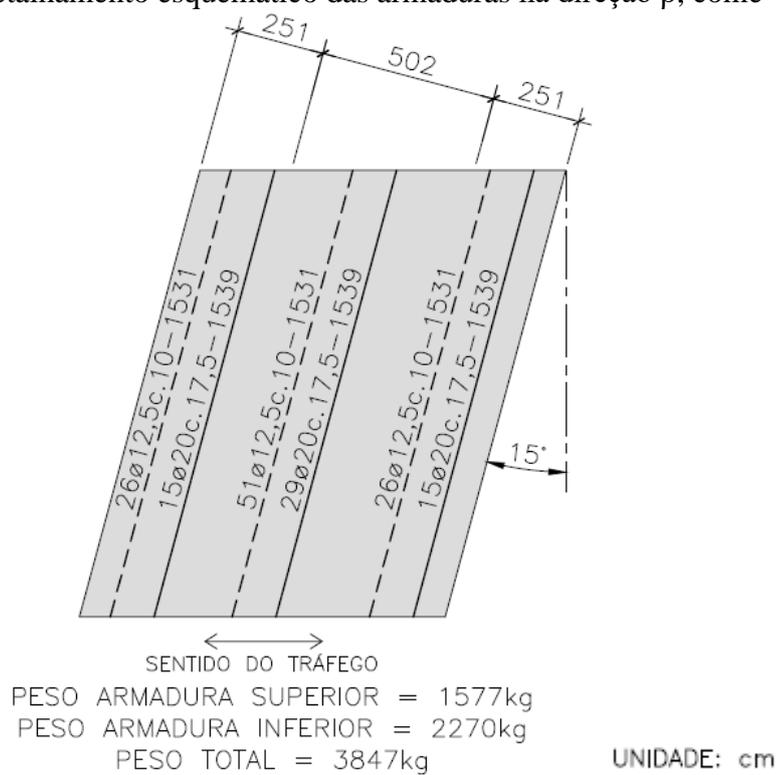


Figura 3.56 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ , come=15°

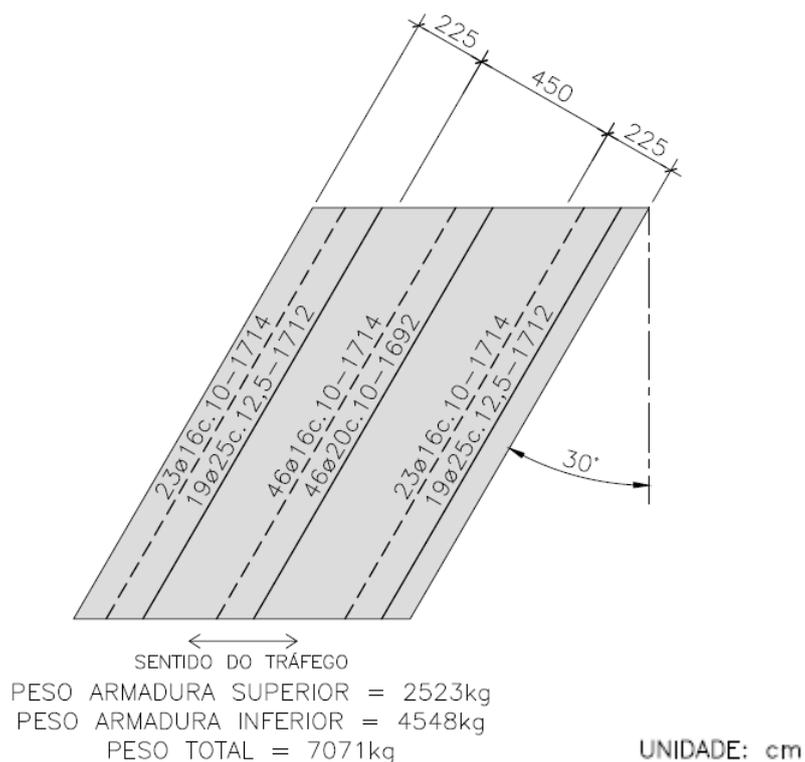


Figura 3.57 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ , come=30°

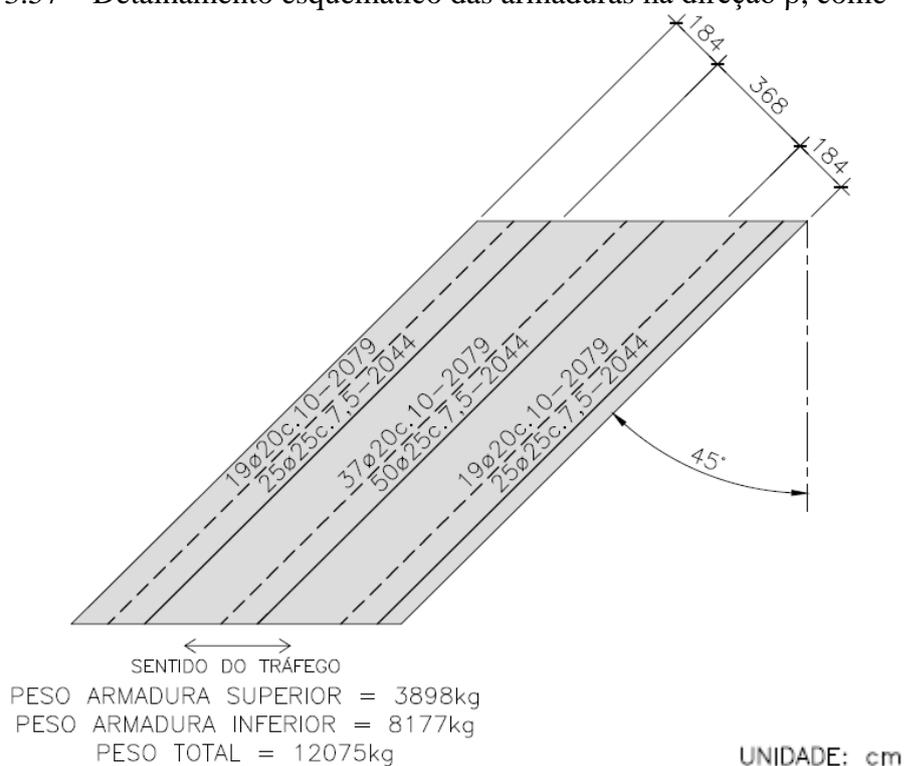


Figura 3.58 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ , come=45°

Para a ponte sem esconsidade, o detalhamento obteve um peso total de 7800 kg de aço, resultando em taxas de 98 kg/m<sup>3</sup> de concreto e 59 kg/m<sup>2</sup> de área em planta. Para a ponte com ângulo de esconsidade 15°, o peso total de aço foi de 10077 kg, portanto, um aumento

de, aproximadamente, 30% em relação à ponte sem esconsidade. As taxas de aço foram de  $126 \text{ kg/m}^3$  e  $76 \text{ kg/m}^2$ .

Para as pontes com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , os pesos totais de aço foram de  $15153 \text{ kg}$  e  $23437 \text{ kg}$ , respectivamente. As taxas foram de  $190 \text{ kg/m}^3$  e de  $114 \text{ kg/m}^2$  para a ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , e de  $293 \text{ kg/m}^3$  e  $176 \text{ kg/m}^2$ , para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade. Os acréscimos em relação à ponte sem esconsidade foram da ordem de 95%, para ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , e de 300% para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade.

Tabela 3.4 – Peso total e taxas de aço para pontes em laje sem vigas laterais

e	Peso total de aço (kg)	Taxas		P/P <sub>0°</sub>
		kg/m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	
0°	7800	59	98	1,00
15°	10077	76	126	1,29
30°	15153	114	190	1,94
45°	23437	176	293	3,00

Na ponte com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ , a relação mínima entre armaduras proposta não afetou o peso total de aço, porém o aumento da armadura mínima resultou em um acréscimo de 4% de aço. Na ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , a armadura mínima proposta resultou em um aumento de apenas 1% no peso total de aço, enquanto a relação mínima entre armaduras oblíquas sugerida não afetou a quantidade de aço. Já na ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , o aumento da armadura mínima não afetou o peso de aço, mas a elevação da relação mínima entre armaduras resultou em um acréscimo de 15% no peso total de aço. Todavia, salienta-se que, em um detalhamento mais refinado das armaduras, as taxas mínimas e relações mínimas entre armaduras propostas teriam maior impacto sobre o peso total de aço.

A majoração da armadura calculada para a ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , conforme a Tabela 2.4, também aumentou o peso total de aço em, aproximadamente, 12%.

O aumento significativo das taxas se deve, principalmente, ao aumento das áreas de aço necessárias com a diminuição do ângulo entre as camadas de armadura. As armaduras mínimas e relações mínimas entre armaduras oblíquas propostas pouco aumentaram o peso total de aço.

### 3.4.PONTES EM LAJE COM VIGAS LATERAIS

#### 3.4.1. Descrição dos modelos

Foram estudadas 4 pontes em laje com vigas laterais, com vão livre entre apoios de 10,40 m, na mesma direção do tráfego, em concordância com os ângulos de esconsidade  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . Todas as lajes têm 60cm de espessura. As pontes apresentam 12,80m de largura, acomodando duas faixas de 3,50m, acostamentos de 2,50m e asvigas invertidas nas extremidades.

A Figura 3.59 apresenta a seção transversal adotada para as pontes 5 a 8, nas quais os guarda-rodas foram substituídos por vigas invertidas com altura total de 1,50m.

As geometrias em planta das pontes estudadas são apresentadas da Figura 3.60 à Figura 3.63.

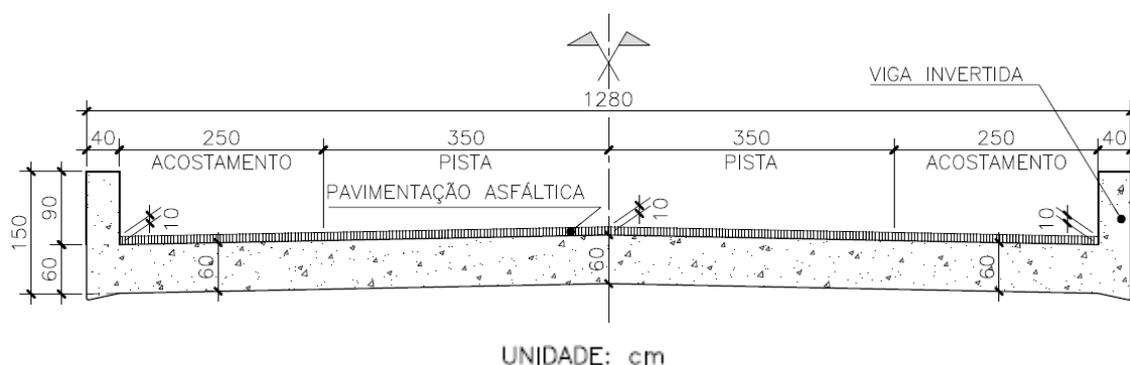


Figura 3.59 – Seção transversal típica das pontes 5 a 8

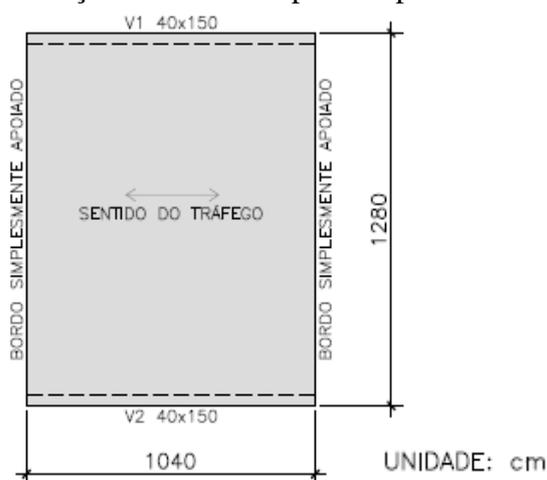


Figura 3.60 – Modelo 5 (L=10,40m, e=0° com vigas invertidas)

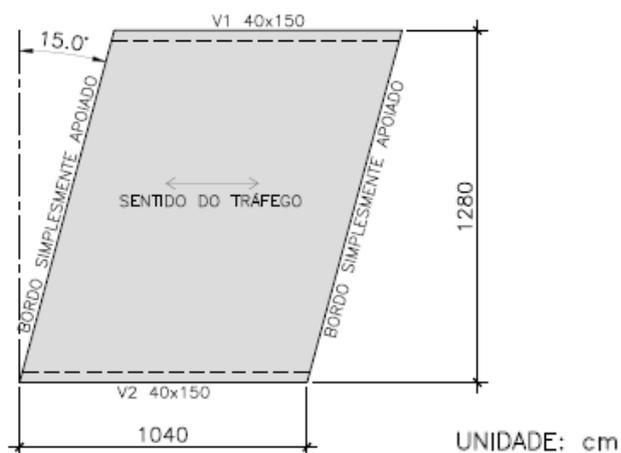


Figura 3.61 – Modelo 6 ( $L=10,40\text{m}$ ,  $e=15^\circ$  com vigas invertidas)

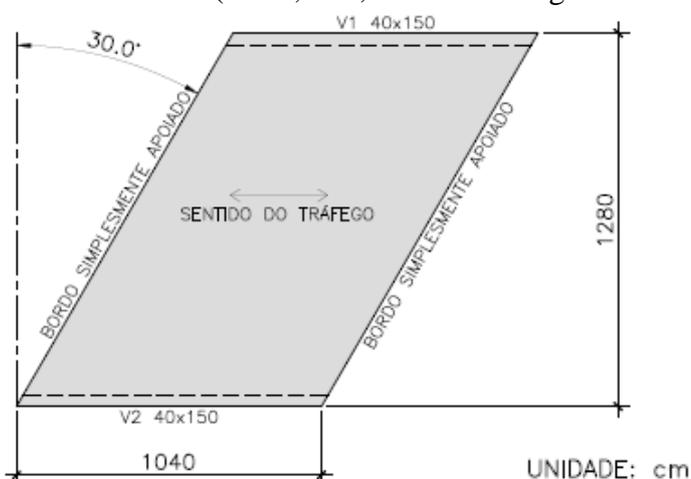


Figura 3.62 – Modelo 7 ( $L=10,40\text{m}$ ,  $e=30^\circ$  com vigas invertidas)

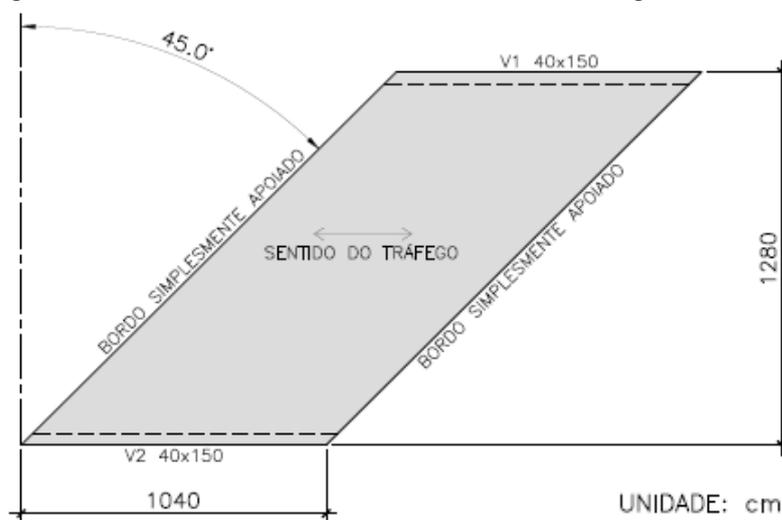


Figura 3.63 – Modelo 8 ( $L=10,40\text{m}$ ,  $e=45^\circ$  com vigas invertidas)

As pontes foram modeladas, no programa SAP2000, usando-se elementos de casca fina para as lajes e barras para as vigas. As lajes foram discretizadas em malha de  $0,20\text{m} \times 0,20\text{m}$ . As barras foram inseridas, considerando-se seu eixo deslocado em relação ao eixo da laje, para correta avaliação dos esforços normais na laje em função dessa excentricidade. Os bordos transversais ao tráfego foram considerados simplesmente apoiados.

Os eixos locais dos elementos de casca fina foram posicionados com a direção 1 na direção da armadura principal da laje, no sentido do tráfego. Dessa forma, o ângulo  $\alpha$  de uma das camadas de armaduras, utilizado nas equações de dimensionamento resumidas na Tabela 2.2, é sempre zero. Consequentemente, o ângulo  $\beta$  é dado pela expressão (3.1)

Assim como para a ponte em laje sem vigas laterais, foi adotado o concreto C35, com a mesma resistência característica à compressão, e o mesmo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

O peso próprio estrutural foi calculado, automaticamente, pelo programa. Foi considerada como sobrecarga permanente apenas a pavimentação asfáltica, acrescida da carga de recapeamento, já calculada na equação (3.3).

A carga móvel foi posicionada exatamente como nas pontes em laje sem vigas laterais.

### **3.4.2. Critérios de dimensionamento**

#### **3.4.2.1. Seções críticas e combinações**

Foram escolhidos os mesmos 6 pontos apresentados na Figura 3.13, para o dimensionamento das armaduras de cada ponte estudada.

As ações foram combinadas de acordo com a expressão (3.14) e a Tabela 3.1 Tabela, totalizando as 14 combinações mostradas na Tabela 3.2.

#### **3.4.2.2. Armaduras no plano da laje**

O dimensionamento das armaduras no plano da laje foi feito, com base nos mesmos critérios adotados para as pontes em laje sem vigas laterais, apresentados no item 3.3.3.2.

A partir do dimensionamento das 14 combinações de cada ponto, foram identificadas, além das combinações que forneceram as forças máximas nas armaduras tanto superior quanto inferior, nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , as máximas forças de compressão no concreto, segundo a orientação das microfissuras e o máximo cortante principal de dimensionamento.

#### **3.4.2.3. Armaduras transversais ao plano da laje**

As armaduras transversais ao plano da laje foram dimensionadas de acordo com o método recomendado pela NBR 6118:2014, descrito no item 3.3.3.3.

A Figura 3.64 apresenta a variação da direção  $\theta$  do cortante principal de dimensionamento nas pontes em laje com vigas laterais. O ângulo entre o esforço cortante

principal e as camadas de armadura cresce com o aumento da esconsidade. Como a direção das armaduras nem sempre concorda com a direção principal de cisalhamento, e a expressão (3.21) aplica-se somente às lajes com armaduras ortogonais, optou-se por desconsiderar, a favor da segurança, a contribuição de  $\rho_1$  em  $V_{Rd1}$  (expressão (3.20)).

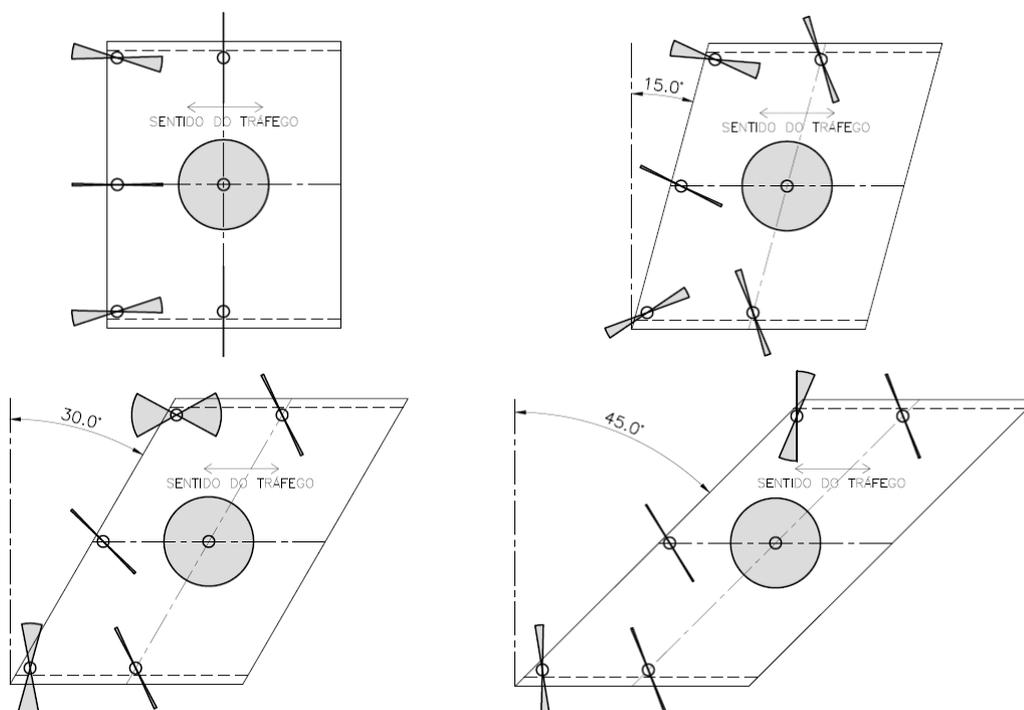


Figura 3.64 – Variação da direção do cortante principal de dimensionamento nos Modelos 5 a 8

### 3.4.3. Resultados do dimensionamento das cascas às solicitações transversais ao plano dos elementos

As Figuras 3.65 a 3.68 apresentam o cortante principal de dimensionamento, sua direção  $\theta$  e o cortante resistente de cálculo nas quatro pontes em laje com vigas laterais estudadas.

Em todos os casos, as regiões no meio do vão, próximas às vigas laterais, devem ser armadas. Nestes pontos, a laje funciona como mesa de tração para as vigas laterais, reduzindo, significativamente, a resistência da laje ao cisalhamento.

Nas pontes com esconsidade  $e=30^\circ$  e  $e=45^\circ$ , as regiões de seus eixos, junto ao apoio, também devem ser armadas. Nestes dois casos, a adoção de um concreto com maior resistência, como 40MPa, seria suficiente para suprimir a armadura transversal.

Diferentemente das lajes sem vigas laterais, os cantos de ângulo obtuso não necessitam de armadura. A utilização de vigas laterais reduz, significativamente, a força cortante nessas regiões.

Observa-se que apenas na região próxima ao apoio no eixo da laje com ângulo de esconsidade  $e=45^\circ$ , a armadura mínima foi superada, mesmo desconsiderando-se os mecanismos complementares ao modelo de treliça, nos pontos no meio do vão próximos às vigas laterais, onde o concreto está tracionado.

#### **3.4.4. Resultados do dimensionamento das armaduras no plano das lajes e tensões no concreto**

Nas Figuras 3.69 a 3.92, são apresentados os resultados do dimensionamento dos 6 pontos escolhidos para as pontes com vigas laterais.

Na determinação das armaduras e tensões no concreto, foram considerados os acréscimos de força, por unidade de comprimento, devido à força cortante transversal apenas nos pontos onde foi necessária a utilização de armadura transversal ao plano da laje.

Sobre a armadura superior, na direção  $\alpha$ , observa-se que

- no canto de ângulo obtuso, a armadura apresenta leve aumento do modelo ortogonal para o modelo com  $15^\circ$  de esconsidade; a armadura, nesse ponto, é semelhante entre a ponte com  $30^\circ$  de esconsidade e aquela sem esconsidade, e atinge seu valor mínimo no modelo com  $45^\circ$  de esconsidade;
- comportamento semelhante é verificado, nos pontos do meio do vão, junto às vigas laterais;
- no eixo da ponte, junto ao apoio, o dimensionamento não indicou necessidade de armadura para a ponte ortogonal, assim como para a ponte com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ ; para os modelos com  $30^\circ$  e  $45^\circ$  de esconsidade, o dimensionamento resultou em uma pequena área de aço;
- no meio do vão, no eixo da ponte, o dimensionamento não apontou a necessidade de utilização de armadura em nenhum dos casos estudados;
- no canto de ângulo agudo, a armadura diminui com o aumento da esconsidade;
- nenhuma armadura encontrada apresentou valores elevados.

$V_{Sd}$ ,  $V_{Rd1}$  e  $A_{sw}$

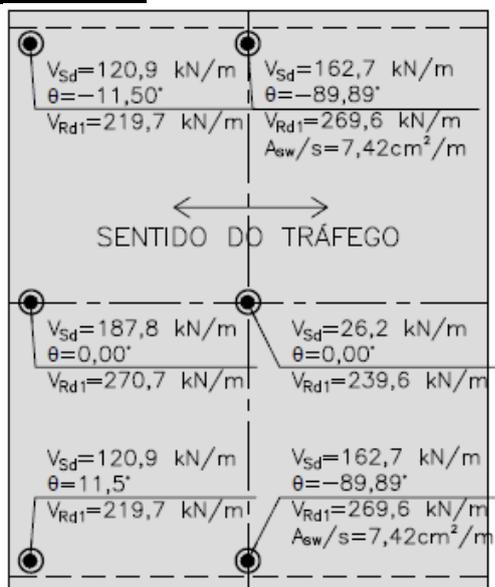


Figura 3.65 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente nomodelo 5 ( $e=0^\circ$ )

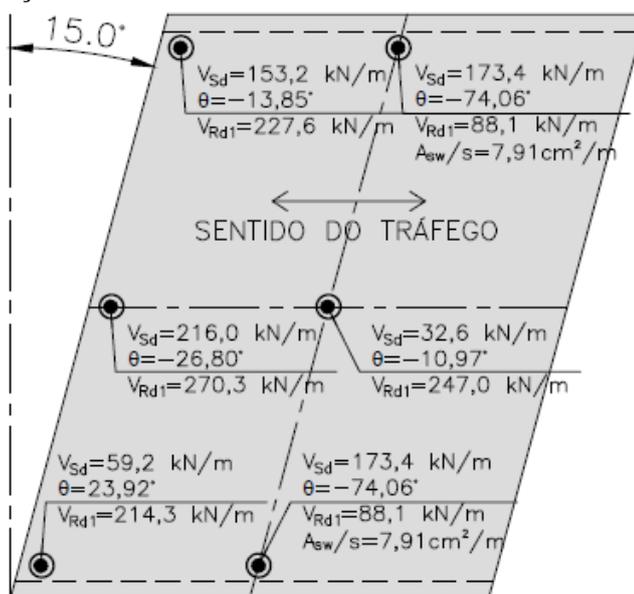


Figura 3.66 – Forças cortantes de dimensionamento e resistente nomodelo 6 ( $e=15^\circ$ )

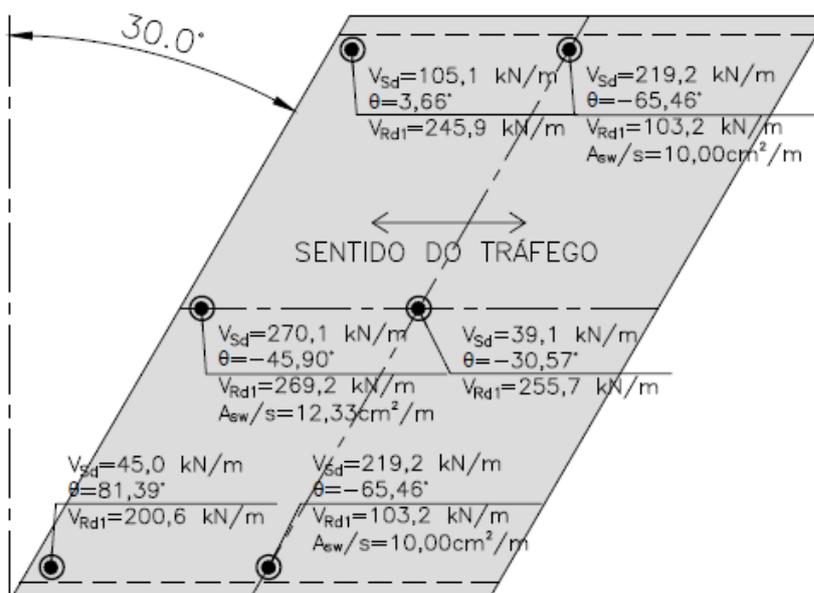


Figura 3.67 – Forças cortantes de dimensionamento e resistentes no modelo 7 ( $e=30^\circ$ )

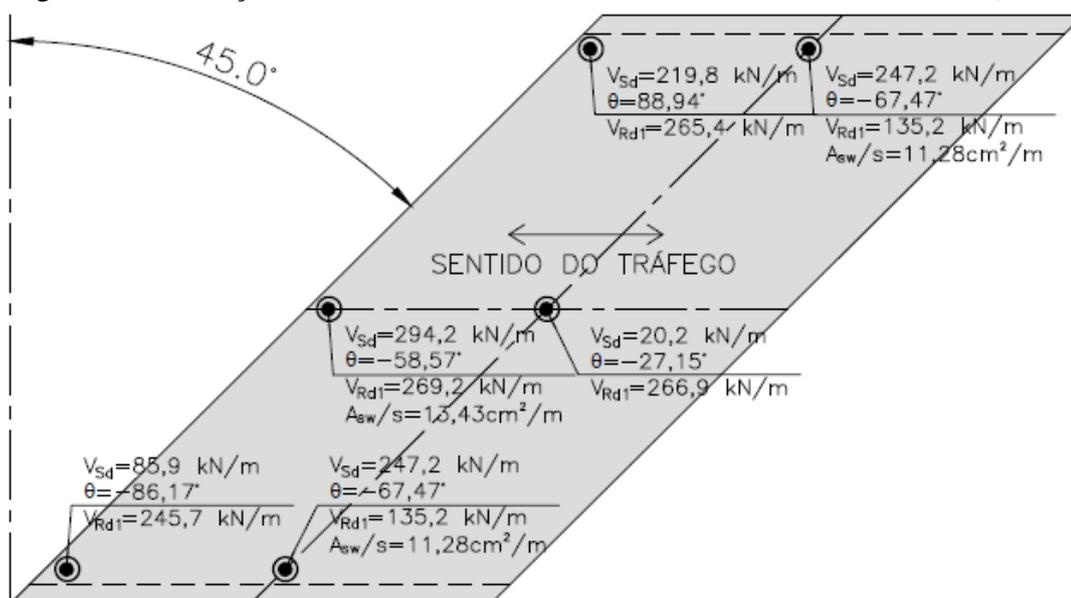


Figura 3.68 – Forças cortantes de dimensionamento e resistentes no modelo 8 ( $e=45^\circ$ )

$f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$

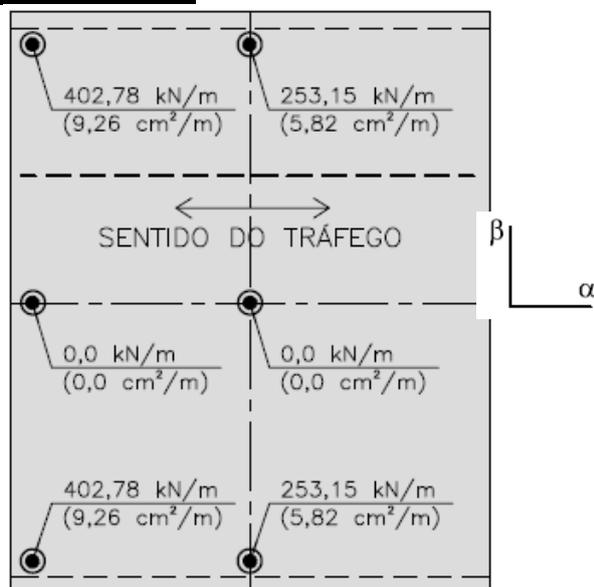


Figura 3.69 – Resultados para  $f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , com  $e=0^\circ$

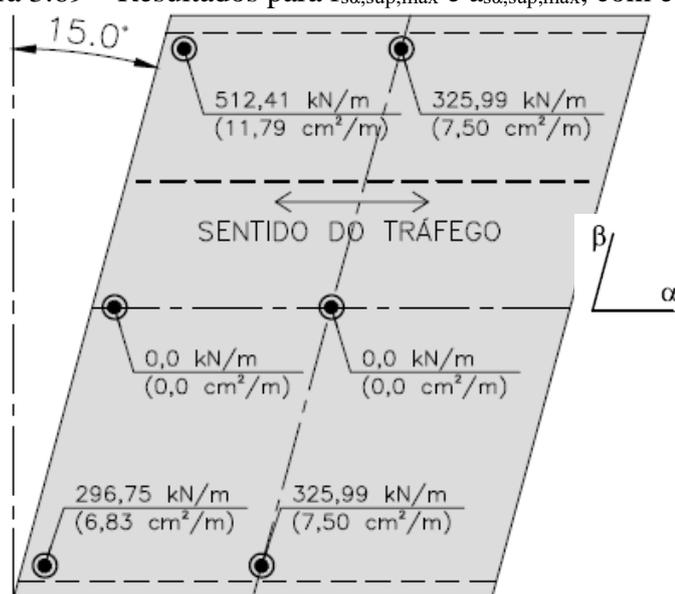


Figura 3.70 – Resultados para  $f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , com  $e=15^\circ$

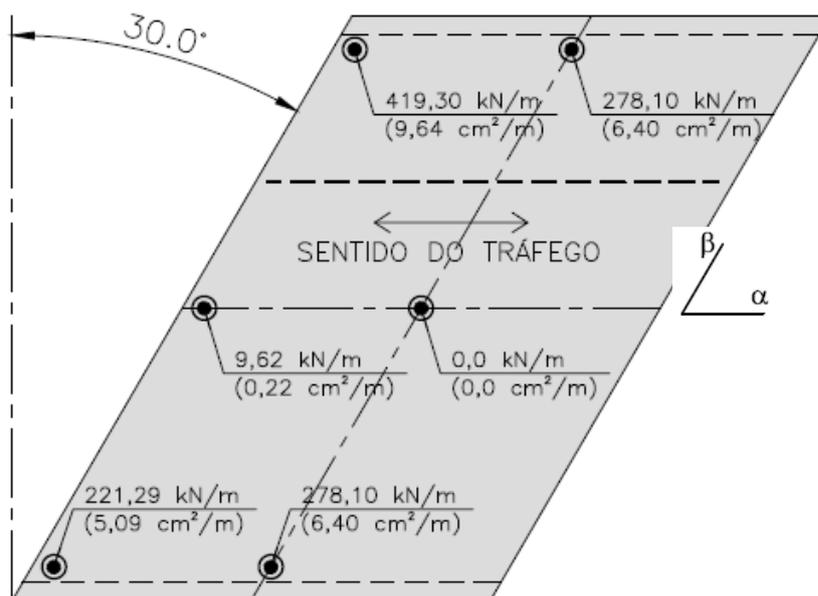


Figura 3.71 – Resultados para  $f_{sa,sup,máx}$  e  $a_{sa,sup,máx}$ ,  $come=30^\circ$

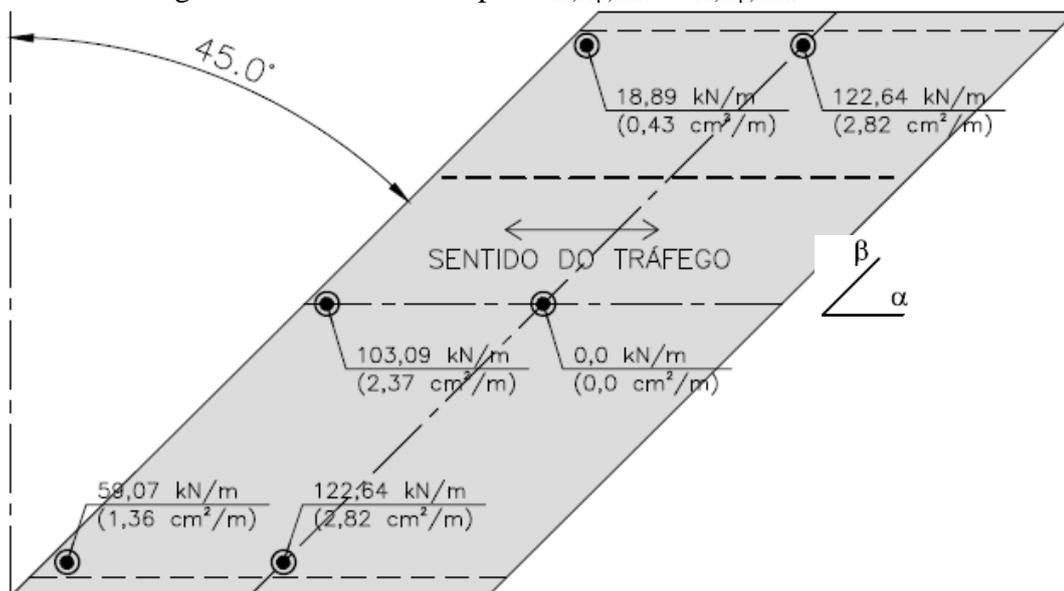


Figura 3.72 – Resultados para  $f_{sa,sup,máx}$  e  $a_{sa,sup,máx}$ ,  $come=45^\circ$

$f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$

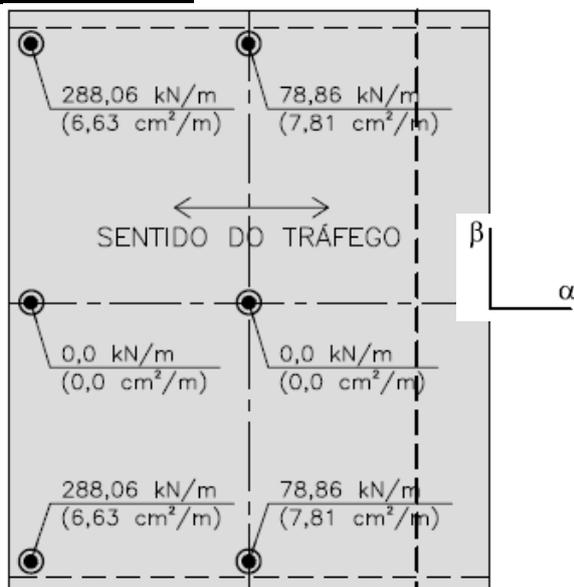


Figura 3.73 – Resultados para  $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ ,  $\text{come}=0^\circ$

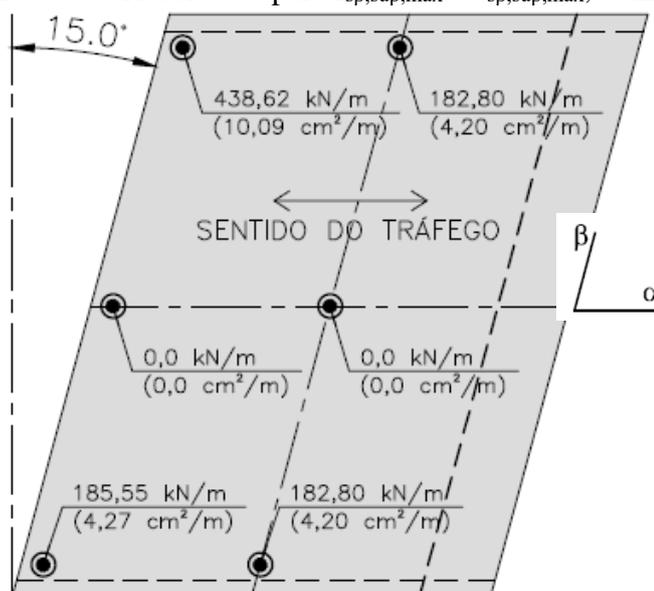


Figura 3.74 – Resultados para  $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ ,  $\text{come}=15^\circ$

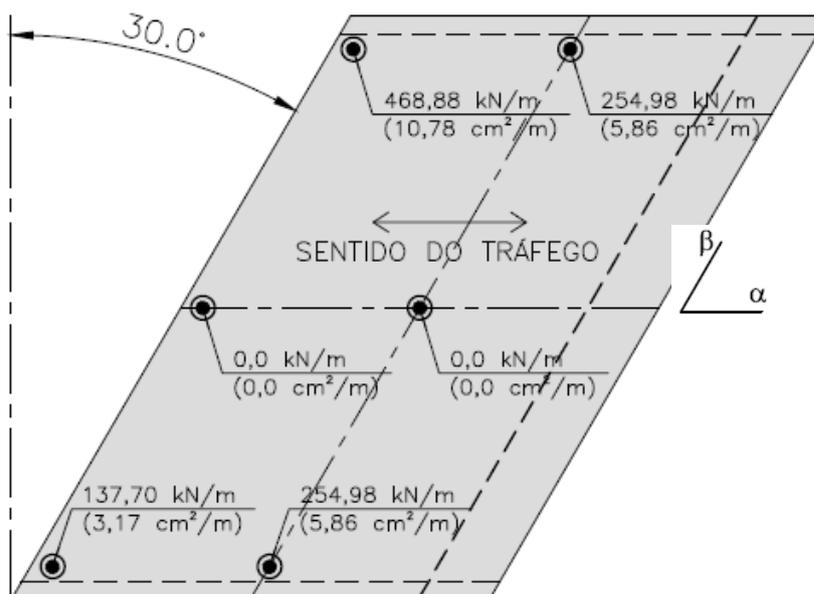


Figura 3.75 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ ,  $\text{come}=30^\circ$

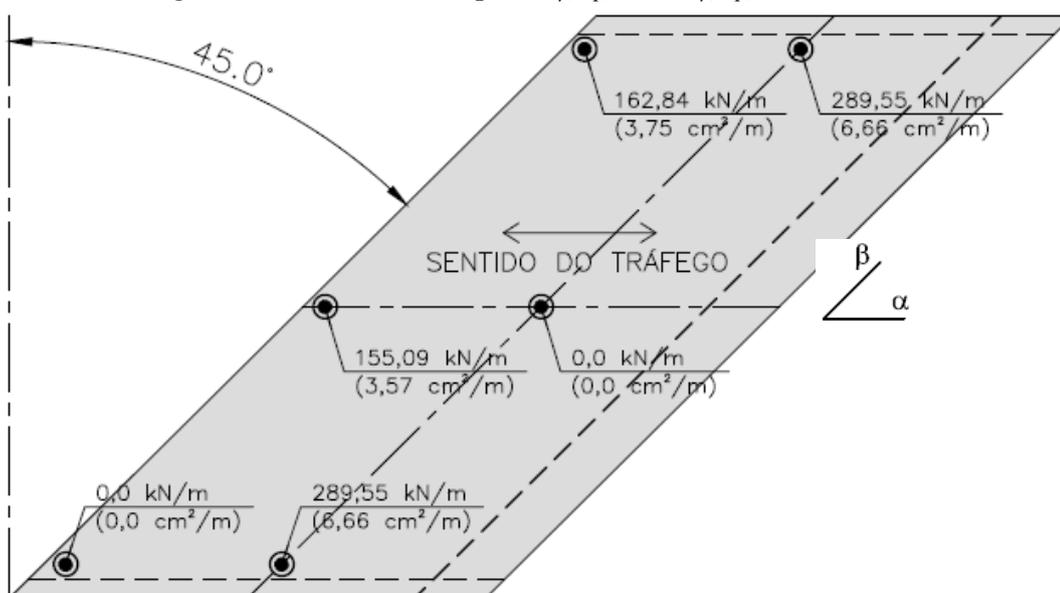


Figura 3.76 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ ,  $\text{come}=45^\circ$

$f_{sa,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,inf,m\acute{a}x}$

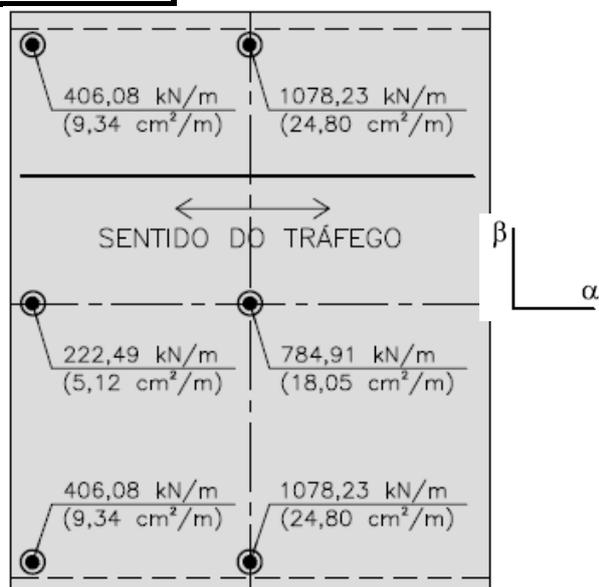


Figura 3.77 – Resultados para  $f_{sa,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\alpha=0^\circ$

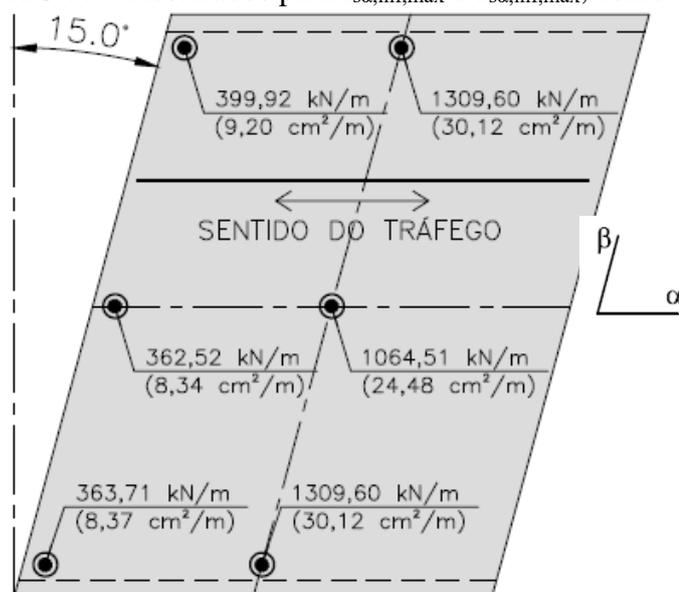


Figura 3.78 – Resultados para  $f_{sa,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\alpha=15^\circ$

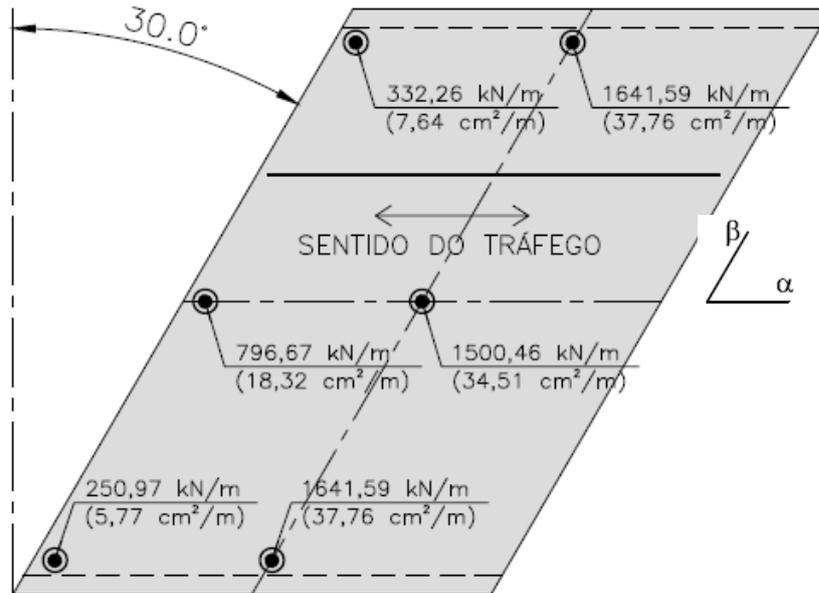


Figura 3.79 – Resultados para  $f_{sa,inf,máx}$  e  $a_{sa,inf,máx}$ , come=30°

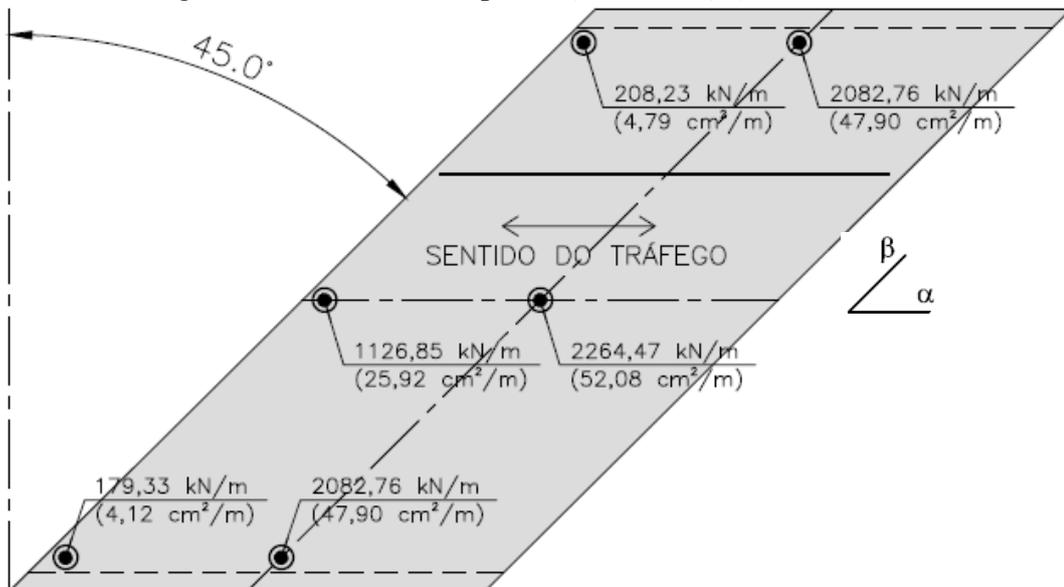


Figura 3.80 – Resultados para  $f_{sa,inf,máx}$  e  $a_{sa,inf,máx}$ , come=45°

$f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$

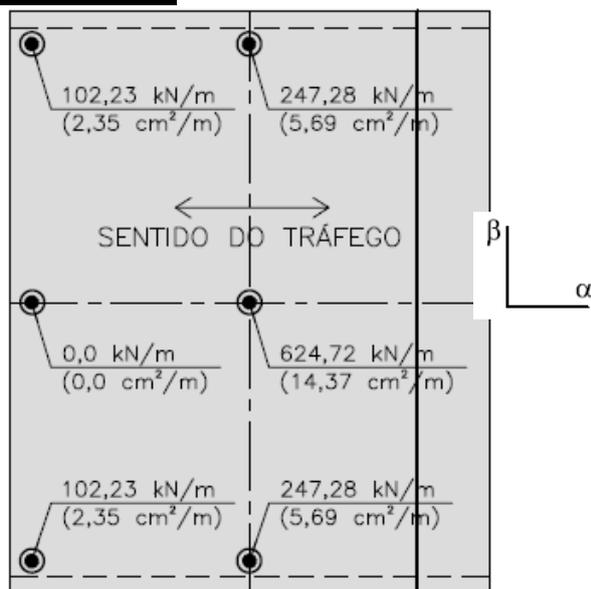


Figura 3.81 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , come=0°

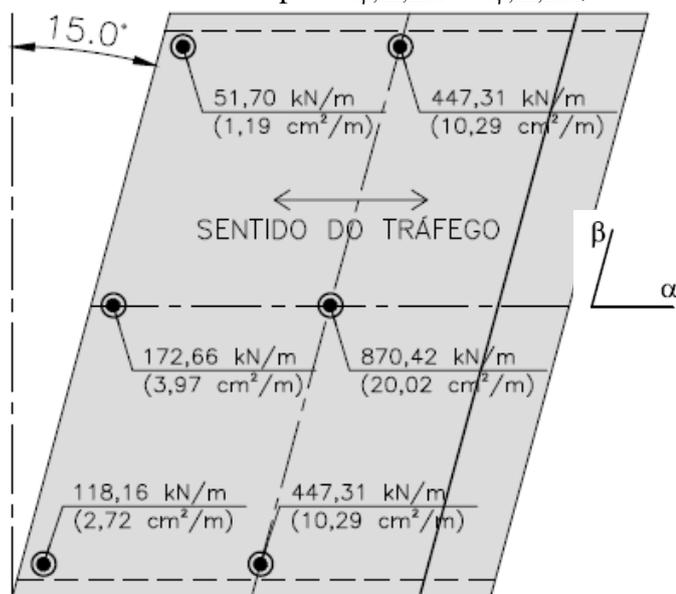


Figura 3.82 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , come=15°

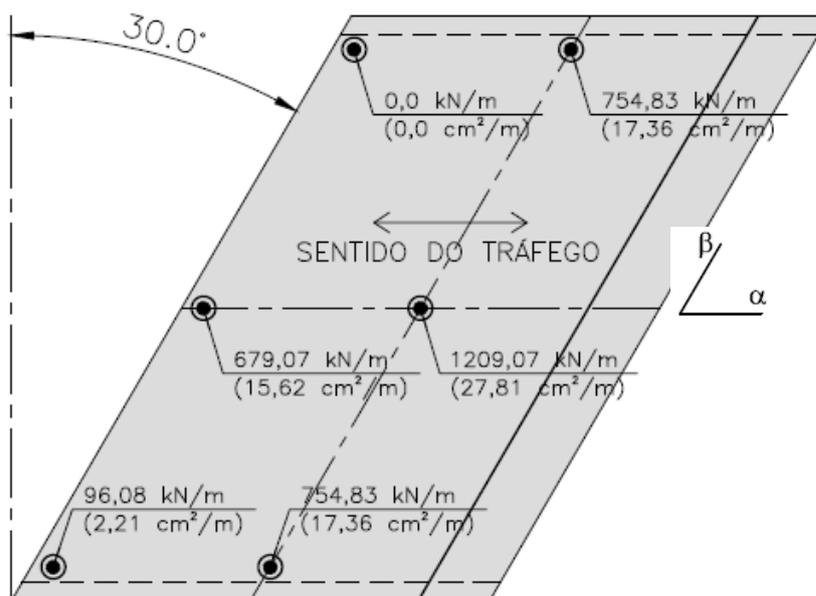


Figura 3.83 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=30^\circ$

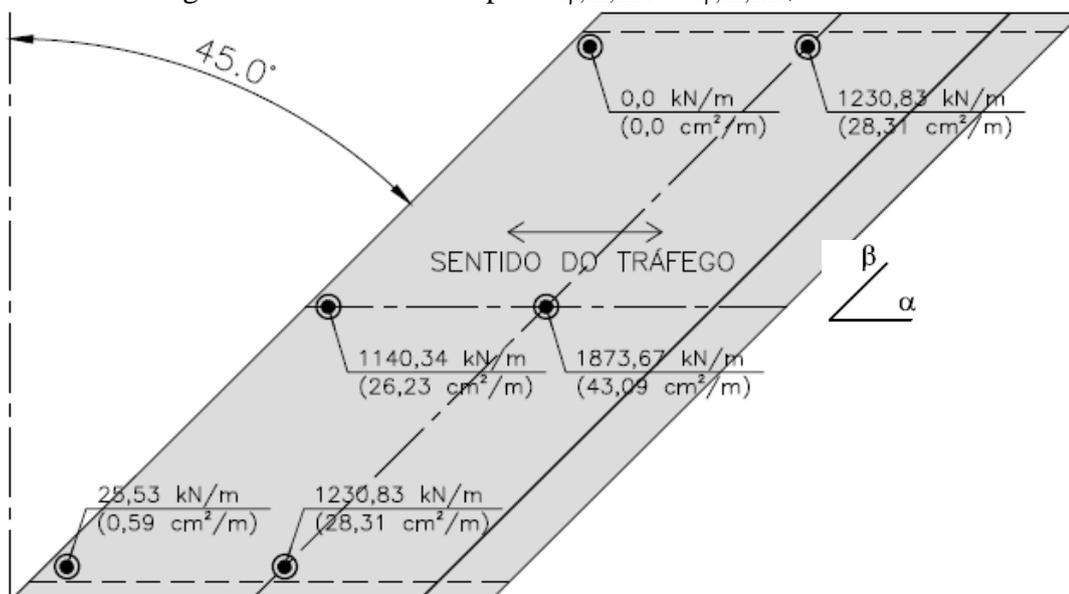


Figura 3.84 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $come=45^\circ$

$f_{c\phi, \text{sup, máx}}$  e  $\sigma_{c\phi, \text{sup, máx}}$

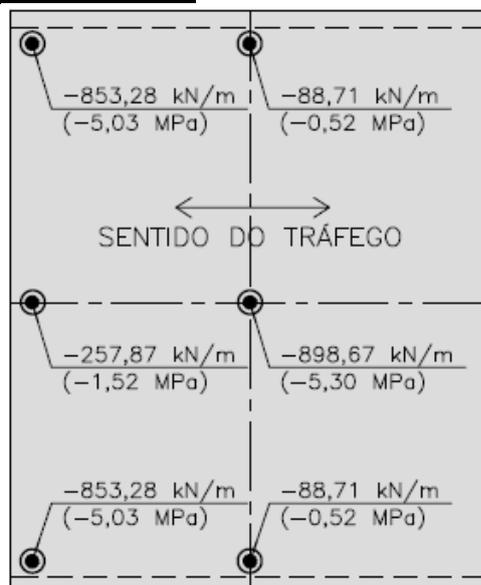


Figura 3.85 – Resultados para  $f_{c\phi, \text{sup, máx}}$  e  $\sigma_{c\phi, \text{sup, máx}}$ ,  $\text{come}=0^\circ$

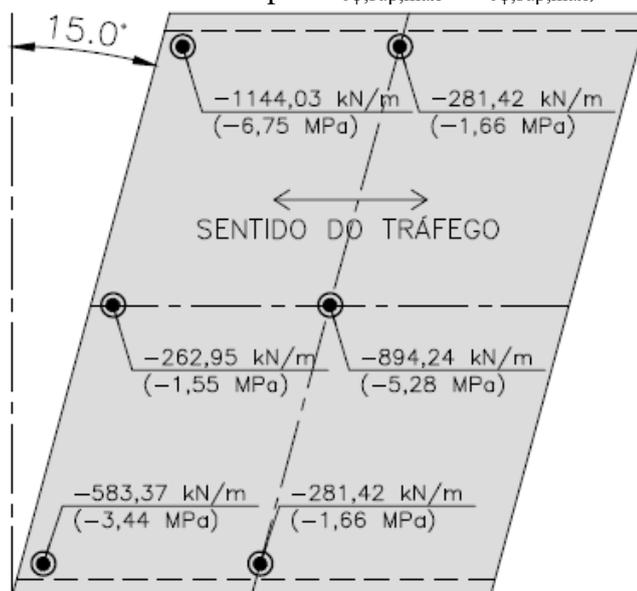


Figura 3.86 – Resultados para  $f_{c\phi, \text{sup, máx}}$  e  $\sigma_{c\phi, \text{sup, máx}}$ ,  $\text{come}=15^\circ$

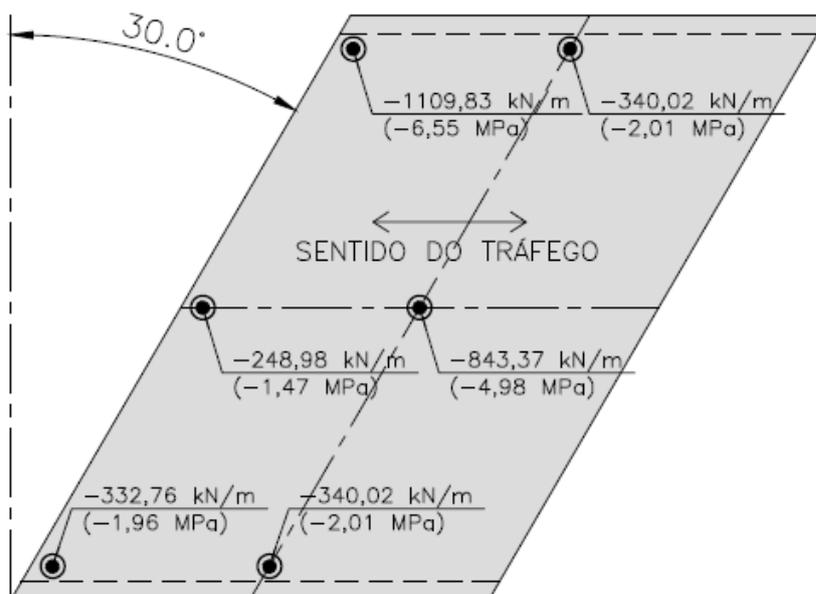


Figura 3.87 – Resultados para  $f_{c\phi, sup, máx}$  e  $\sigma_{c\phi, sup, máx}$ ,  $\alpha = 30^\circ$

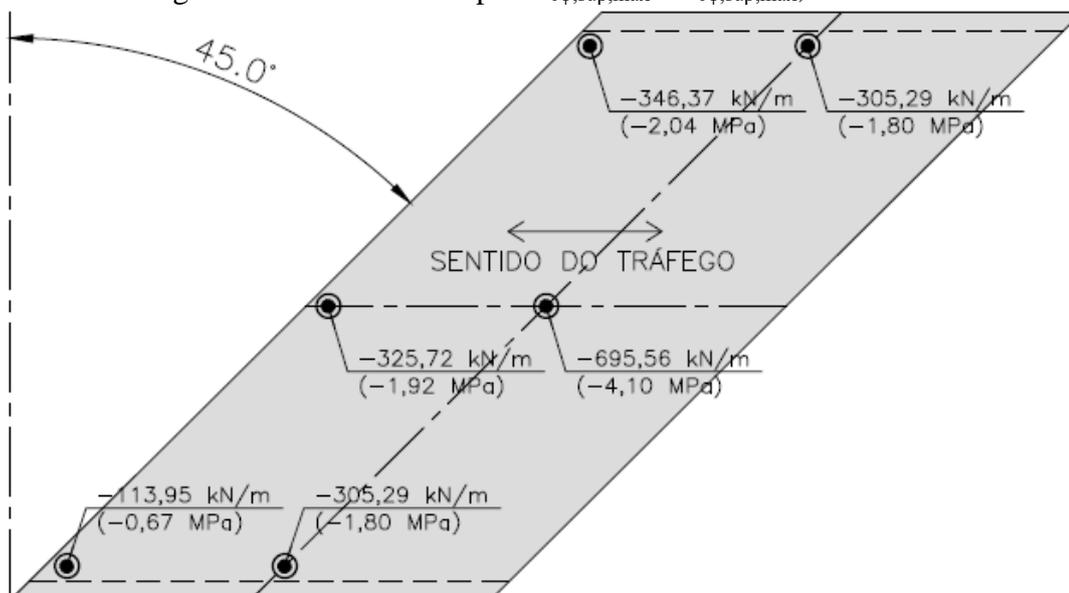


Figura 3.88 – Resultados para  $f_{c\phi, sup, máx}$  e  $\sigma_{c\phi, sup, máx}$ ,  $\alpha = 45^\circ$

$f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$

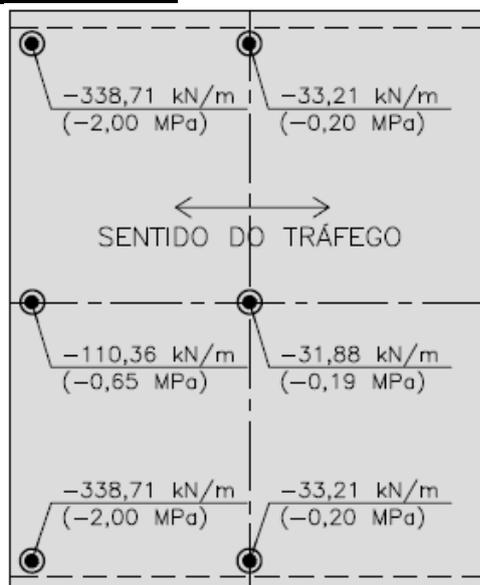


Figura 3.89 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , come=0°

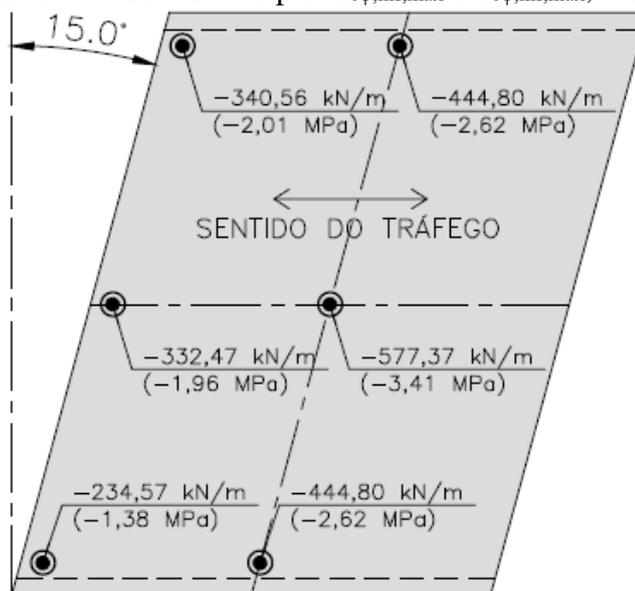


Figura 3.90 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , come=15°

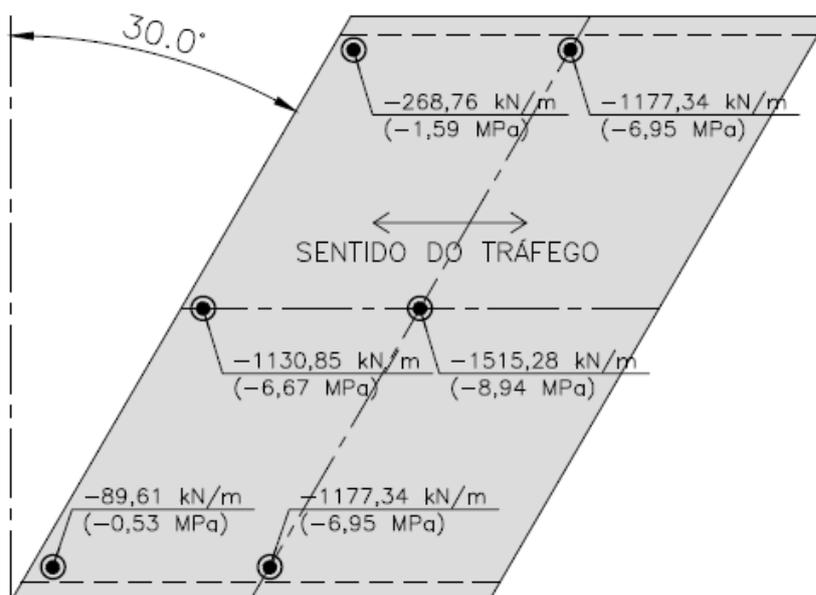


Figura 3.91 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\text{come}=30^\circ$

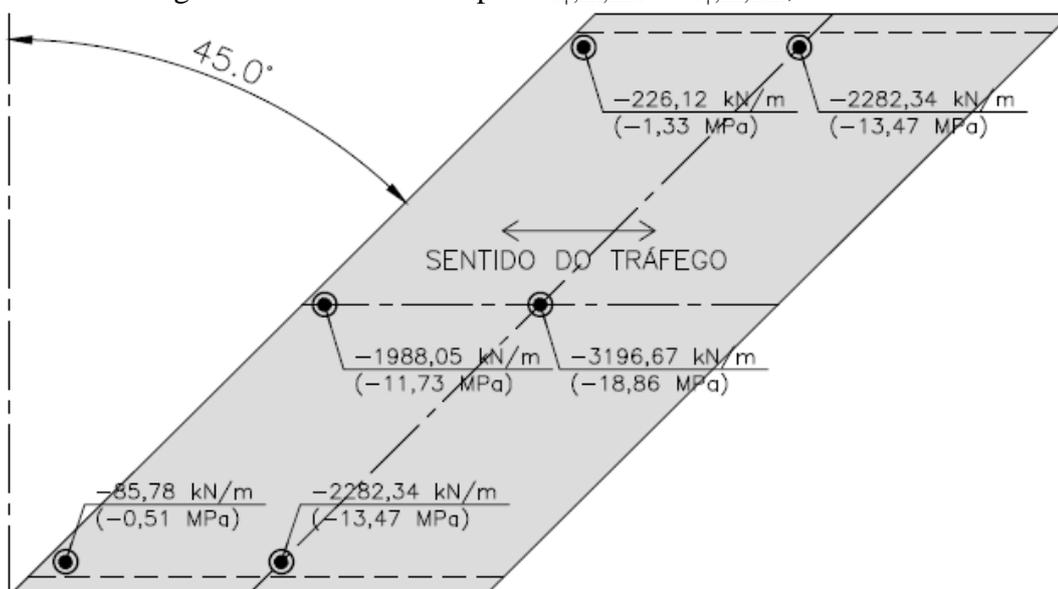


Figura 3.92 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ ,  $\text{come}=45^\circ$

Sobre a armadura superior, na direção  $\beta$ , nota-se que

- no canto de ângulo obtuso, a armadura se eleva, com o aumento da esconsidade, no entanto reduz bastante no modelo com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ ;
- no meio do vão, junto às vigas laterais, a ponte sem esconsidade apresenta a maior área de aço. A área de aço mínima foi obtida para o modelo com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ ; nos demais modelos a armadura se eleva com o aumento da esconsidade;

- no eixo da ponte, não foi verificada a necessidade de armadura superior transversal, exceto na ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , na qual foi obtida pequena área de aço junto ao apoio;
- no canto de ângulo agudo, a armadura apresenta valores decrescentes com o aumento do ângulo de esconsidade;
- nenhuma armadura encontrada superou a armadura mínima.

Sobre a armadura inferior, na direção  $\alpha$ , observa-se que

- nas pontes com ângulos de esconsidade  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$  a armadura máxima se dá, no meio do vão, junto às vigas laterais; para a esconsidade  $45^\circ$ , a região do meio do vão, no eixo da ponte, exibe as maiores armaduras;
- no canto de ângulo obtuso, a armadura apresenta leve diminuição com o aumento da esconsidade;
- o mesmo comportamento é observado no canto de ângulo agudo;
- no eixo da ponte, junto ao apoio, a armadura aumenta bastante, com a elevação da esconsidade, apresentando, para a esconsidade de  $45^\circ$ , armadura superior à obtida para a região central das pontes sem esconsidade e com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ ;
- no meio do vão, no eixo da ponte, a armadura aumenta bastante na medida em que o ângulo de esconsidade é aumentado, apresentando, para a esconsidade máxima, armadura quase três vezes maior do que aquela para a ponte ortogonal;
- no meio do vão, junto às vigas laterais, a armadura também aumenta, com a elevação da esconsidade, atingindo, na máxima esconsidade, aproximadamente, o dobro da armadura encontrada para o modelo sem esconsidade;
- diferentemente da ponte sem vigas laterais, as armaduras do canto de ângulo obtuso não atingem valores próximos àsquelas do meio do vão, mesmo para a ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ .

Sobre a armadura inferior, na direção  $\beta$ , observa-se que

- para todas as esconsidades consideradas, a armadura máxima se dá, no meio do vão, no centro da laje;

- nesse ponto central, a armadura aumenta, com a elevação da esconsidade, assim como, no meio do vão, junto às vigas laterais, e no eixo da ponte, junto ao apoio;
- nos cantos de ângulos agudo e obtuso, a armadura diminui com o aumento da esconsidade.

Sobre as tensões no concreto das chapas superiores nota-se que

- a variação das tensões, com o aumento do ângulo de esconsidade das pontes, é bastante suave, mantendo-se essas tensões praticamente constantes;
- a chapa superior não apresenta elevadas tensões de compressão no concreto;

Sobre as tensões no concreto das chapas inferiores conclui-se que

- nos cantos de ângulo agudo e obtuso, a tensão no concreto apresenta pequena variação, com diminuição da compressão à medida que o ângulo de esconsidade aumenta;
- nos demais pontos, a compressão no concreto aumenta com o aumento da esconsidade; nas pontes esconsas, a tensão máxima de compressão se dá, no meio do vão, no eixo da ponte;
- a tensão no concreto excedeu a tensão admissível apenas para a ponte com ângulo de esconsidade de  $45^\circ$  na região central da ponte.

As armaduras obtidas para as lajes das pontes com vigas laterais são, significativamente, inferiores às obtidas para as pontes estruturadas em laje. Observa-se que a variação da armadura superior, com o aumento do ângulo de esconsidade, é pequena. A influência da esconsidade na armadura inferior é maior.

A área de aço longitudinal inferior máxima para a ponte com ângulo de esconsidade de  $45^\circ$  é pouco maior que o dobro da armadura longitudinal máxima obtida para a ponte sem esconsidade, e essas armaduras são obtidas em pontos diferentes. A armadura transversal inferior máxima é até 3 vezes superior, no modelo com esconsidade de  $45^\circ$ , comparado com o modelo sem esconsidade.

A desconsideração da esconsidade na determinação das armaduras não é correta, mesmo para pequenos ângulos de esconsidade.

Com os parâmetros adotados para os braços de alavanca e espessura das chapas, a ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$  não atende à tensão admissível no concreto. A adoção de um concreto C45 seria uma solução. Uma laje com maior espessura aumentaria o custo e as solicitações devido ao peso próprio, mas, possivelmente, também atenderia.

Ressalte-se que o aumento das espessuras das chapas extremas, com conseqüente diminuição dos braços de alavanca, não apresentou resultados satisfatórios, pois, apesar do aumento da área de concreto, a elevação das sollicitações nas chapas também aumentou a força no concreto, mantendo a laje em compressão excessiva.

Da Figura 3.93 à Figura 3.99, são apresentados os diagramas de  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$  e  $V_{máx}$ , respectivamente, devido às cargas permanentes para as pontes com viga lateral sem esconsidade e com ângulo de esconsidade de  $30^\circ$ .

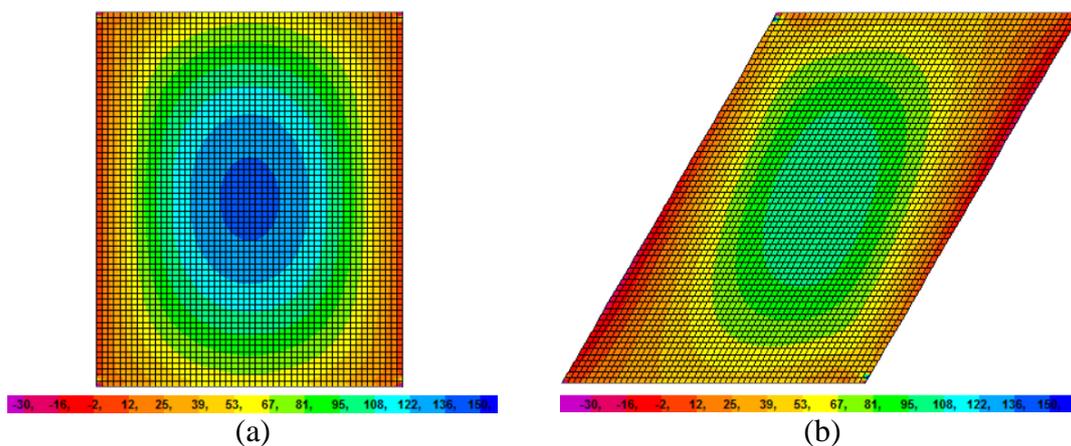


Figura 3.93 – Diagramas de  $M_x$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

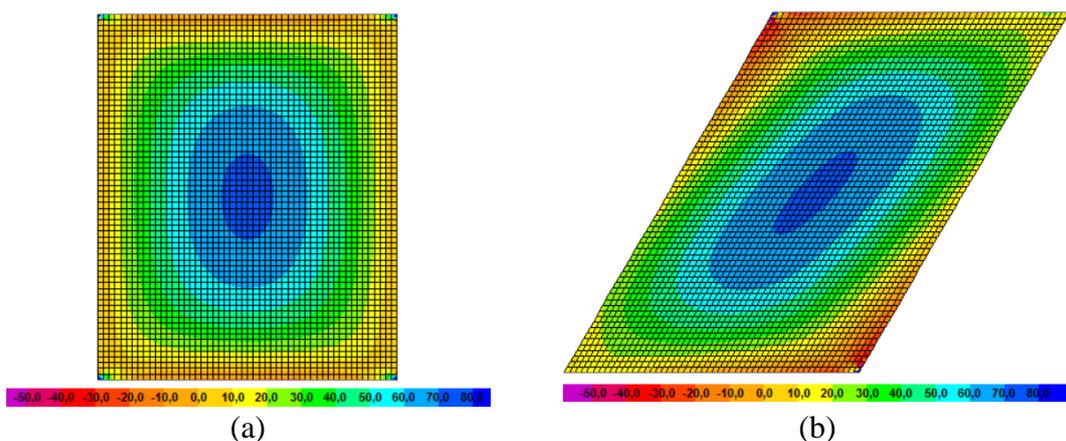


Figura 3.94 – Diagramas de  $M_y$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

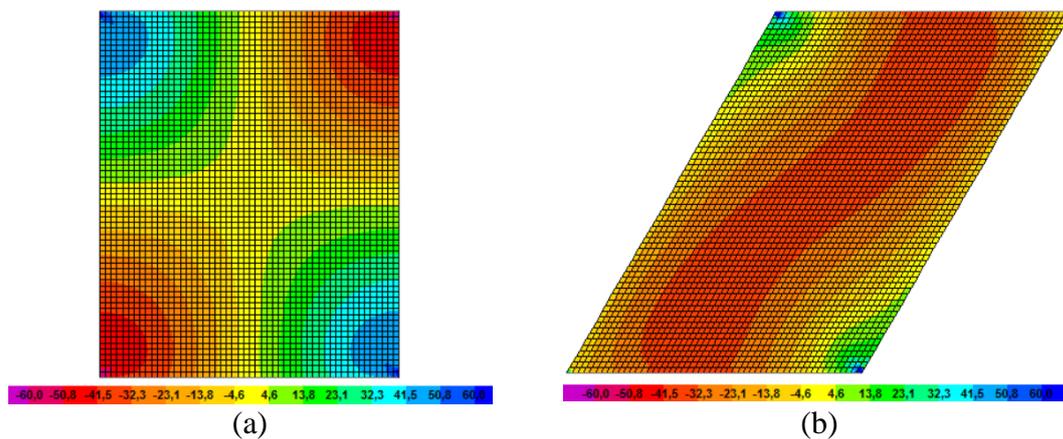


Figura 3.95 – Diagramas de  $M_{xy}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

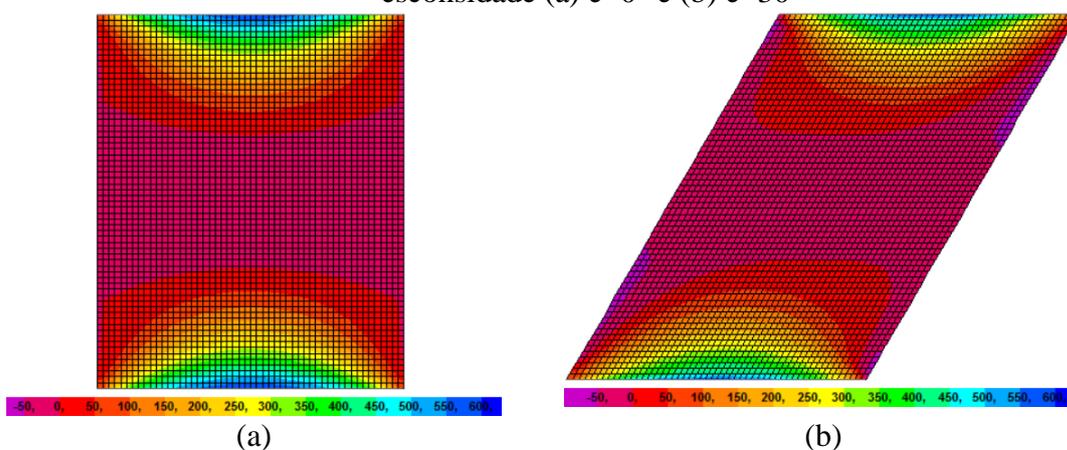


Figura 3.96 – Diagramas de  $F_x$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

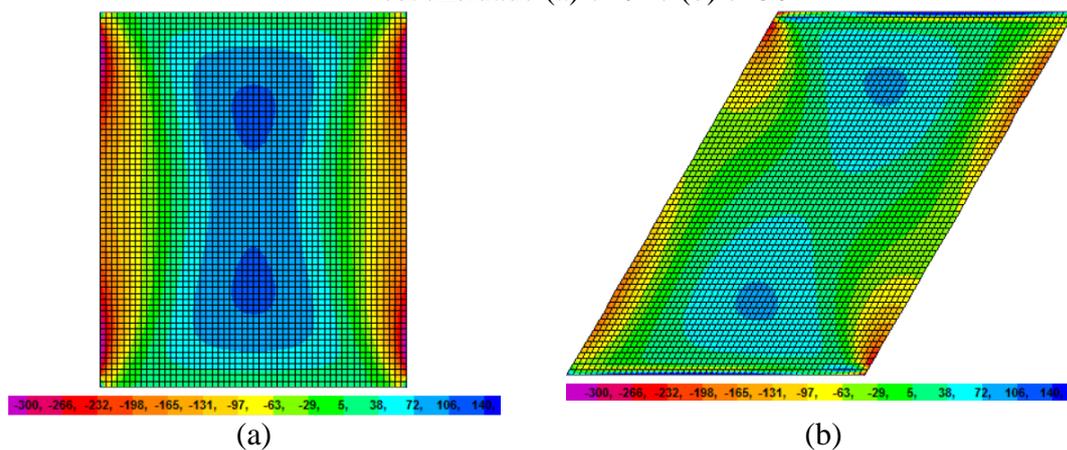


Figura 3.97 – Diagramas de  $F_y$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

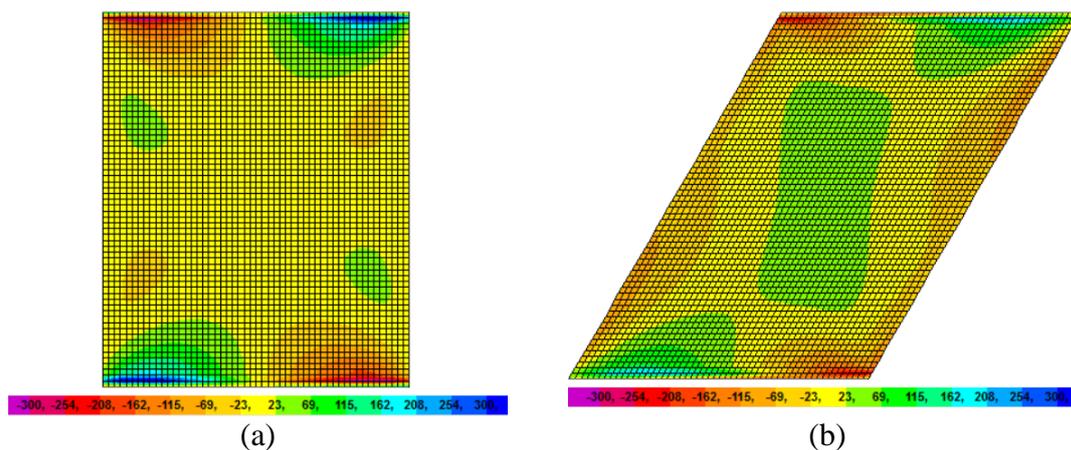


Figura 3.98 – Diagramas de  $F_{xy}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

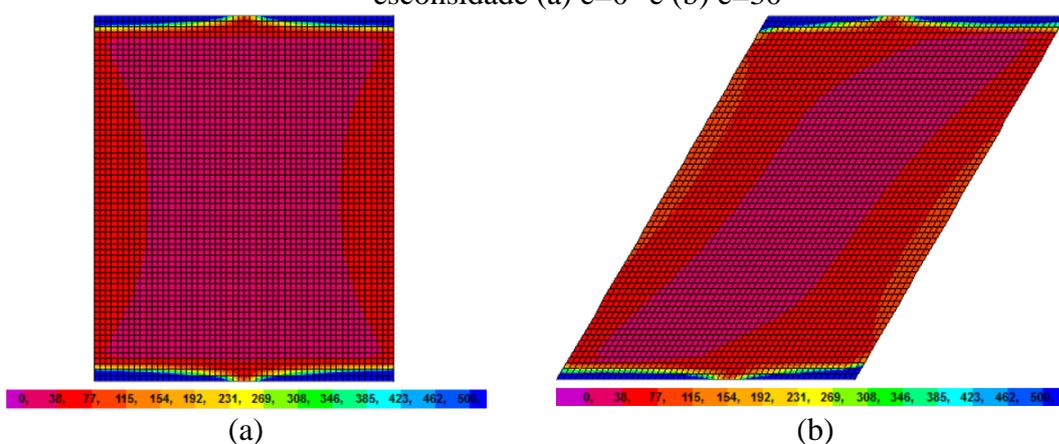


Figura 3.99 – Diagramas de  $V_{m\acute{a}x}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

A utilização de vigas laterais resulta em menor variação nas solicitações na laje. O momento volvente  $M_{xy}$  atinge valores da ordem de 30% do momento  $M_x$  máximo, no meio do vão, independentemente da esconsidade. Todavia,  $M_{xy}$  é mais intenso nos cantos, na laje sem esconsidade, enquanto nas lajes esconsas, a região central é mais solicitada.

Apesar de as regiões do meio do vão, próximas às vigas laterais, serem pouco solicitadas à flexão, elas apresentam elevada força longitudinal de tração, uma vez que, nessa área, a laje é mesa de tração das vigas invertidas. Tal força de tração elevada resulta em grandes armaduras longitudinais, nesses pontos, inclusive maiores do que as armaduras da região do meio do vão, nas pontes de menor esconsidade.

O aumento das áreas de aço e tensões no concreto, em módulo, com o aumento do ângulo de esconsidade das pontes deve-se, principalmente, à não ortogonalidade das armaduras.

O cálculo das áreas de aço para as solicitações obtidas através dos modelos esconsos, considerando-se malhas ortogonais, resultou em diminuição da armadura principal com o aumento da esconsidade, e na manutenção da armadura secundária. Portanto, as áreas de aço

totais foram inferiores àquelas calculadas para a malha oblíqua. Ressalta-se, no entanto, que a economia no peso de aço, é contrabalançada com maior trabalho no detalhamento, corte e dobra das armaduras, onerando a construção.

### 3.4.5. Peso total de aço e taxas de armadura

#### 3.4.5.1. Critérios adotados

Foram utilizados os mesmos critérios enumerados no item 3.3.6.1.

#### 3.4.5.2. Detalhamento das armaduras

As Figuras 3.100 a 3.107 apresentam o detalhamento esquemático das lajes com vigas laterais.

No detalhamento da ponte sem esconsidade obteve-se um peso total de 6648 kg, resultando em taxas de  $83 \text{ kg/m}^3$  de concreto e  $50 \text{ kg/m}^2$  de área em planta. Para a ponte com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ , o peso total de aço foi de 8303 kg, ou seja, um aumento de aproximadamente 25% em relação à ponte sem esconsidade; as taxas de aço foram de  $104 \text{ kg/m}^3$  e  $62 \text{ kg/m}^2$ .

Para as pontes com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , os pesos totais de aço foram de 12538 kg e 21271 kg, respectivamente. As taxas de aço foram de  $157 \text{ kg/m}^3$  e  $94 \text{ kg/m}^2$ , para a ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , e  $266 \text{ kg/m}^3$  e  $160 \text{ kg/m}^2$  para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade. Os acréscimos em relação à ponte sem esconsidade foram da ordem de 90% para a ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$  e de 320% para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade.

Tabela 3.5 – Peso total e taxas de aço para pontes em laje com vigas laterais

e	Peso total de aço (kg)	Taxas		P/P <sub>0</sub>
		kg/m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	
0°	6648	50	83	1,00
15°	8303	62	104	1,25
30°	12538	94	157	1,89
45°	21271	160	266	3,20

As relações mínimas entre armaduras oblíquas propostas não afetaram o detalhamento para nenhuma esconsidade estudada. A armadura mínima proposta, no entanto, resultou em aumentos de 6%, 26% e 32% no peso total de aço, para as pontes com ângulos de esconsidade  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , respectivamente.

A majoração da armadura calculada para a ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , conforme a Tabela 2.4, também aumentou o peso total de aço em, aproximadamente, 5%.

A influência das armaduras mínimas e relações mínimas entre armaduras oblíquas propostas no peso total de aço é maior nas pontes em laje com vigas laterais, do que naquelas sem vigas laterais. Entretanto, o aumento das áreas de aço necessárias com a diminuição do ângulo entre as camadas de armadura também contribui bastante para a elevação das taxas. Salienta-se que, em um detalhamento mais refinado das armaduras, as taxas mínimas e relações mínimas entre armaduras propostas teriam impacto ainda maior sobre o peso total de aço.

A economia na armadura da laje das pontes com vigas laterais comparadas às pontes sem vigas laterais é de 15% para a ponte sem esconsidade. Nas pontes com esconsidade de  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , a economia é da ordem de 20%, e, naquela com ângulo de esconsidade  $45^\circ$  de 10%. Cabe, entretanto, ressaltar que, nas pontes com vigas laterais, foram desprezados o volume de concreto e as armaduras das vigas.

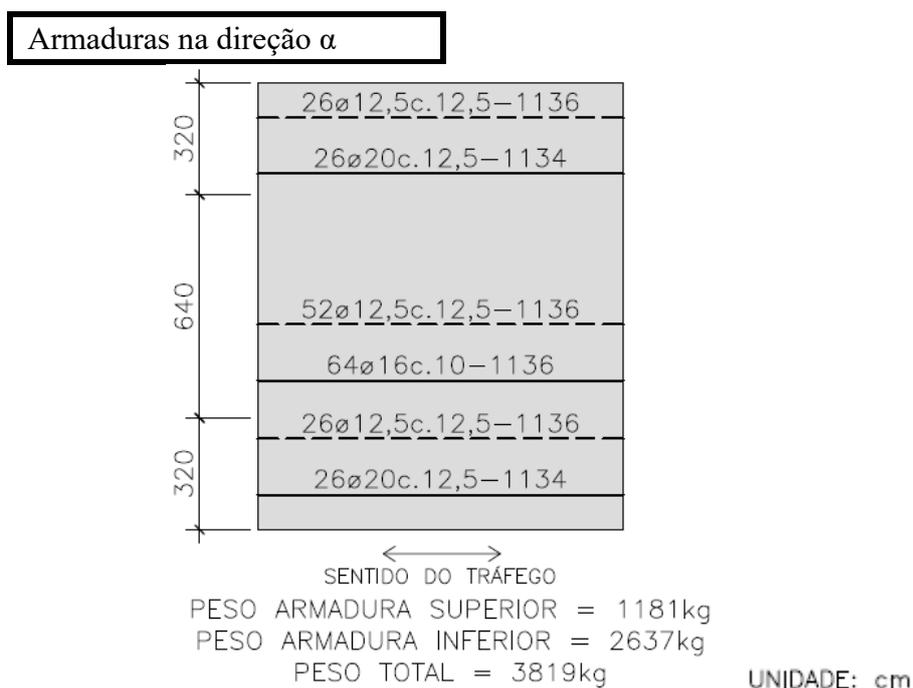


Figura 3.100 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ ,  $\text{come}=0^\circ$

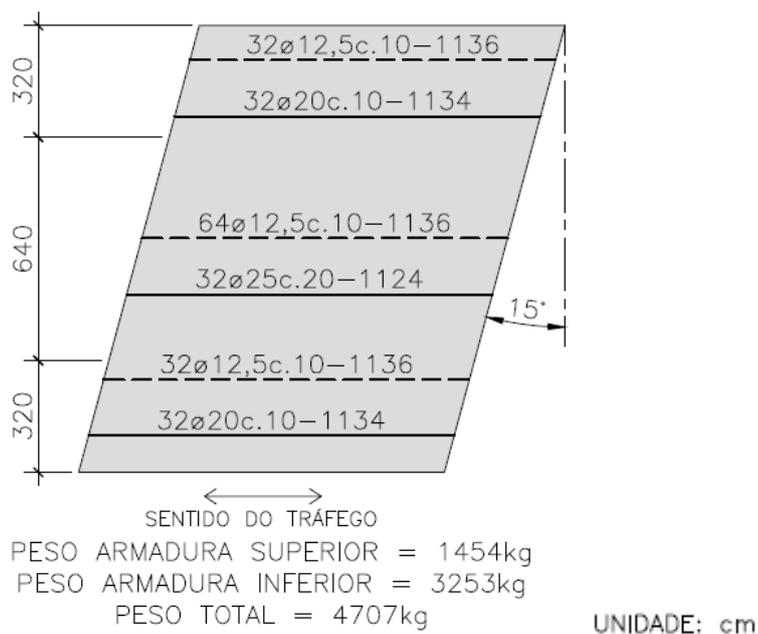


Figura 3.101 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ , come=15°

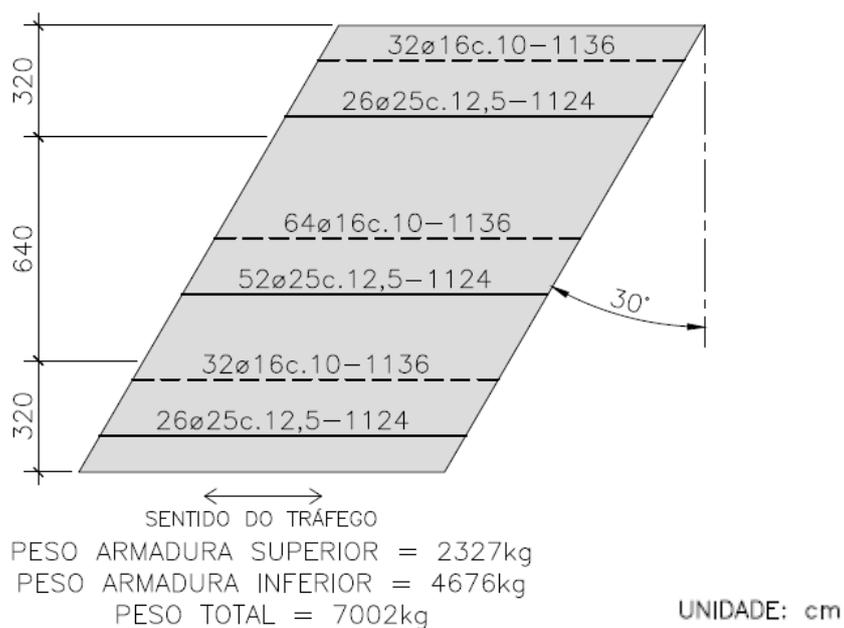


Figura 3.102 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ , come=30°

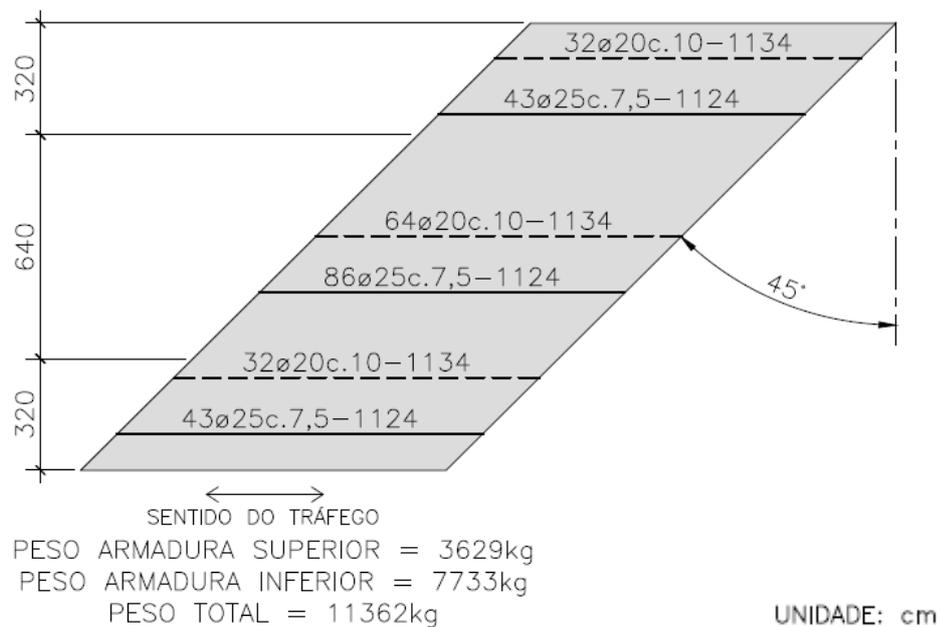


Figura 3.103 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\alpha$ , come=45°

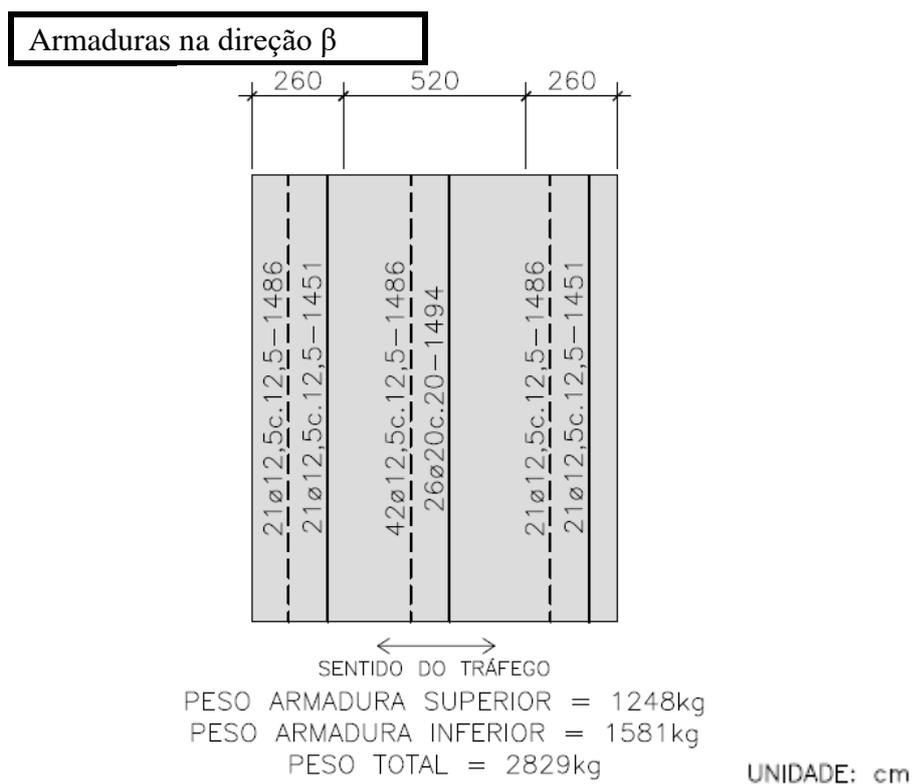


Figura 3.104 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ , come=0°

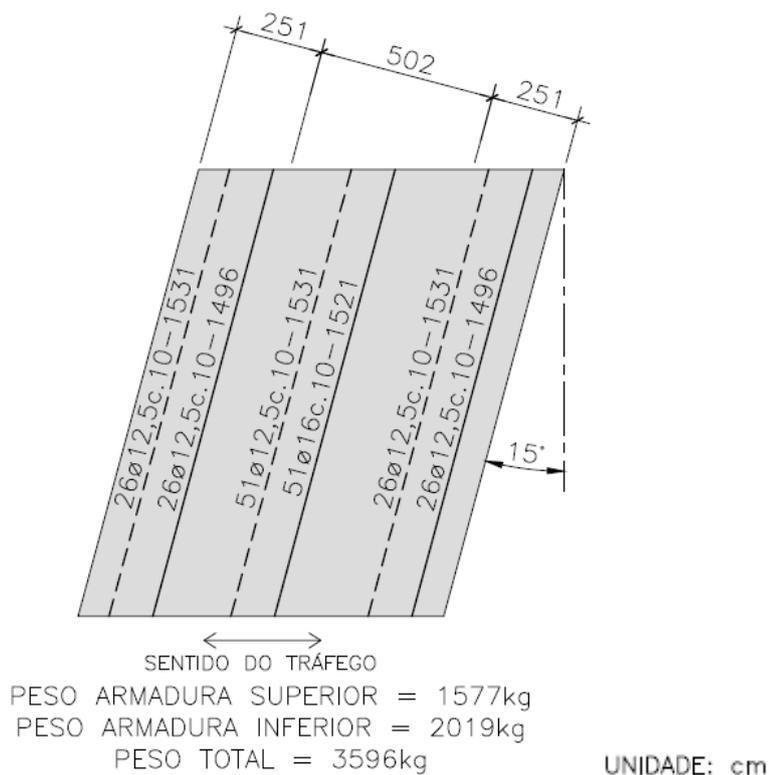


Figura 3.105 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ ,  $\text{come}=15^\circ$

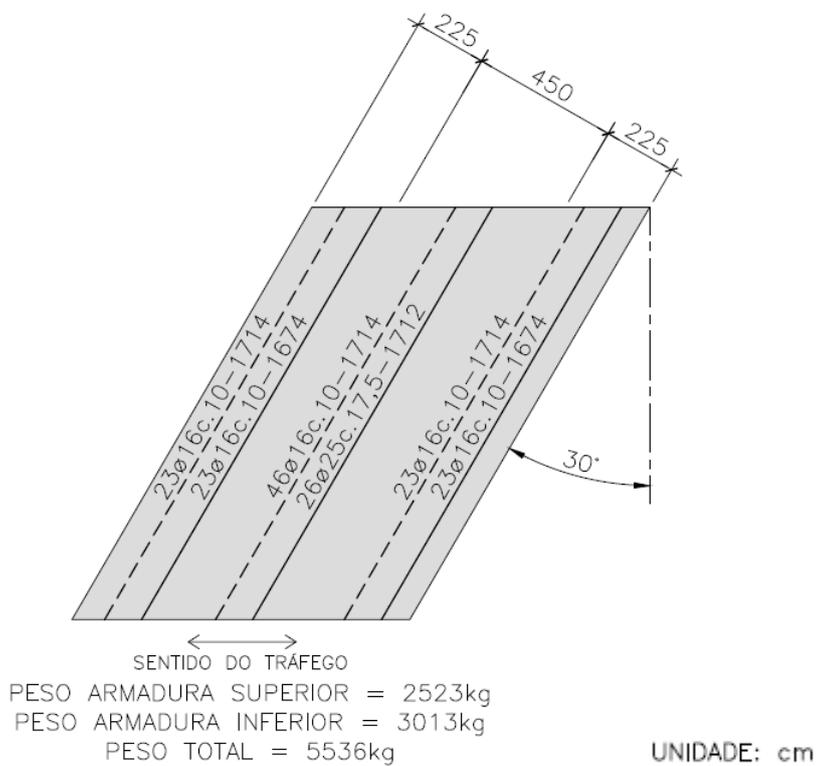


Figura 3.106 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ ,  $\text{come}=30^\circ$

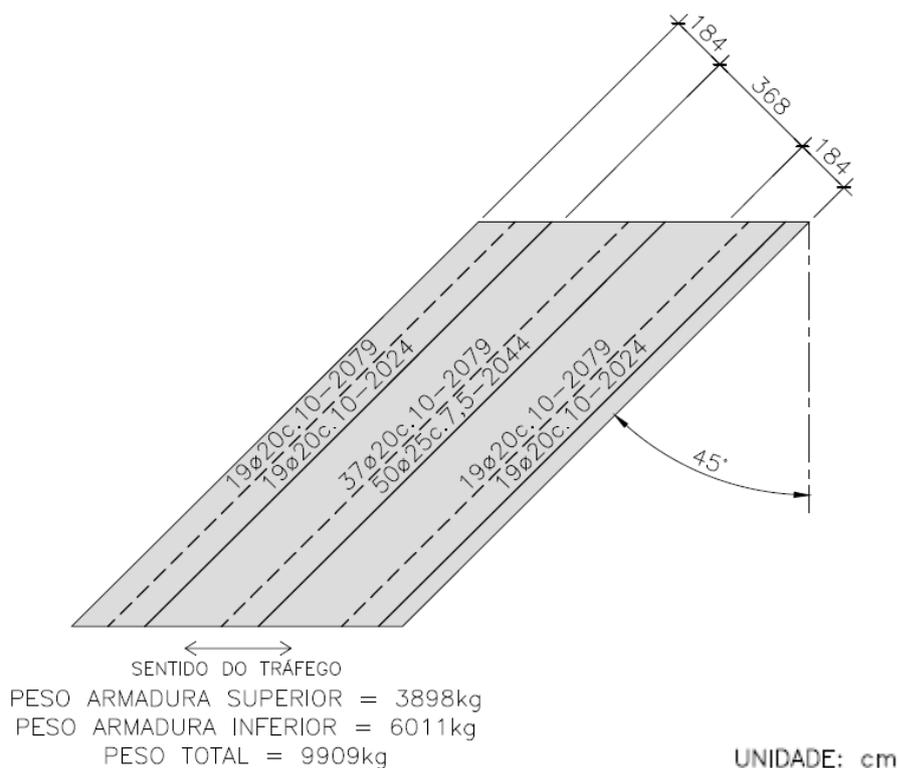


Figura 3.107 – Detalhamento esquemático das armaduras na direção  $\beta$ , com  $\alpha=45^\circ$

### 3.5.PONTES EM VIGAS MÚLTIPLAS

#### 3.5.1. Descrição dos modelos

Foram estudadas 4 pontes de acordo com os ângulos de esconsidade  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . As pontes são estruturadas por 5 vigas ligadas através da laje e transversinas de apoio. O vão teórico das vigas é de 35,0m e a sua seção transversal é apresentada na Figura 3.109. A distância entre eixos das vigas é de 2,70m e a laje, que tem 23cm de espessura, avança em balanços laterais de 1,0m, totalizando 12,8m de largura. A seção transversal acomoda duas pistas de 3,50m, acostamentos de 2,5m e barreiras NewJersey em ambas as extremidades, conforme apresentado na Figura 3.108.

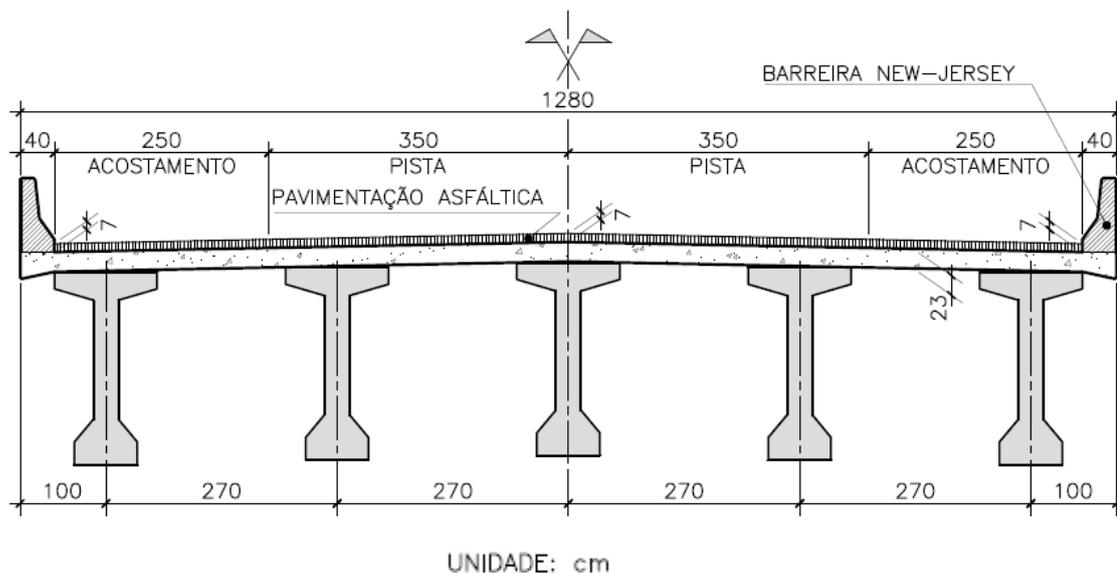


Figura 3.108 – Seção transversal dos tabuleiros

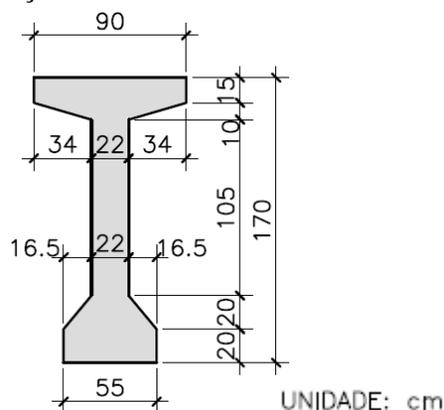


Figura 3.109 – Seção transversal das vigas

Os tabuleiros foram modelados no programa SAP2000. Foram utilizados elementos de barra para as vigas e transversinas, e elementos decasca fina para a laje, discretizada em malha de aproximadamente 0,25m x 0,25m. As barras foram inseridas considerando-se seu eixo deslocado em relação ao plano da laje, para melhor avaliação dos esforços normais na laje, em função dessa excentricidade.

Os eixos locais da laje foram orientados com a direção 1, conforme a direção X global, paralela ao eixo das vigas. Dessa forma, o ângulo  $\alpha$  de uma das camadas de armaduras, utilizado nas equações de dimensionamento resumidas na Tabela 2.2, é sempre zero. Consequentemente, o ângulo  $\beta$  é dado pela equação (3.1).

Os nós dos apoios tiveram os deslocamentos em Z restringidos e, nas direções X e Y, foram utilizados apoios elásticos simulando os aparelhos de apoio de neoprene fretado. O aparelho de apoio considerado tem dimensões em planta de 250mm por 400mm e altura total

de 54mm, composta por três camadas de 12mm de borracha, 4 chapas de 3mm de aço e recobrimentos de 3mm, conforme mostrado na Figura 3.110.

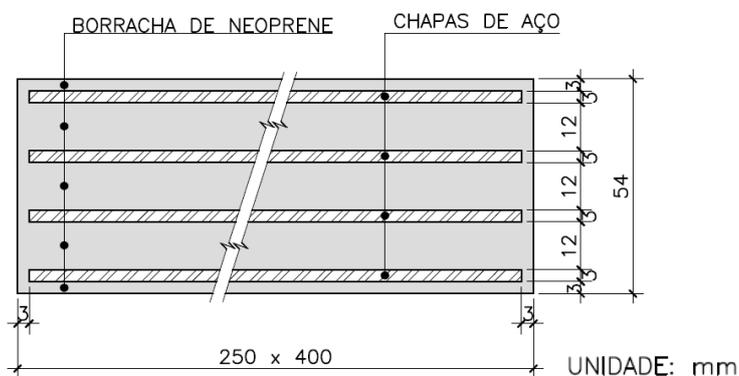


Figura 3.110 – Aparelho de apoio de neoprene fretado

A rigidez  $k_{neop}$  de cada aparelho de apoio, nas direções X e Y, é dada por

$$K_{neop} = \frac{GS}{h_{borr}} = \frac{(1000 \text{ kN/m}^2)[(0,25\text{m})(0,40\text{m})]}{0,036\text{m}} = 2777,78 \text{ kN/m} \quad (3.35)$$

onde

- $G$  é o módulo de elasticidade transversal do neoprene;
- $S$  é a área em planta do aparelho de apoio;
- $h_{borr}$  é a espessura total das camadas de borracha do neoprene fretado.

A Figura 3.111 apresenta a ponte ortogonal em planta e a Figura 3.112 mostra as pontes esconsas em planta. As vigas foram numeradas de V1 a V5 para referência posterior.

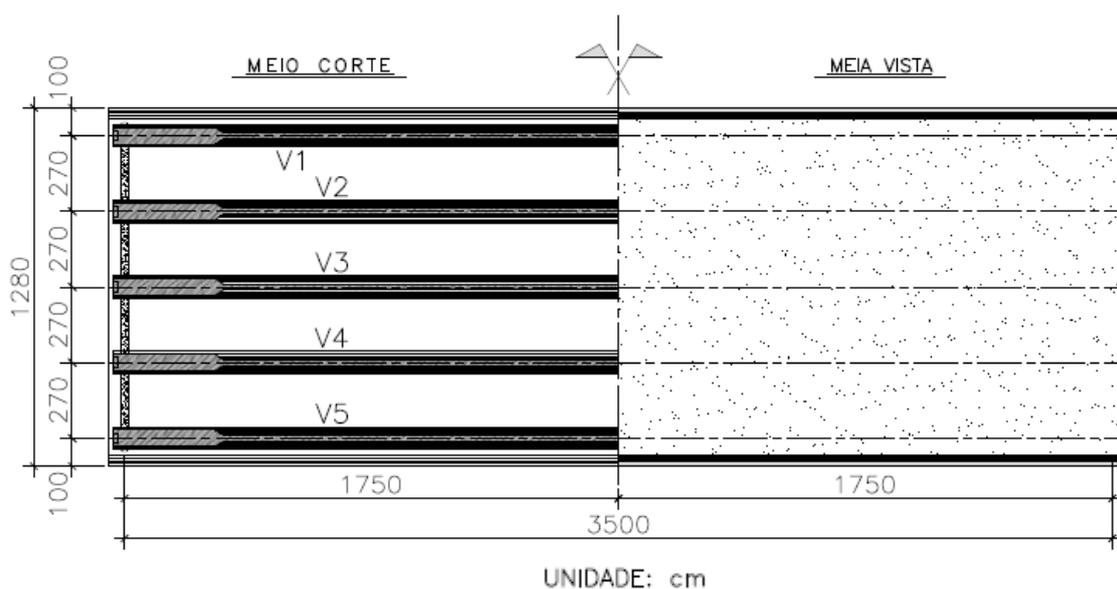


Figura 3.111 – Ponte com  $e=0^\circ$  em planta

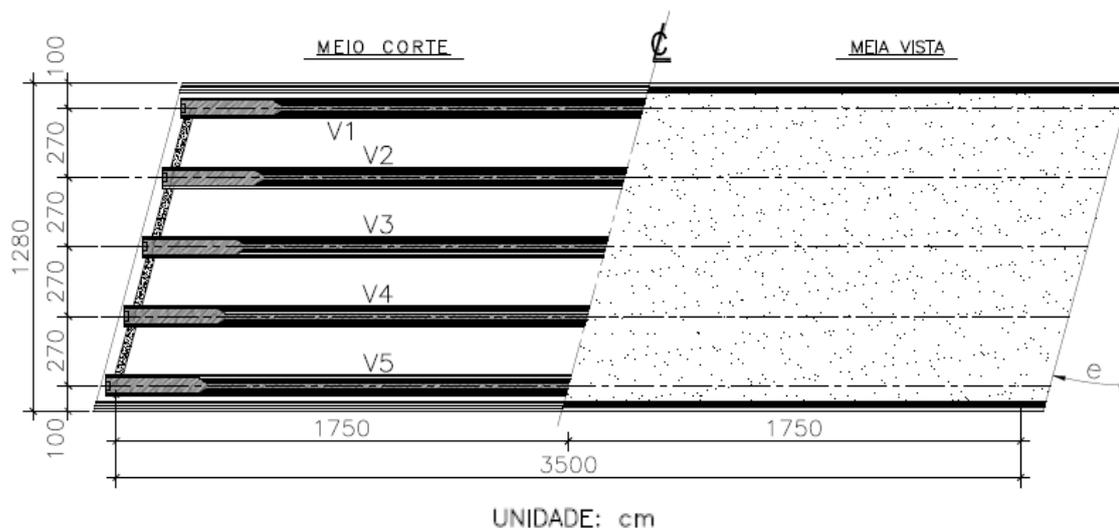


Figura 3.112 – Pontes esconsas em planta

Assim como para as pontes em laje, foi adotado o concreto C35, com resistência característica de 35 MPa. Foram utilizados o mesmo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson definidos no item 3.3.1.

O peso das vigas e transversinas foi modificado para zero, uma vez que é mobilizado pelas vigas isoladas, antes da concretagem da laje, não gerando solicitações na mesma, que é o objeto em estudo. O peso próprio da laje foi calculado, automaticamente, pelo programa de análise, e, apesar de, na grande maioria dos casos deste tipo de solução, o tabuleiro ser executado com a utilização de pré-lajes, por simplificação, considerou-se que para sua concretagem, todo o conjunto foi escorado e o escoramento retirado apenas após a solidarização do conjunto viga+laje.

Admitiu-se que as longarinas foram protendidas, integralmente, antes da concretagem da laje. As perdas diferidas dos cabos de protensão das vigas foram desprezadas.

Foram considerados como sobrecarga permanente a pavimentação asfáltica, com a carga de recapeamento e o peso das barreiras tipo New Jersey.

A carga de pavimentação  $g_{pav}$  e das barreiras New Jersey  $g_{NJ}$  são dadas por

$$g_{pav} = h_{pav} \gamma_{pav} + g_{rec} = (0,07m) \left( 24 \frac{kN}{m^3} \right) + 2,0 \frac{kN}{m^2} = 3,68 \frac{kN}{m^2} \quad (3.36)$$

$$g_{NJ} = \frac{S_{NJ} \gamma_{conc.}}{L_T^{elem.}} = \frac{(0,232 \text{ m}^2)(25 \text{ kN/m}^3)}{2(0,25 \text{ m})} = 11,60 \frac{kN}{m^2} \quad (3.37)$$

onde

- $h_{pav}$  é a altura da pavimentação;
- $\gamma_{pav}$  é o peso específico da pavimentação;
- $g_{rec}$  é a carga de recapeamento, definida pela NBR 7187:2003;
- $S_{NJ}$  é a área da seção transversal da barreira New-Jersey;

- $\gamma_{\text{conc.}}$  é o peso específico do concreto;
- $L_T^{\text{elem.}}$  é a largura transversal dos elementos em que a barreira New-Jersey será considerada, ou seja, os 2 elementos do bordo livre, cada um com 0,25m de largura.

Para carga móvel considerou-se o trem tipo simplificado Classe 45 da NBR 7188:2013 já descrito anteriormente e mostrado na Figura 3.6. Os coeficientes de impacto foram calculados, conforme as equações (3.5)(3.5), (3.7) e (3.9). Os seguintes valores foram adotados:

$$CIV = 1 + 1,06 \left( \frac{20}{35 + 50} \right) = 1,249 \quad (3.38)$$

$$CNF = 1 - 0,05(2 - 2) = 1,00 \quad (3.39)$$

$$CIA = 1,25 \quad (3.40)$$

O coeficiente de impacto adicional CIA da expressão (3.40) é aplicado apenas na região a 5m do início e do fim da ponte.

A carga de multidão foi aplicada em toda a superfície dos tabuleiros, descontando-se apenas as áreas referentes aos guarda-rodas. As cargas das rodas foram aplicadas no modelo, em uma área equivalente à área de contato das rodas com o pavimento, projetada na superfície média da laje, considerando-se um espreadimento da carga em 45°.

A largura  $L_T$  e o comprimento  $L_L$  da projeção do contato da roda com o pavimento na superfície média da laje são dados por

$$L_T = 0,50m + 2 \left( h_{pav.} + \frac{h_{laje}}{2} \right) = 0,50m + 2 \left( 0,07m + \frac{0,23m}{2} \right) = 0,87m \quad (3.41)$$

$$L_L = 0,20m + 2 \left( h_{pav.} + \frac{h_{laje}}{2} \right) = 0,20m + 2 \left( 0,07m + \frac{0,23m}{2} \right) = 0,57m$$

onde  $h_{pav}$  é a altura da pavimentação e  $h_{laje}$  é a altura da laje.

Como as projeções da roda na superfície média da laje e as distâncias entre eixos do veículo-tipo não são múltiplos da malha discretizada,  $L_T$  e  $L_L$  foram adaptados, caso a caso, a valores próximos dos calculados pela expressão (3.41). Os valores adotados para  $L_T$  e  $L_L$  buscaram respeitar os comprimentos entre eixos e os das projeções das rodas. A carga  $Q$  de cada roda, por unidade de área, é dada por

$$Q = \frac{P}{L_T L_L} \quad (3.42)$$

onde  $P$  é a carga total por roda, calculada na equação (3.10)(3.10).

O veículo-tipo foi posicionado em seis posições pré-definidas mostradas da Figura 3.113. à Figura 3.118. Nas posições 1 e 3, o veículo faceia o guarda-rodas com um dos eixos

posicionado, junto à transversina de apoio, e os demais, para dentro da ponte, nos cantos de ângulo obtuso e agudo, respectivamente. Nas posições 2 e 5, o veículo foi posicionado, junto ao apoio e no meio do vão das pontes, respectivamente, com 3 rodas no meio da distância entre as vigas V2 e V3, e as outras rodas de cada eixo entre V3 e V4. Nas posições 4 e 6, o veículo foi posicionado, no meio do vão das pontes, faceando os guarda-rodas em cada lado do tabuleiro.

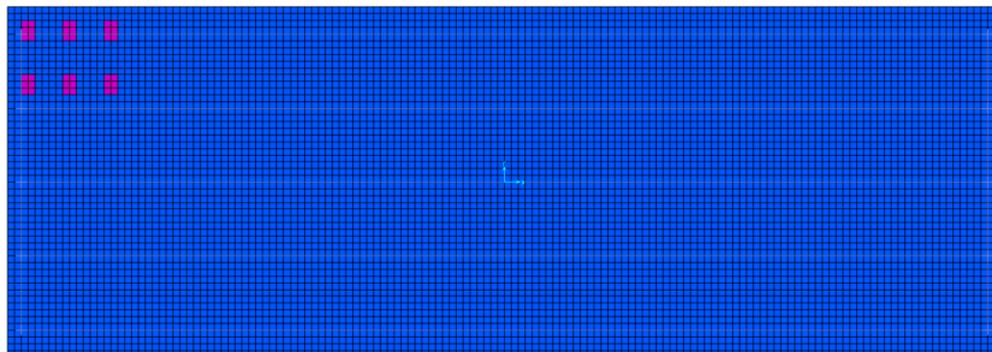


Figura 3.113 – Posição 1 parao veículo-tipo

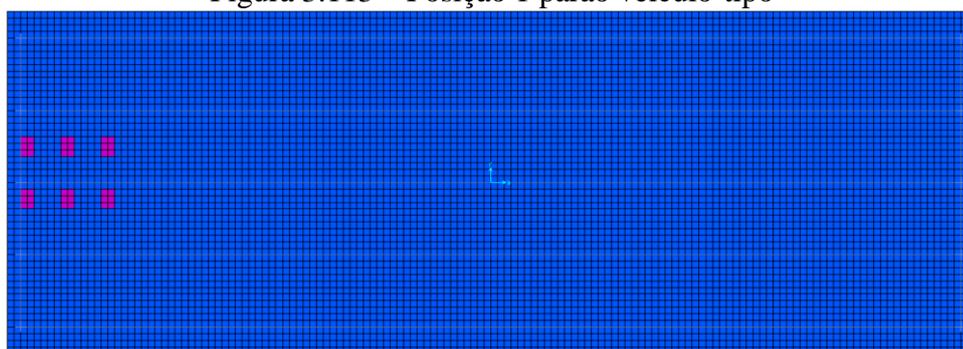


Figura 3.114 – Posição 2 para o veículo-tipo

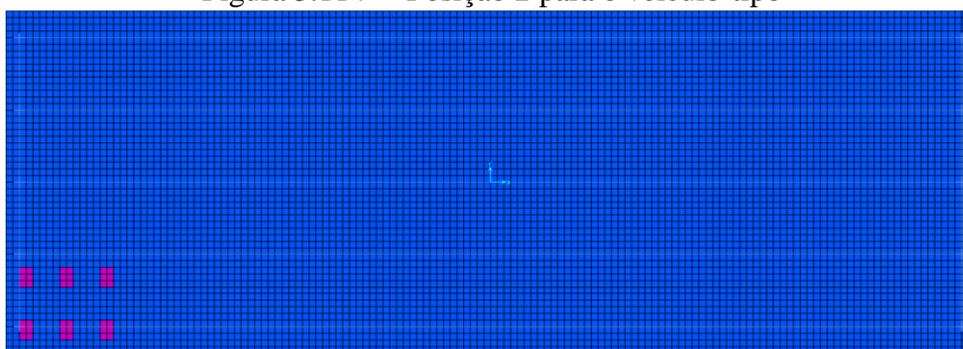


Figura 3.115– Posição 3 para o veículo-tipo

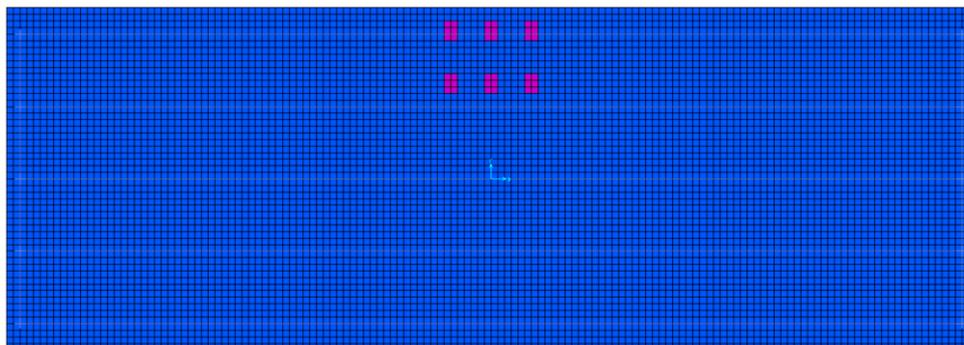


Figura 3.116 – Posição 4 parao veículo-tipo

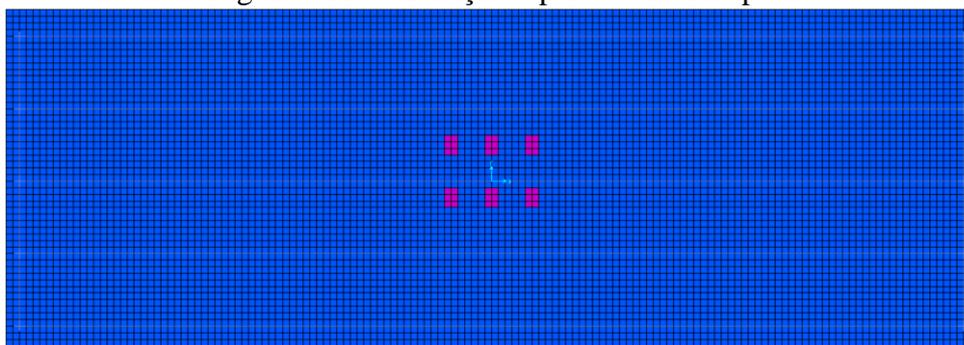


Figura 3.117 – Posição 5 para o veículo-tipo

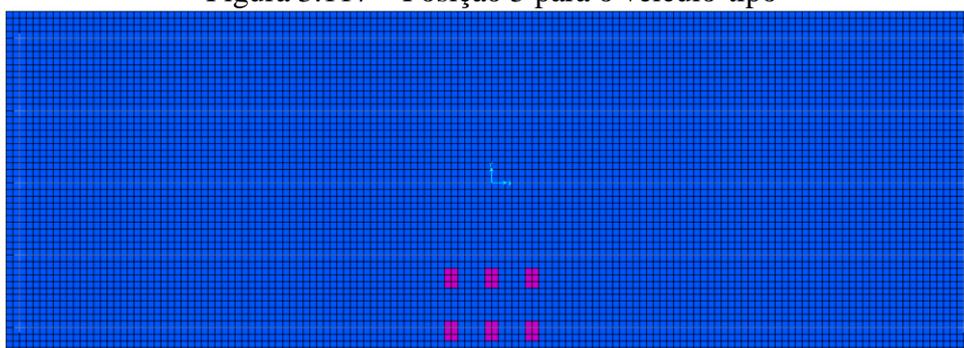


Figura 3.118 – Posição 6 para o veículo-tipo

A variação de temperatura e a retração do concreto foram desprezadas.

### 3.5.2. Critérios de dimensionamento

#### 3.5.2.1. Seções críticas e combinações

Foram escolhidos doze pontos em cada modelo para dimensionamento e análise dos resultados. Os pontos 1 a 6 localizam-sesobre as vigas V1, V3 e V5, próximo ao apoio e no meio do vão da ponte (Figura 3.119).



Figura 3.119 – Pontos 1 a 6 escolhidos para o dimensionamento

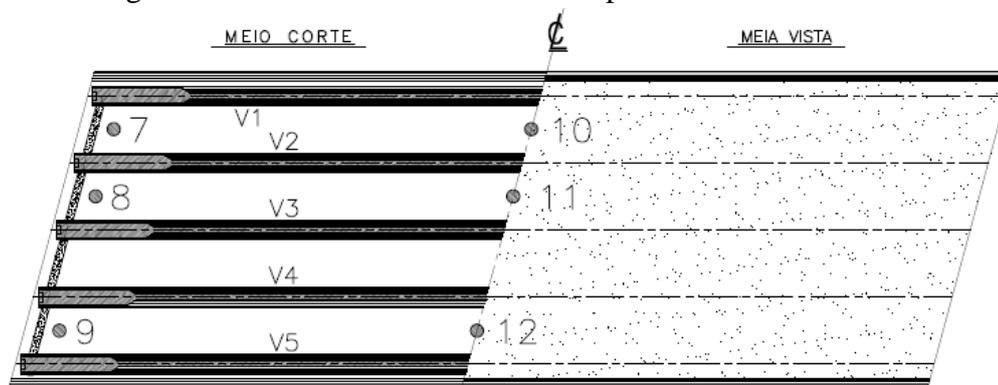


Figura 3.120 – Pontos 7 a 12 escolhidos para o dimensionamento

A Figura 3.120 apresenta a localização dos pontos 7 a 12 entre as longarinas, próximo ao apoio e no meio do vão da ponte. Nos pontos 1 a 3 e 7 a 9, o dimensionamento foi feito considerando-se o coeficiente de impacto adicional (CIA) sobre as cargas móveis, definido na equação (3.40) **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**

As ações foram combinadas de acordo com a expressão (3.14) e os coeficientes da Tabela 3.1. Cada ponto escolhido foi dimensionado para as 14 combinações apresentadas na Tabela 3.2.

### 3.5.3. Armaduras no plano da laje

Para redução das ações nas cascas ao dimensionamento de chapas foram utilizados, inicialmente, os parâmetros pré-definidos apresentados nas equações (2.5) e (2.6), utilizando-se os valores recomendados por LEONHARDT (1978) para  $k_c$  e  $k_z$ . Posteriormente, foi adotada nova espessura para as chapas, e braços de alavanca distintos, para flexão e momento volvente, conforme recomendado pelo CEB-FIP Model Code 1990.

Foi considerado o Aço CA-50 para determinação das armaduras, com tensão de escoamento de projeto  $f_{yd}$  definida na expressão (3.18).

A partir do dimensionamento das 14 combinações de cada ponto, foram identificadas as combinações que forneceram os seguintes parâmetros:

- $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$  → força máxima na armadura superior na direção  $\alpha$ , paralela às longarinas;
- $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  → força máxima na armadura superior na direção  $\beta$ , transversal às longarinas;
- $f_{s\alpha, \text{inf}, \text{máx}}$  → força máxima na armadura inferior na direção  $\alpha$ , paralela às longarinas;
- $f_{s\beta, \text{inf}, \text{máx}}$  → força máxima na armadura inferior na direção  $\beta$ , transversal às longarinas;
- $|f_{c\phi}|_{\text{sup}, \text{máx}}$  → força máxima no concreto segundo a inclinação das microfissuras  $\phi$ , na chapa superior
- $|f_{c\phi}|_{\text{inf}, \text{máx}}$  → força máxima no concreto segundo a inclinação das microfissuras  $\phi$ , na chapa inferior

#### 3.5.3.1. Armaduras transversais ao plano da laje

As armaduras transversais ao plano da laje foram dimensionadas de acordo com o método preconizado pela NBR 6118:2014, descrito no item 3.3.3.3.

A força cortante solicitante máxima foi obtida, manualmente, em uma seção localizada, na projeção da face da alma da viga, na laje. Foram consideradas as cargas permanentes enumeradas anteriormente. A roda do veículo-tipo foi posicionada faceando a seção de cálculo, e sua carga foi considerada integralmente na determinação do cortante solicitante da seção adotada. Além da carga da roda foi considerada a carga de multidão atuando no restante da laje, fora da área de projeção do veículo-tipo.

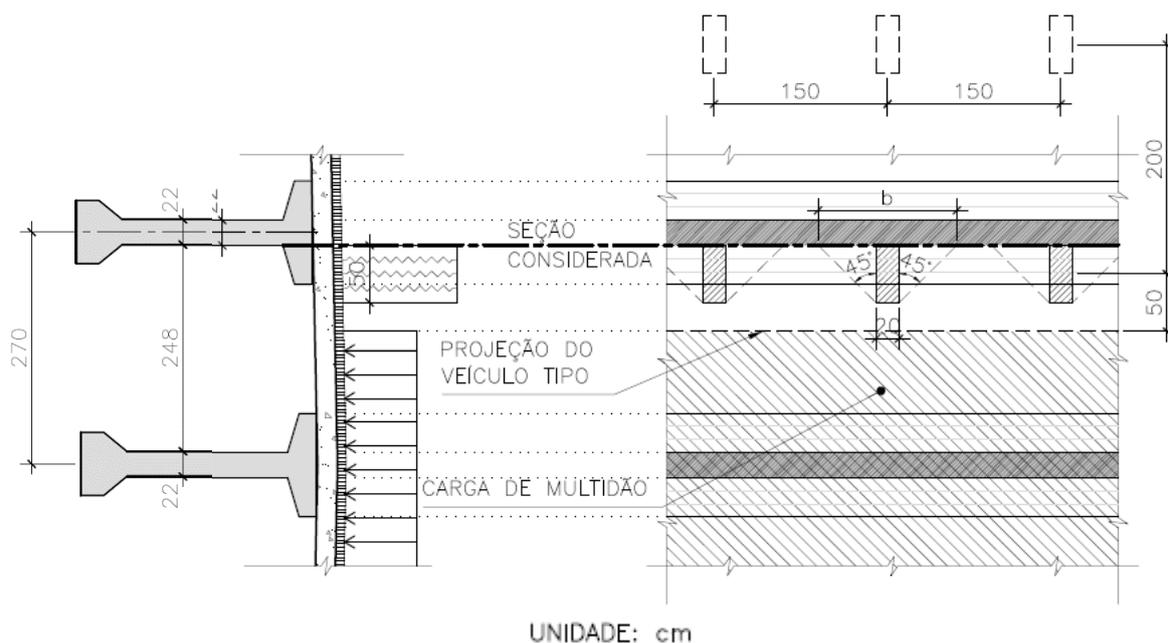


Figura 3.121 – Posicionamento das cargas para determinação do cortante solicitante máximo e da largura  $b_w$

A largura na seção resistente foi obtida, conforme recomendação do CEB-FIP Model Code 2010, para cargas concentradas próximas a apoios lineares, considerando-se a distribuição da carga da roda, em um ângulo de  $45^\circ$  até a seção de cálculo. A Figura 3.121 mostra a seção adotada, o posicionamento da carga móvel e a distribuição da carga concentrada para determinação da largura da seção.

De acordo com a hipótese considerada, a força cortante solicitante máxima será a mesma para todas as pontes em vigas múltiplas, independentemente da esconsideade, uma vez que o inter-eixo de vigas é o mesmo em todos os modelos. A força cortante na seção adotada devido às cargas permanentes é

$$V_g = \frac{2,48[0,23(25\text{kN/m}^3) + 0,07(24\text{kN/m}^3) + 2\text{kN/m}^2]}{2} = 11,69 \text{ kN/m} \quad (3.43)$$

Devido à carga da roda do veículo-tipo, a força cortante solicitante é dada por

$$V_{VT} = \frac{P_{roda}}{b} = \frac{75 \text{ kN}}{1,20} = 62,5 \text{ kN/m} \quad (3.44)$$

Considerando-se, simplifcadamente, a laje biengastada nas vigas, a força cortante na seção adotada devido à carga de multidão distribuída, conforme mostrado na Figura 3.121, é 2,7 kN/m.

Combinadas as forças cortantes de acordo com a expressão (3.14) e os coeficientes da Tabela 3.1, obtém-se aforça cortante solicitante máxima de cálculo

$$V_{sd} = 1,35(11,69) + 1,5(62,5 + 2,7) = 113,58 \text{ kN/m} \quad (3.45)$$

Para a determinação da força cortante resistente de cálculo, a armadura no plano da laje foi desprezada, pois nas pontes esconsas a direção da armadura não coincide com a direção considerada para a força cortante solicitante. Apesar da forte compressão da laje, no sentido longitudinal das pontes, a força normal na seção também foi desprezada, já que o cortante solicitante foi considerado, de forma simplificada, agindo apenas no sentido transversal do tabuleiro.

O coeficiente  $k$  foi calculado, admitindo-se que mais de 50% da armadura inferior chega ao apoio, uma vez que, nesse tipo de solução, é usual se estender toda a armadura transversal positiva calculada para o pano entre vigas até a região sobre as vigas. Assim, para o coeficiente  $k$  obtém-se

$$k = |1,6 - 0,20| = 1,40 \quad (3.46)$$

Para a força cortante resistente de cálculo, a equação **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** fornece

$$V_{Rd1} = [0,401MPa(1,4)(1,2)](1,0)(0,20) = 134,74 \text{ kN/m} \quad (3.47)$$

Como  $V_{Rd1} > V_{Sd}$ , as lajes não necessitam de armaduras de cisalhamento e as armaduras, no plano das lajes, foram determinadas, sem a consideração dos acréscimos de forças nas chapas devido ao cortante transversal.

### 3.5.4. Resultados do dimensionamento das armaduras no plano das chapas e tensões no concreto

#### 3.5.4.1. Dimensionamento com $k_z = 0,9$ e $k_c = 0,3$

Para o dimensionamento das armaduras no plano da lajesão utilizados, inicialmente, os parâmetros  $k_c = 0,3$  e  $k_z = 0,9$  nas equações (2.5) e (2.6), tal como recomendado por LEONHARDT (1978). Assim, o braço de alavanca médio  $z_m$  e a espessura das chapas  $t_c$  são dados por

$$z_m = k_z \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = 0,9 \left( \frac{0,205 + 0,195}{2} \right) = 0,180 \text{ m} \quad (3.48)$$

$$t_c = k_c \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) = 0,3 \left( \frac{0,205 + 0,195}{2} \right) = 0,060 \text{ m} \quad (3.49)$$

As Figuras 3.122 a 3.145 apresentam os resultados do dimensionamento dos 12 pontos escolhidos para cada uma das 4 pontes estudadas.

$f_{sa,sup,máx}$  e  $a_{sa,sup,máx}$

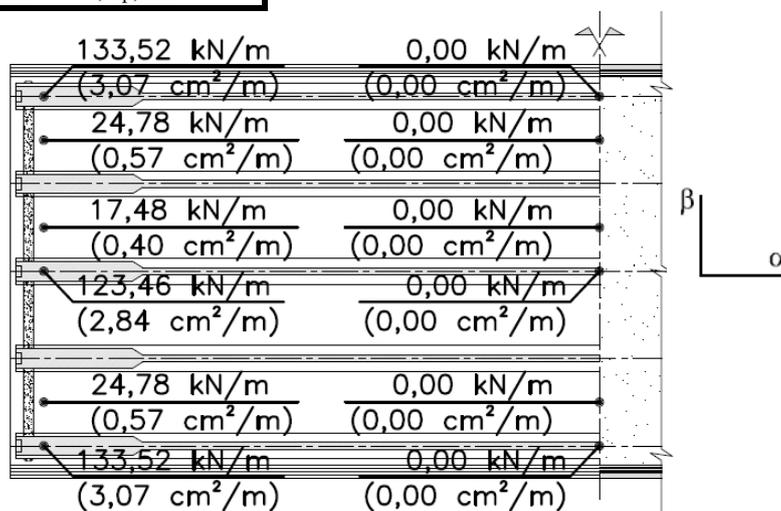


Figura 3.122 – Resultados para  $f_{sa,sup,máx}$  e  $a_{sa,sup,máx}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=0^\circ$

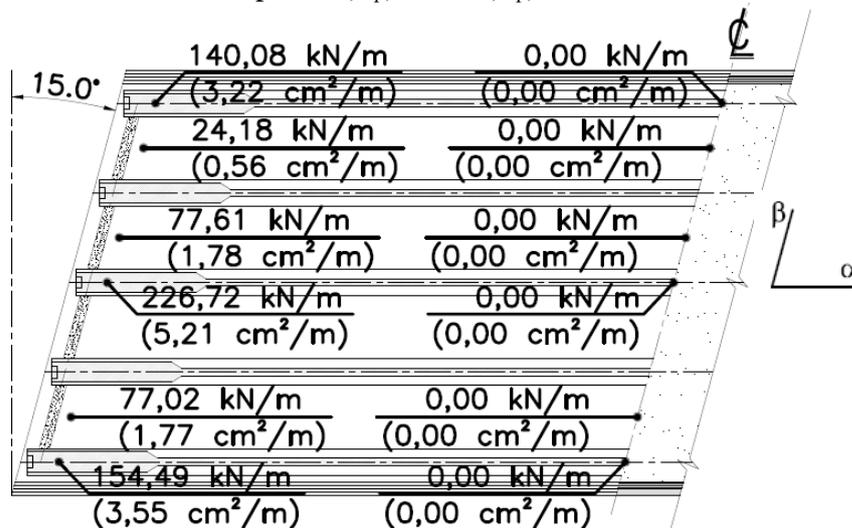


Figura 3.123 – Resultados para  $f_{sa,sup,máx}$  e  $a_{sa,sup,máx}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=15^\circ$

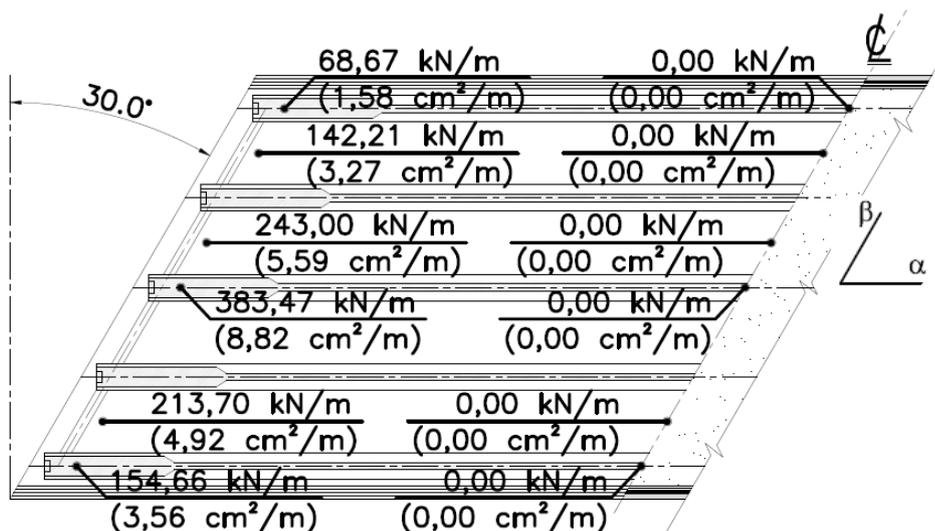


Figura 3.124 – Resultados para  $f_{sa,sup,máx}$  e  $a_{sa,sup,máx}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=30^\circ$

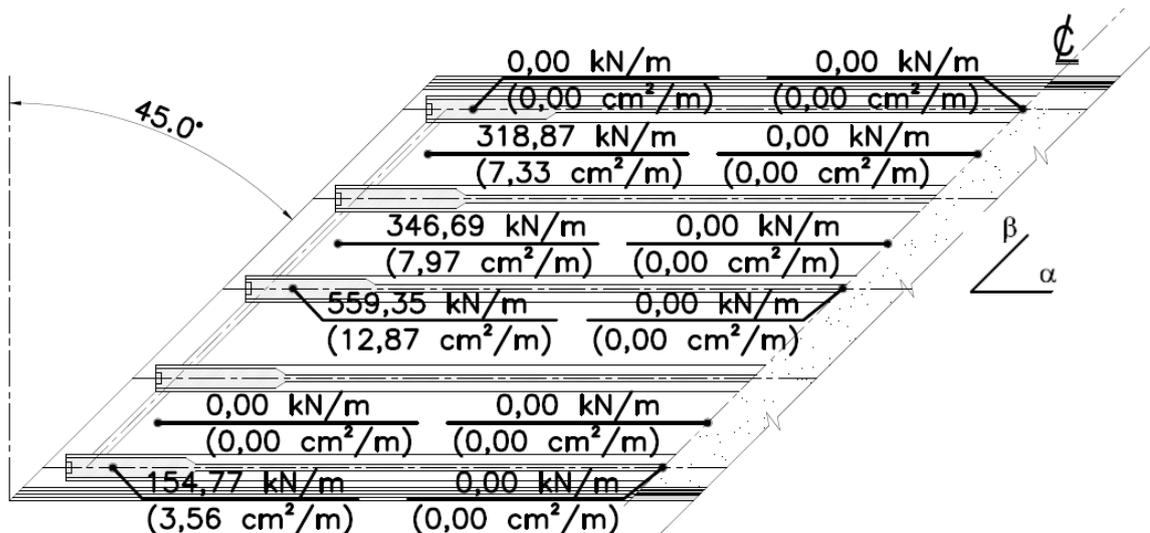


Figura 3.125 – Resultados para  $f_{s\alpha, sup, máx}$  e  $a_{s\alpha, sup, máx}$ ,  $com k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=45^\circ$

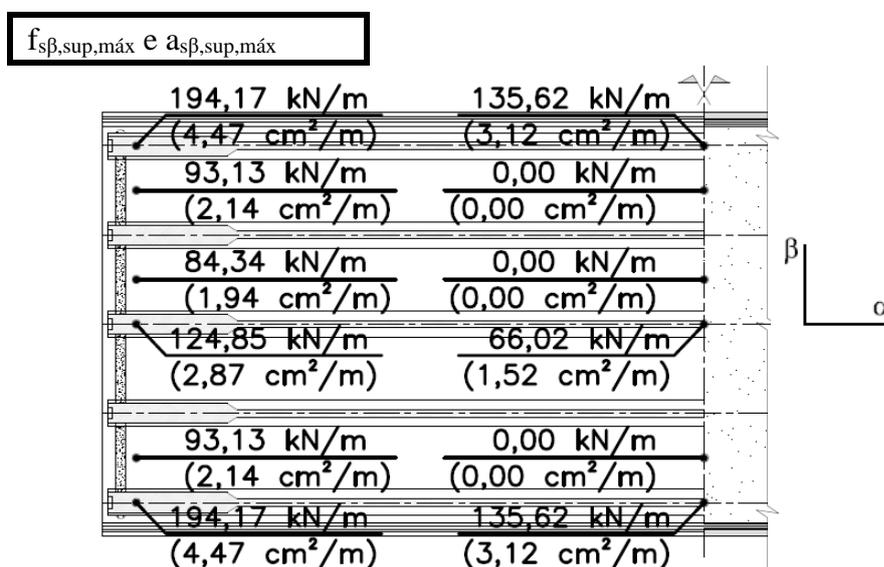


Figura 3.126 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ ,  $com k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=0^\circ$

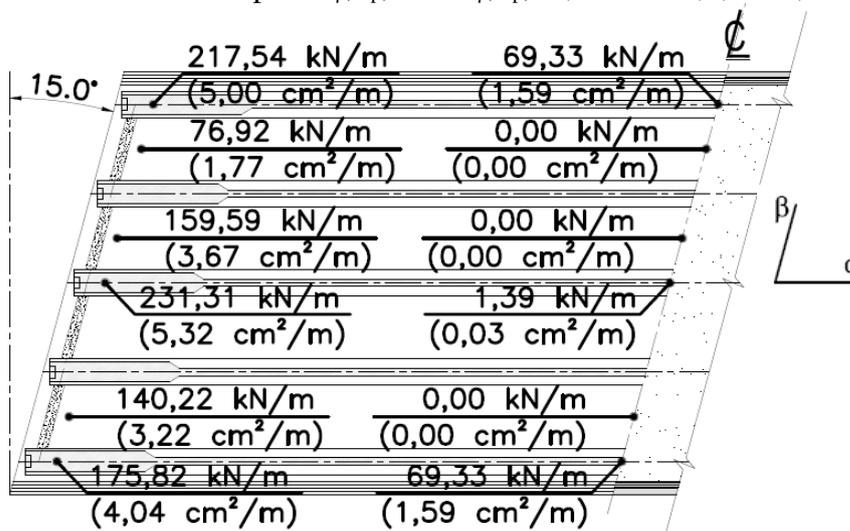


Figura 3.127 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ ,  $com k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=15^\circ$

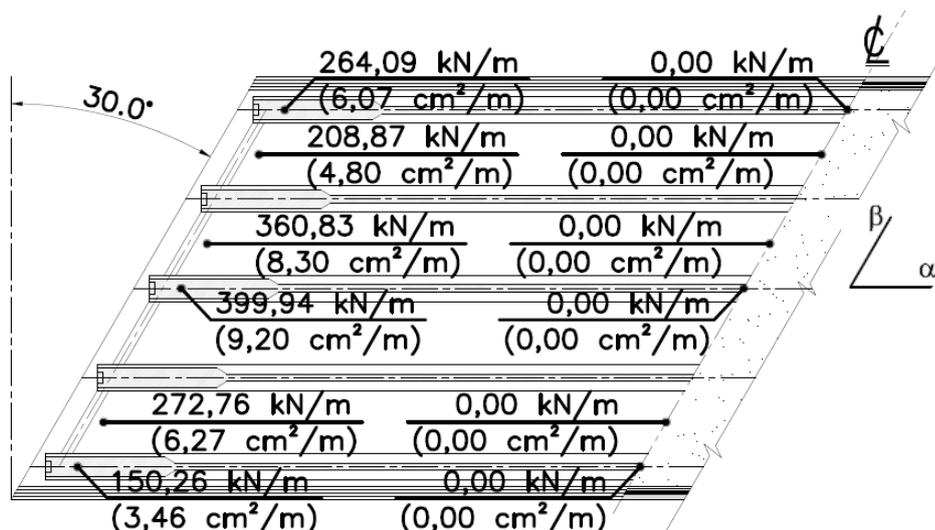


Figura 3.128 – Resultados para  $f_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=30^\circ$

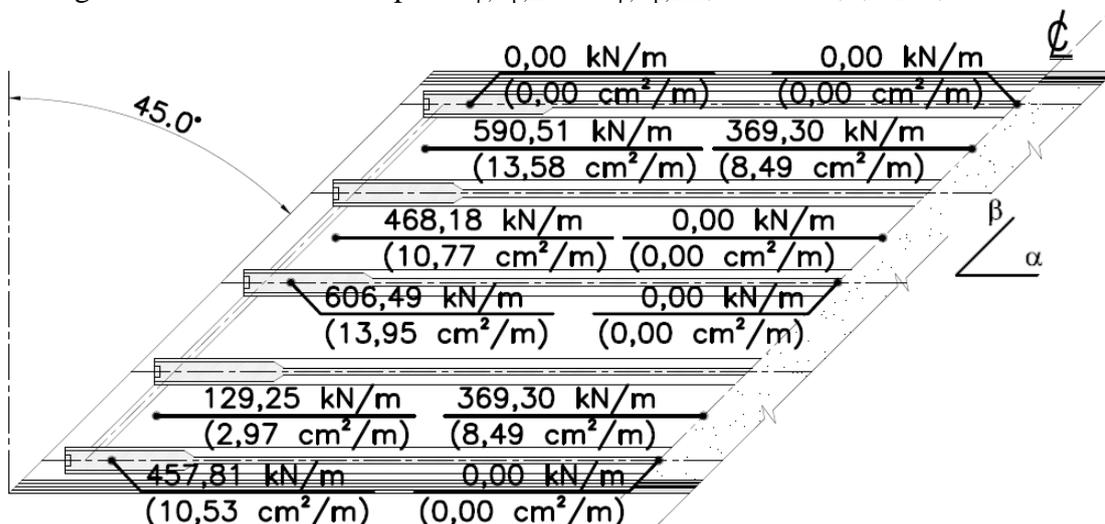


Figura 3.129 – Resultados para  $f_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,sup,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=45^\circ$

$f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$

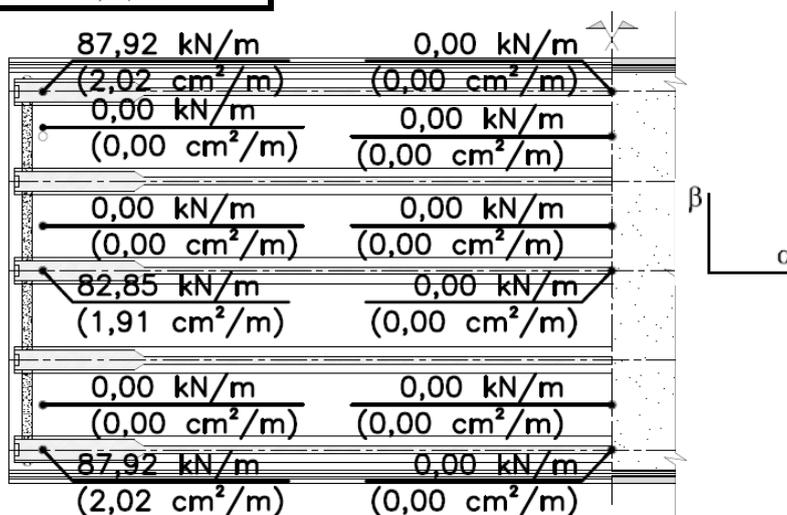


Figura 3.130 – Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=0^\circ$

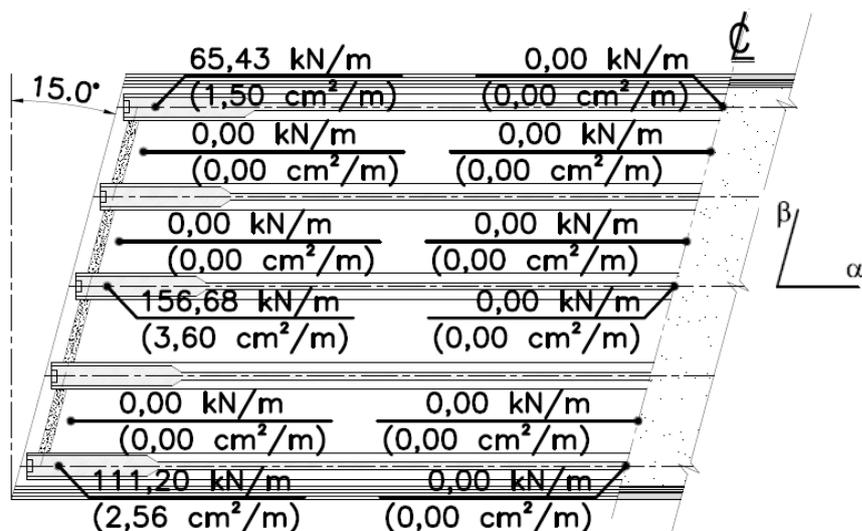


Figura 3.131 – Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=15^\circ$

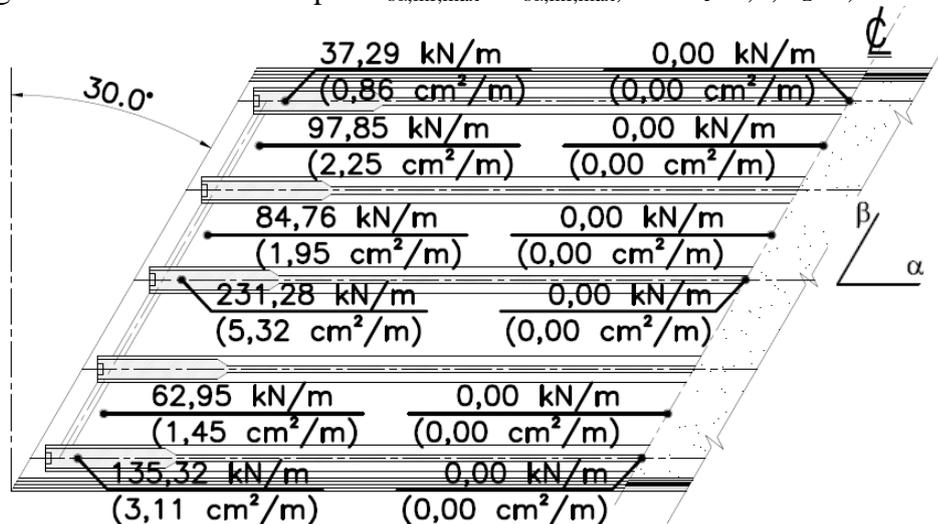


Figura 3.132 – Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=30^\circ$

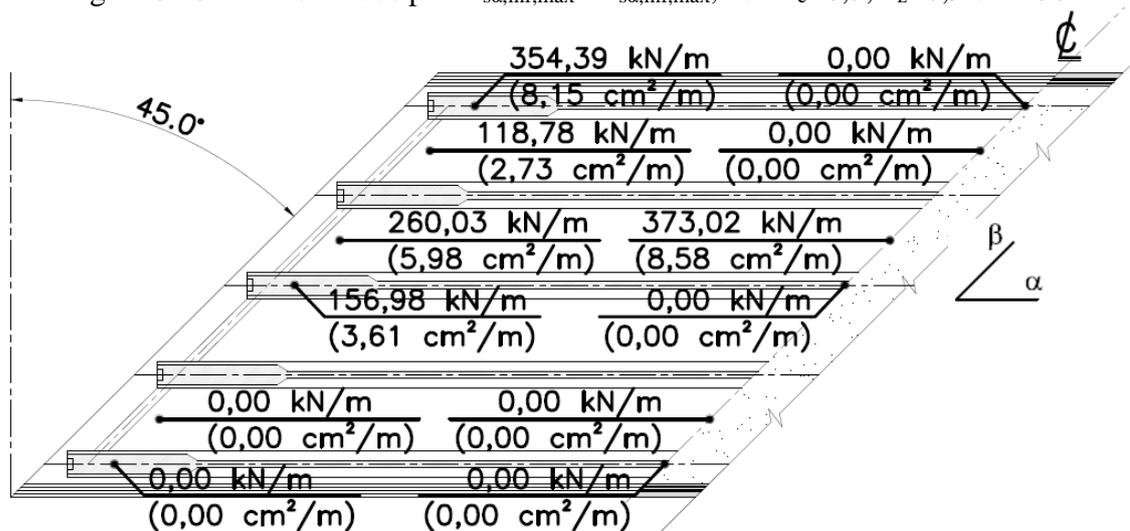


Figura 3.133 – Resultados para  $f_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\alpha,inf,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=45^\circ$

$f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$

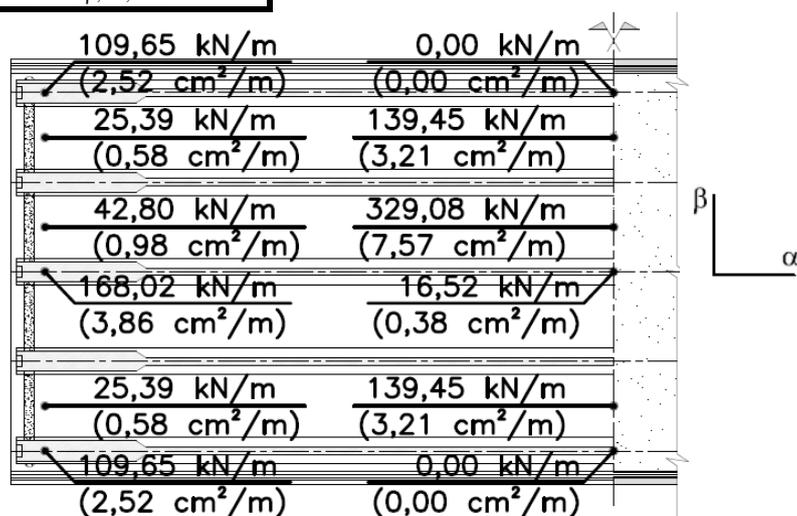


Figura 3.134 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=0^\circ$

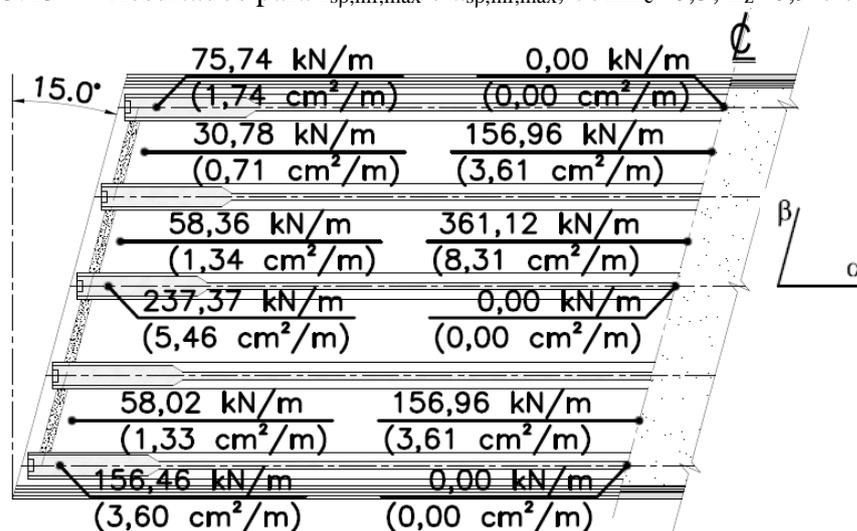


Figura 3.135 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=15^\circ$

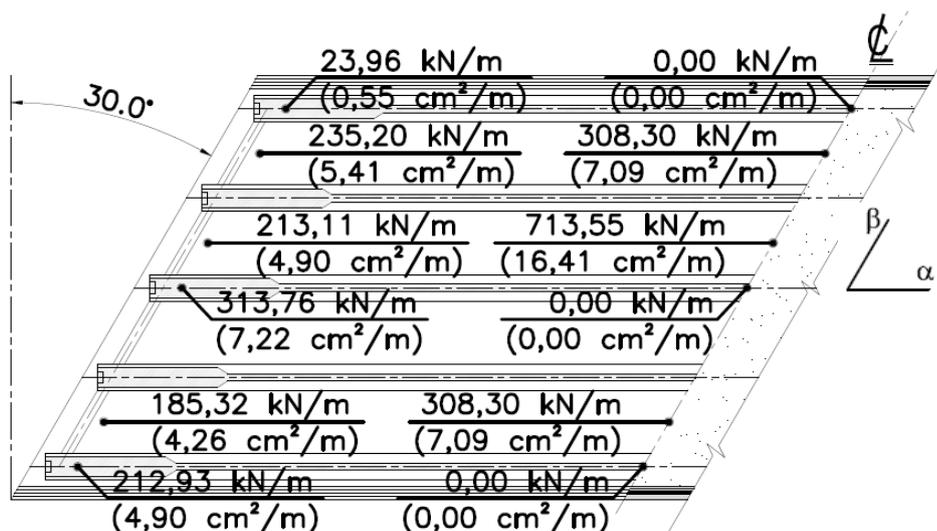


Figura 3.136 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=30^\circ$

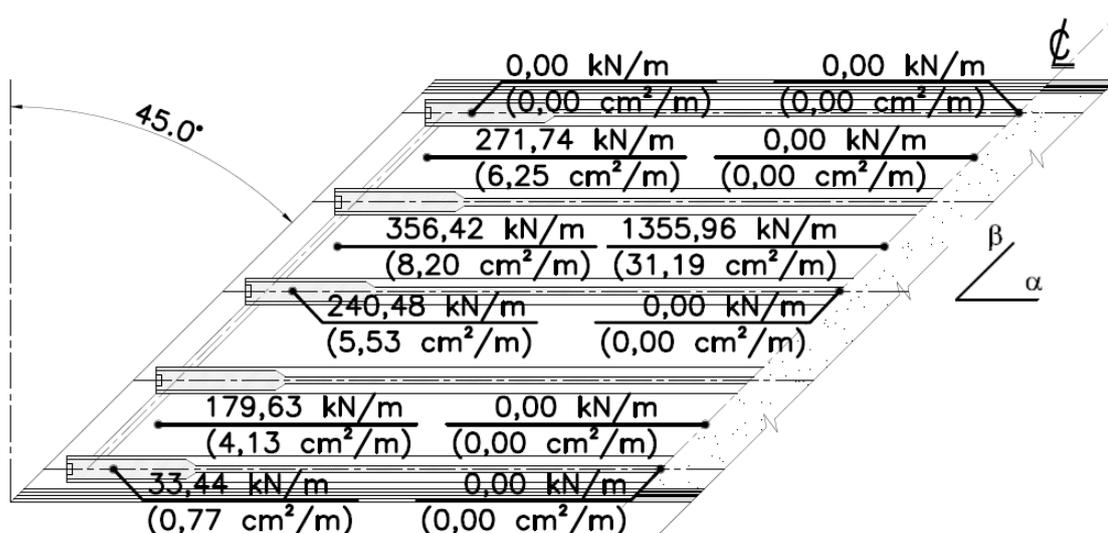


Figura 3.137 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=45^\circ$

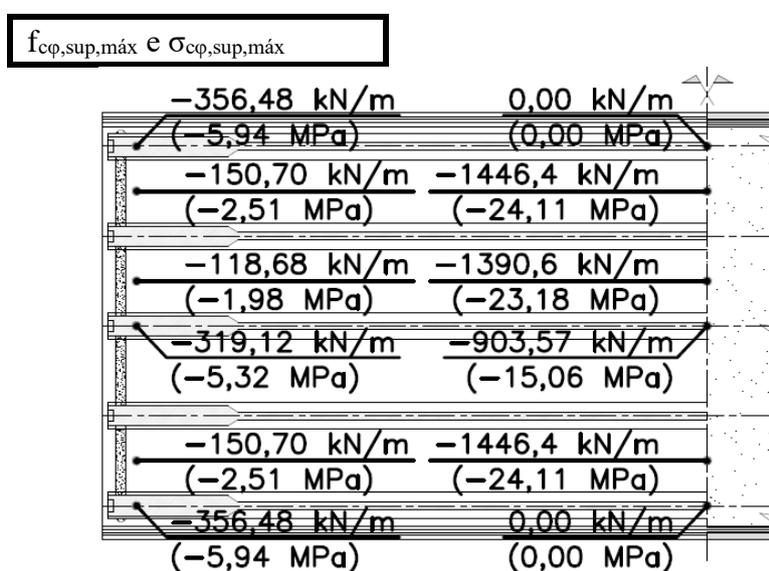


Figura 3.138 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=0^\circ$

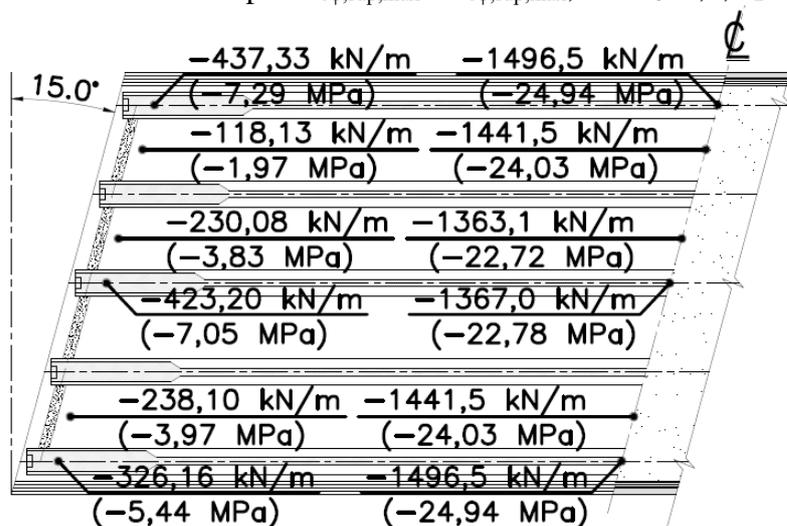


Figura 3.139 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ ,  $comk_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=15^\circ$

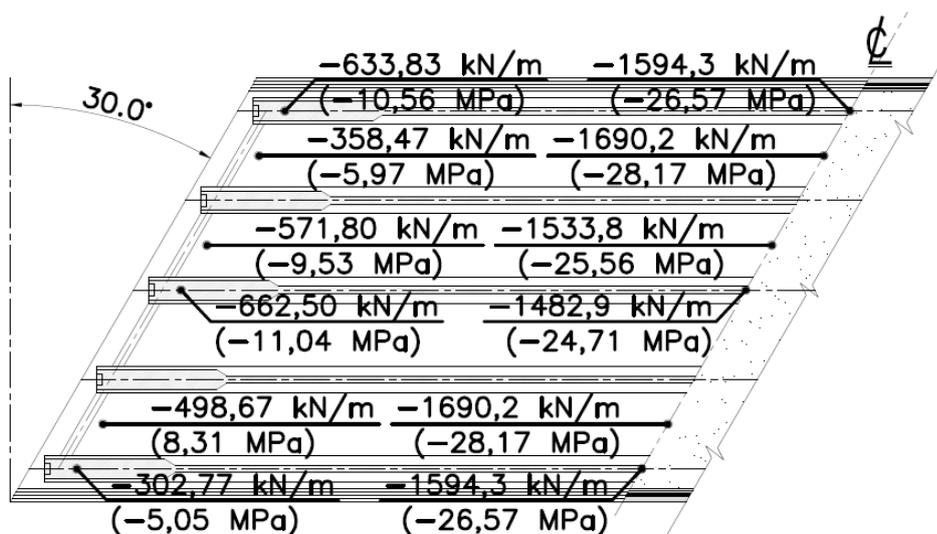


Figura 3.140 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=30^\circ$

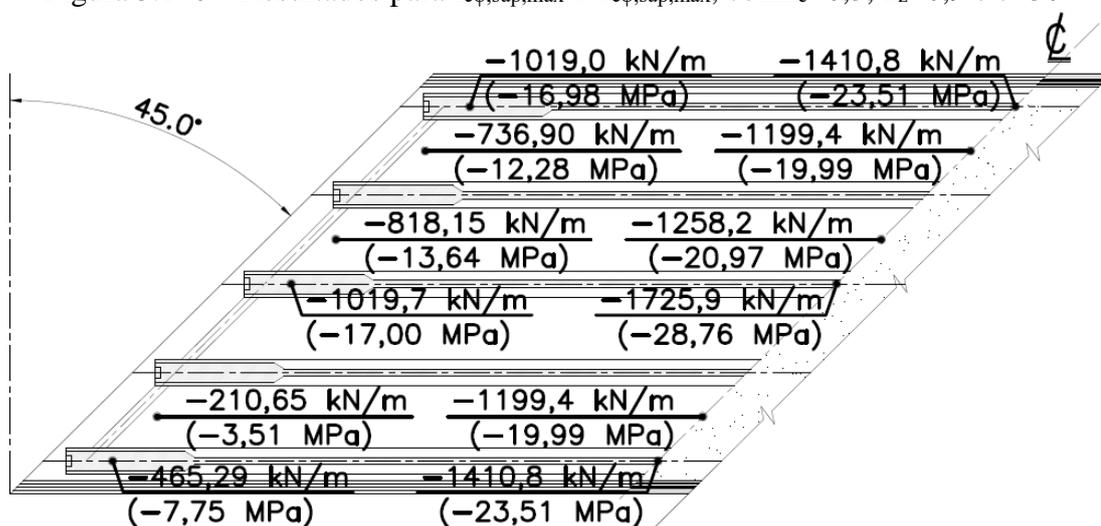


Figura 3.141 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=45^\circ$

$f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$

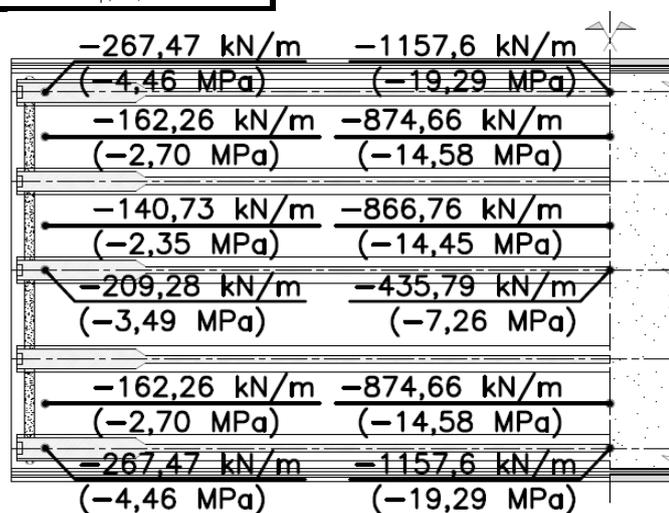


Figura 3.142 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=0^\circ$

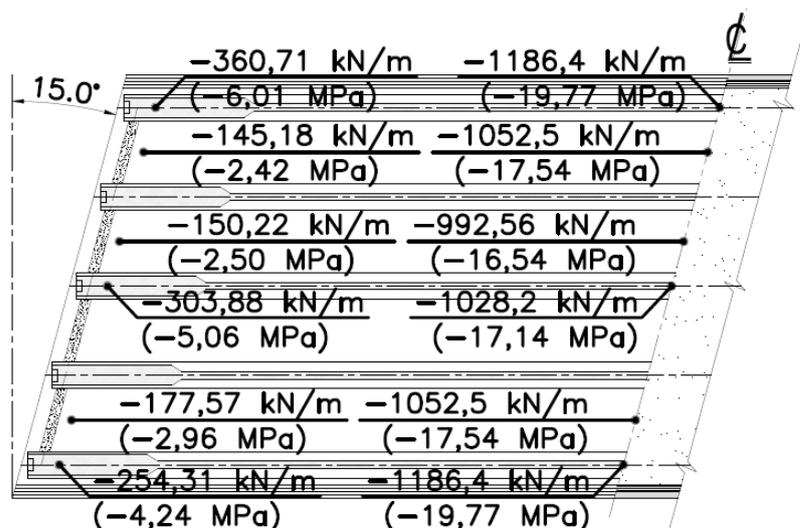


Figura 3.143 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=15^\circ$

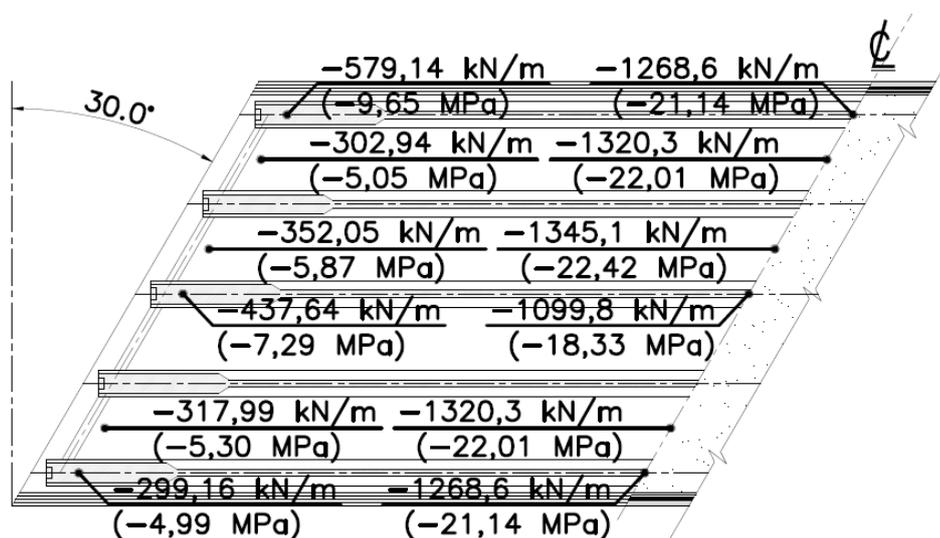


Figura 3.144 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=30^\circ$

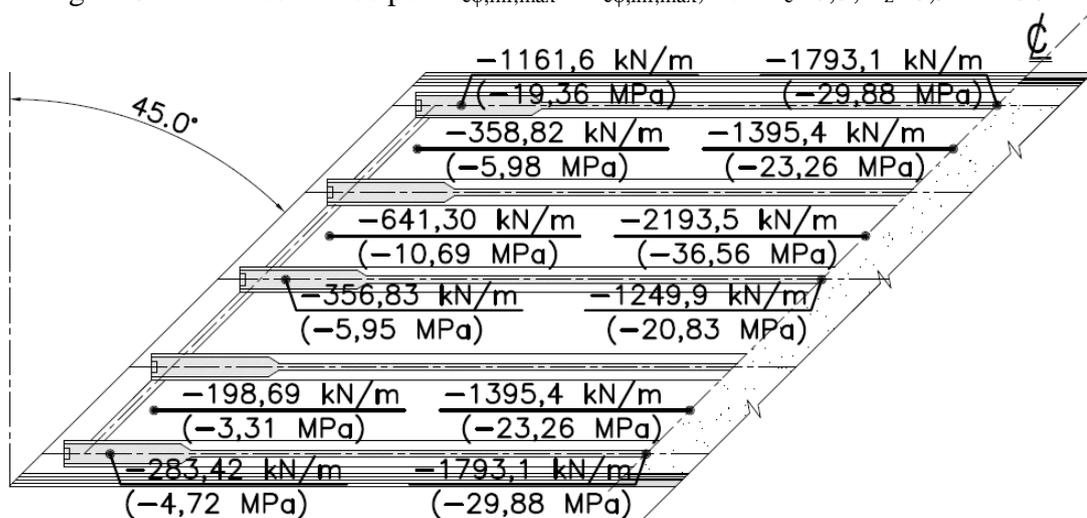


Figura 3.145 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , com  $k_c=0,3$ ,  $k_z=0,9$  e  $e=45^\circ$

Como os parâmetros pré-definidos  $k_z = 0,9$  e  $k_c = 0,3$ , tal como recomendados por LEONHARDT (1978), conduzem a tensões no concreto que superam os valores admissíveis, recalculam-se as armaduras com a utilização da alternativa indicada no CEB-FIP Model Code 1990, considerando-se maior espessura das chapas e braços de alavancas distintos para flexão e momento volvente.

### 3.5.4.2. Dimensionamento com $t_c = h/2$ e braços de alavancas diferentes

Devido à forte compressão longitudinal na laje, que funciona como mesa de compressão das vigas, as armaduras e as tensões no concreto são recalculadas utilizando-se maior espessura das chapas, dada por

$$t_c = \frac{h_{laje}}{2} = \frac{0,23}{2} = 0,115 \text{ m} \quad (3.50)$$

Os braços de alavanca correspondentes são calculados conforme recomendado pelo CEB-FIP Model Code 1990. Assim, o braço de alavanca para flexão  $z_{m,flex.}$  e o braço de alavanca para o momento volvente  $z_{m,volv.}$  são dados por

$$z_{m,flex.} = \frac{d_x + d_y}{2} - \frac{t_c}{2} = \frac{0,205 + 0,195}{2} - \frac{0,115}{2} = 0,1425 \text{ m} \quad (3.51)$$

$$z_{m,volv.} = h_{laje} - 2 \frac{t_c}{2} = 0,23 - 2 \frac{0,115}{2} = 0,115 \text{ m} \quad (3.52)$$

A Figura 3.146 mostra a espessura das chapas e os braços de alavanca adotados.

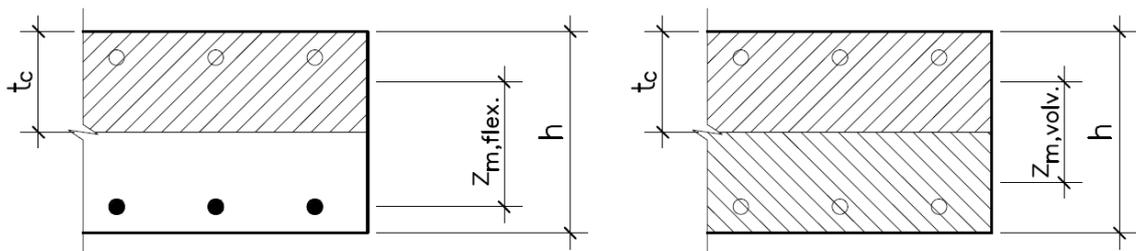


Figura 3.146 – Espessura das chapas e braços de alavanca considerados

Um diferente braço de alavanca poderia ter sido adotado na direção transversal, pois esta não está fortemente comprimida. No entanto, por simplicidade, optou-se pela padronização dos braços de alavanca nas duas direções.

As Figuras 3.147 a 3.170 apresentam os resultados do dimensionamento dos 12 pontos escolhidos para cada uma das 4 pontes estudadas.

O aumento da espessura das chapas reduziu significativamente a compressão no concreto. No entanto, a diminuição dos braços de alavanca resultou em maiores armaduras.

O acréscimo da armadura longitudinal superior foi da ordem de 10% para as pontes com ângulos de esconsidade  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , e de 15% para a ponte mais esconsa. A armadura transversal superior foi elevada em aproximadamente 10%, com exceção da ponte com ângulo de esconsidade de  $30^\circ$ , que teve um acréscimo de 20%. A armadura longitudinal inferior foi reduzida em 15%, exceto para a ponte mais esconsa, onde a área de aço dobrou. O acréscimo da armadura transversal inferior variou entre 30% e 45%.

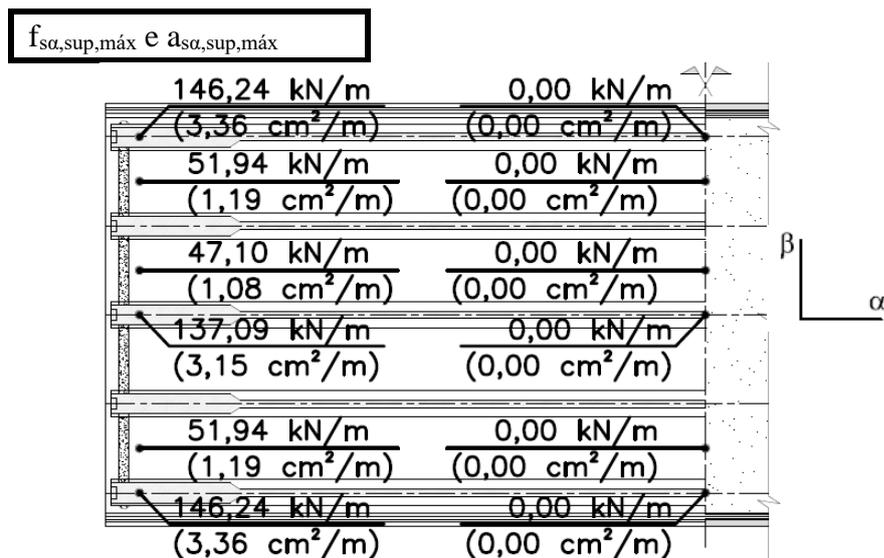


Figura 3.147 – Resultados para  $f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=0^\circ$

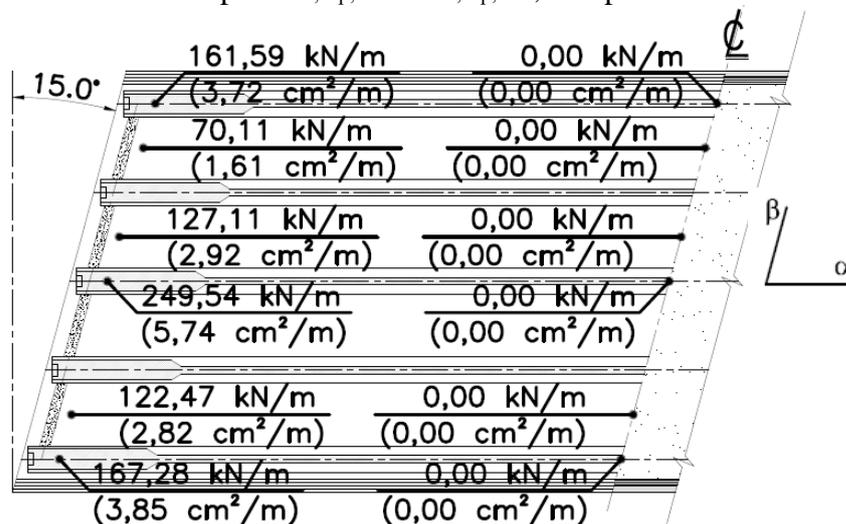


Figura 3.148 – Resultados para  $f_{sa,sup,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=15^\circ$

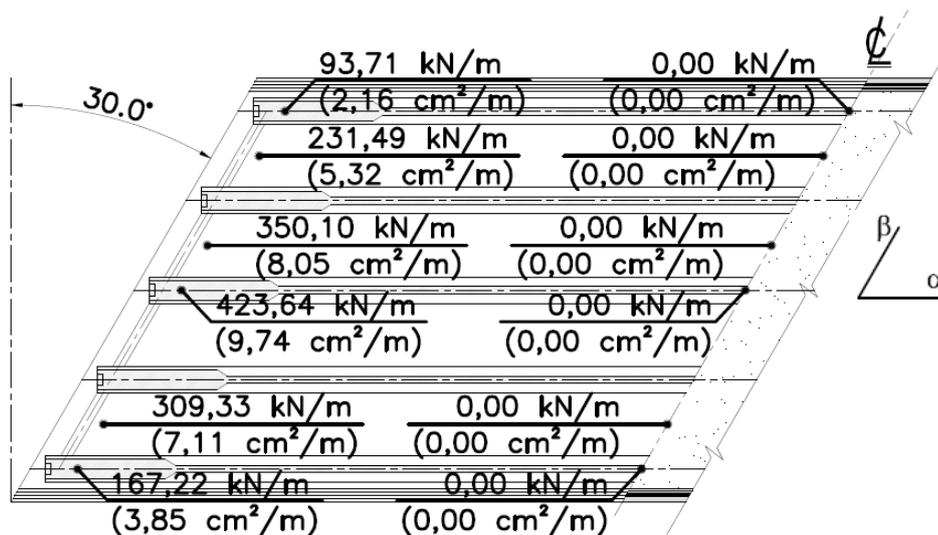


Figura 3.149 – Resultados para  $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=30^\circ$

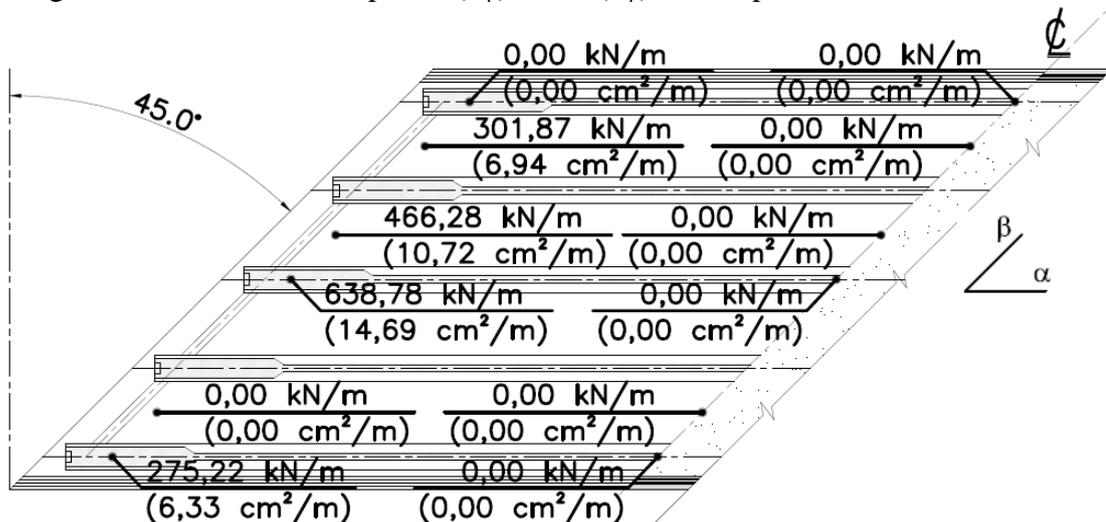


Figura 3.150 – Resultados para  $f_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=45^\circ$

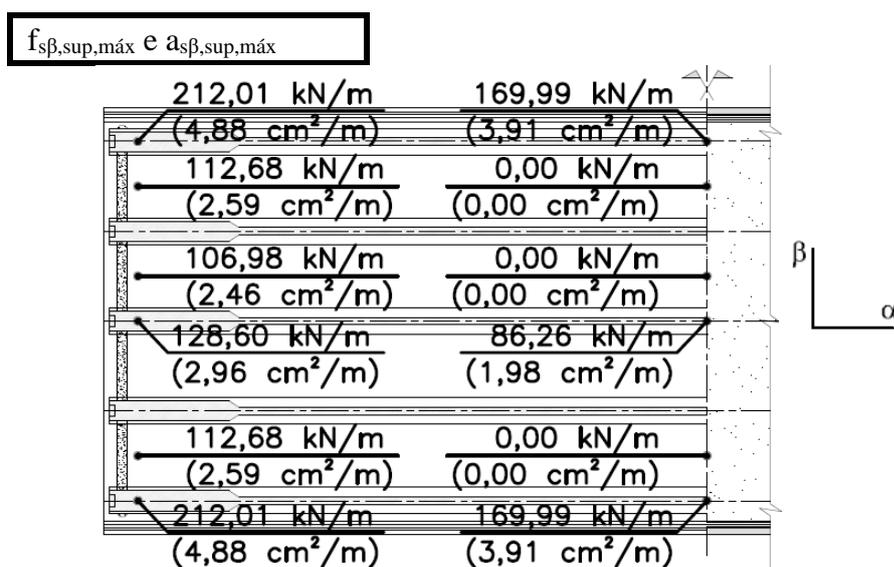


Figura 3.151 – Resultados para  $f_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$  e  $a_{s\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=0^\circ$

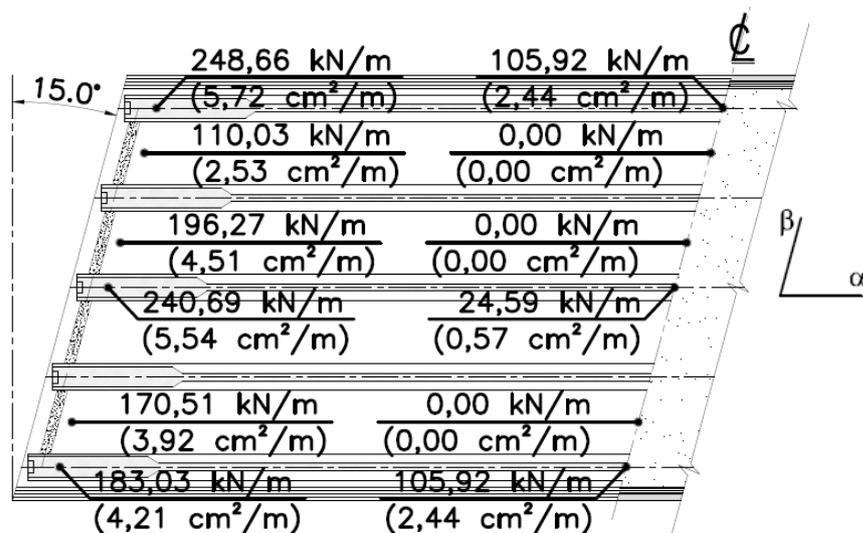


Figura 3.152 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=15^\circ$

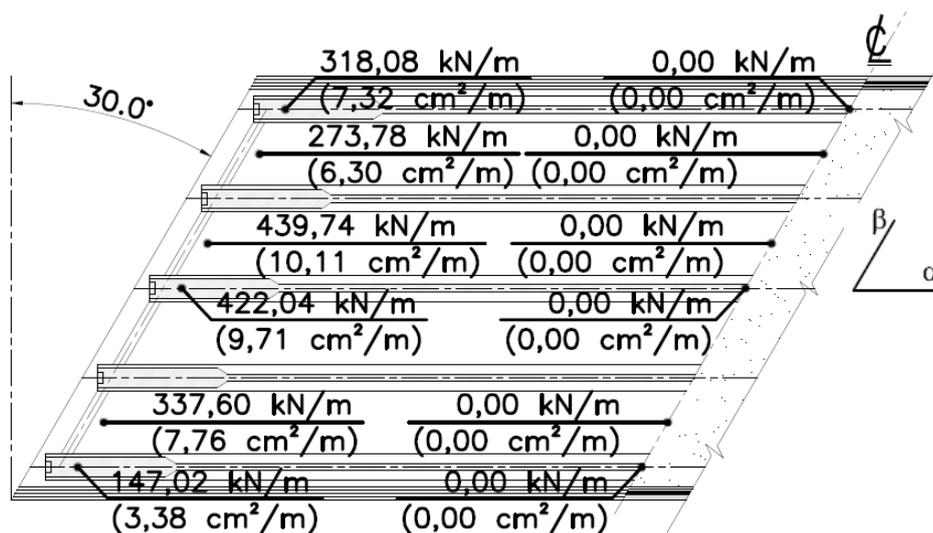


Figura 3.153 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=30^\circ$

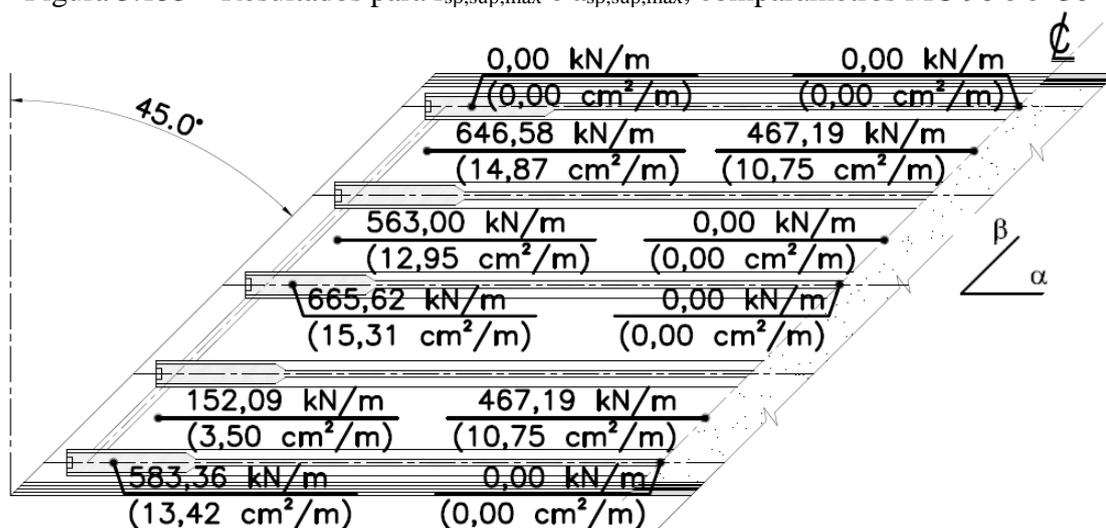


Figura 3.154 – Resultados para  $f_{s\beta, sup, máx}$  e  $a_{s\beta, sup, máx}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=45^\circ$

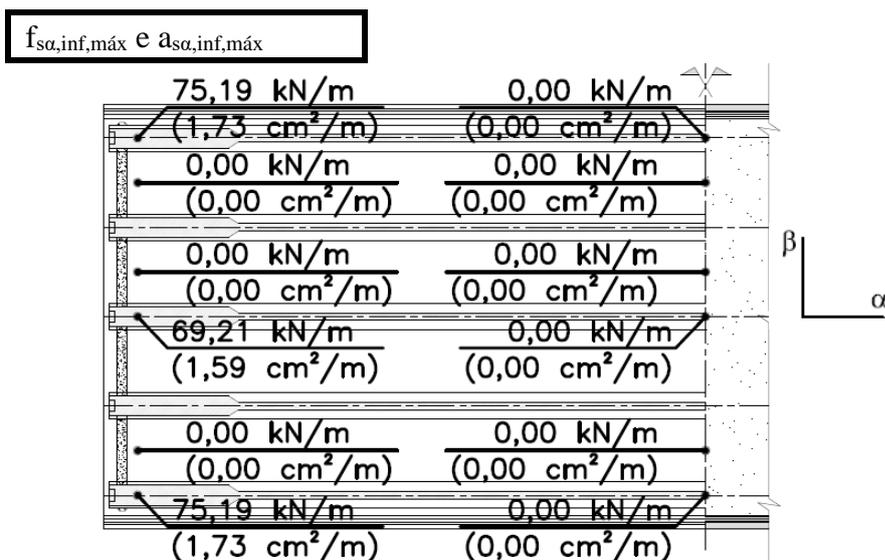


Figura 3.155 – Resultados para  $f_{sa,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=0^\circ$

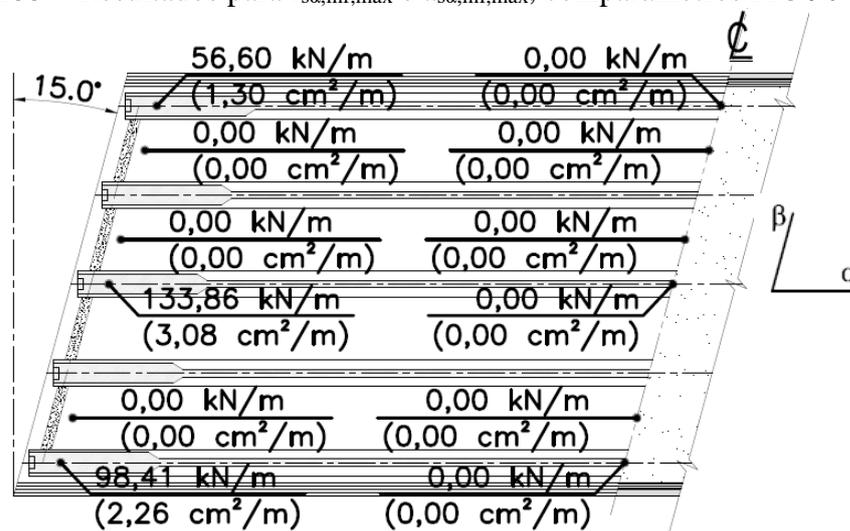


Figura 3.156 – Resultados para  $f_{sa,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=15^\circ$

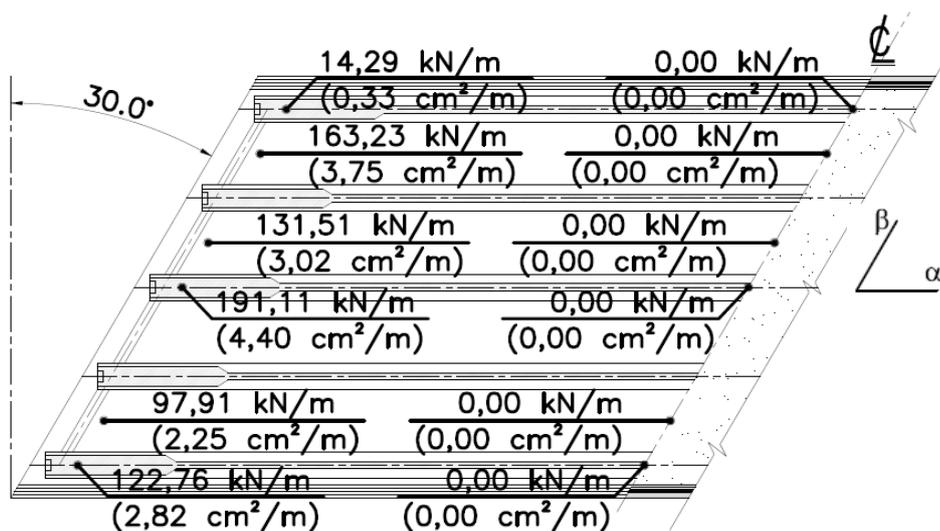


Figura 3.157 – Resultados para  $f_{sa,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{sa,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=30^\circ$

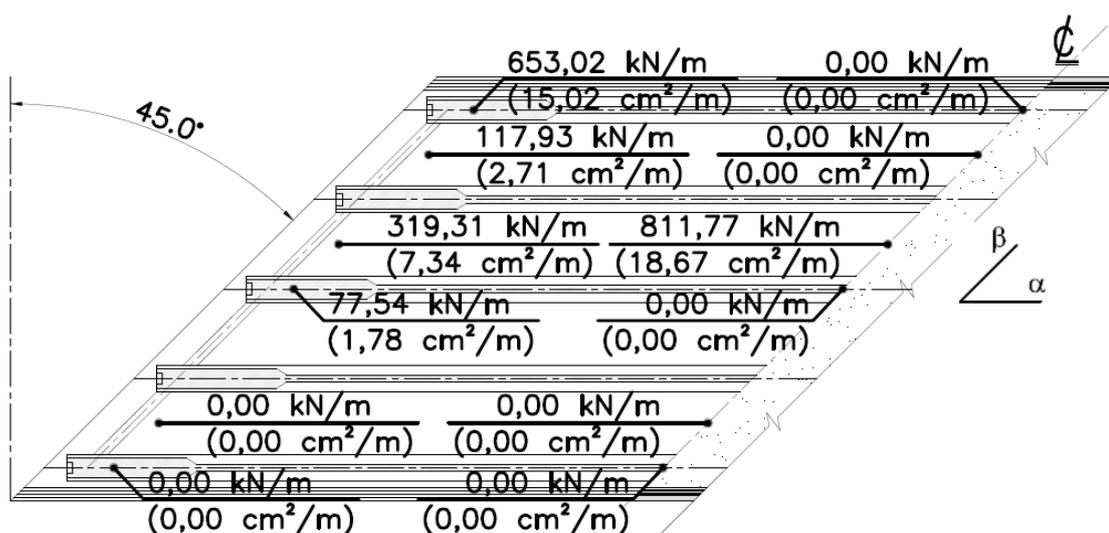


Figura 3.158 – Resultados para  $f_{sa,inf,máx}$  e  $a_{sa,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=45^\circ$

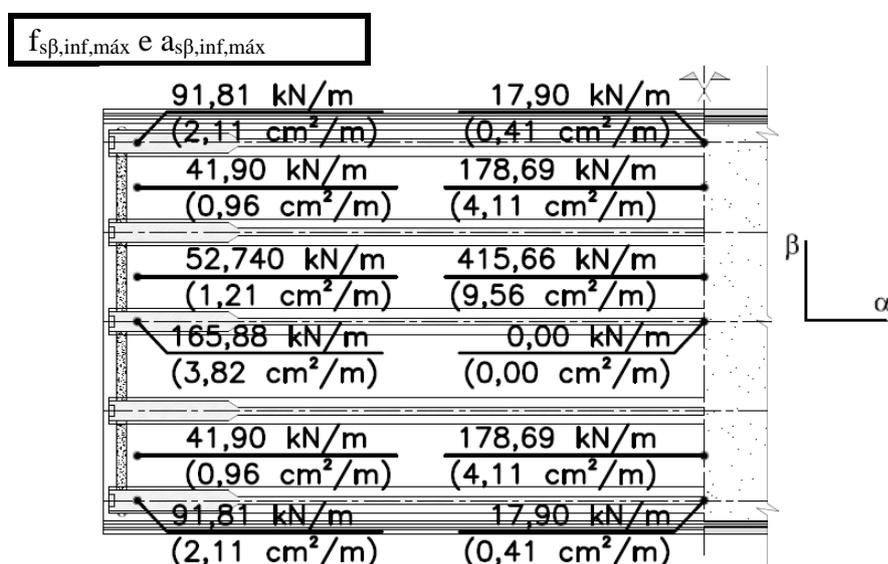


Figura 3.159 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,máx}$  e  $a_{s\beta,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=0^\circ$

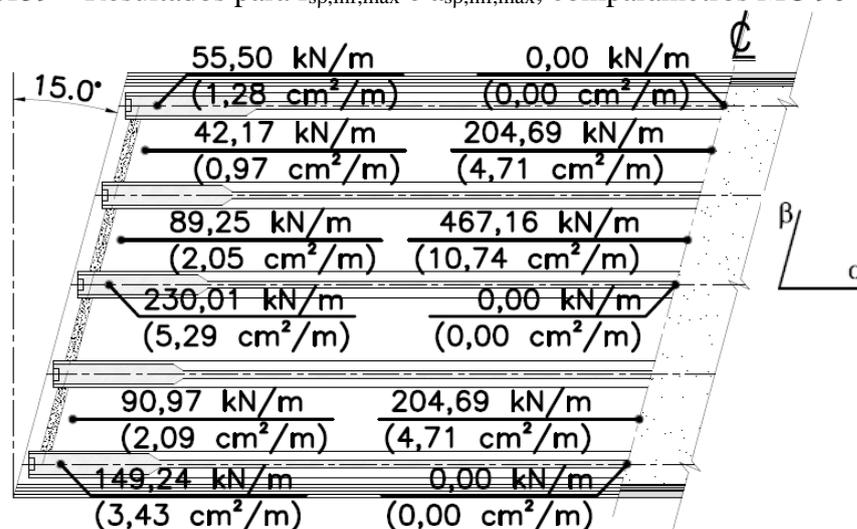


Figura 3.160 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,máx}$  e  $a_{s\beta,inf,máx}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=15^\circ$

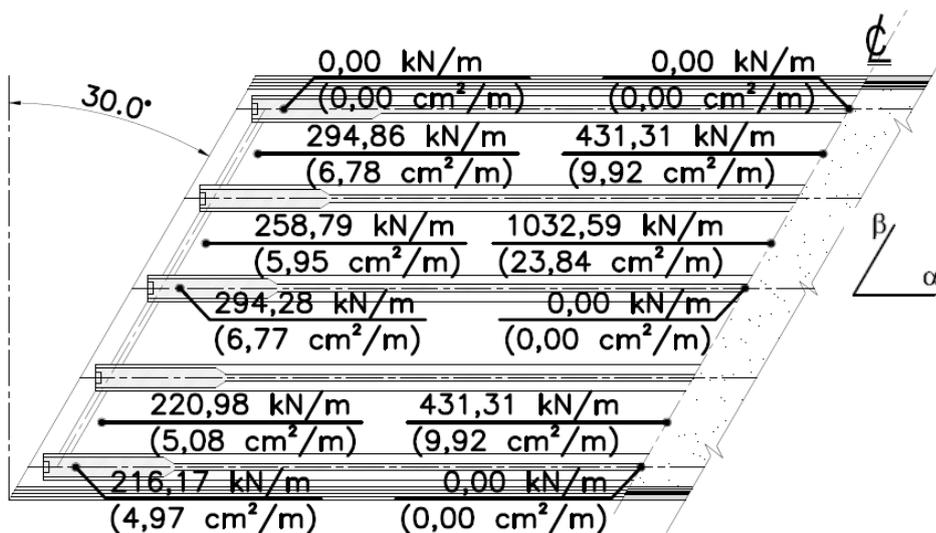


Figura 3.161 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=30^\circ$

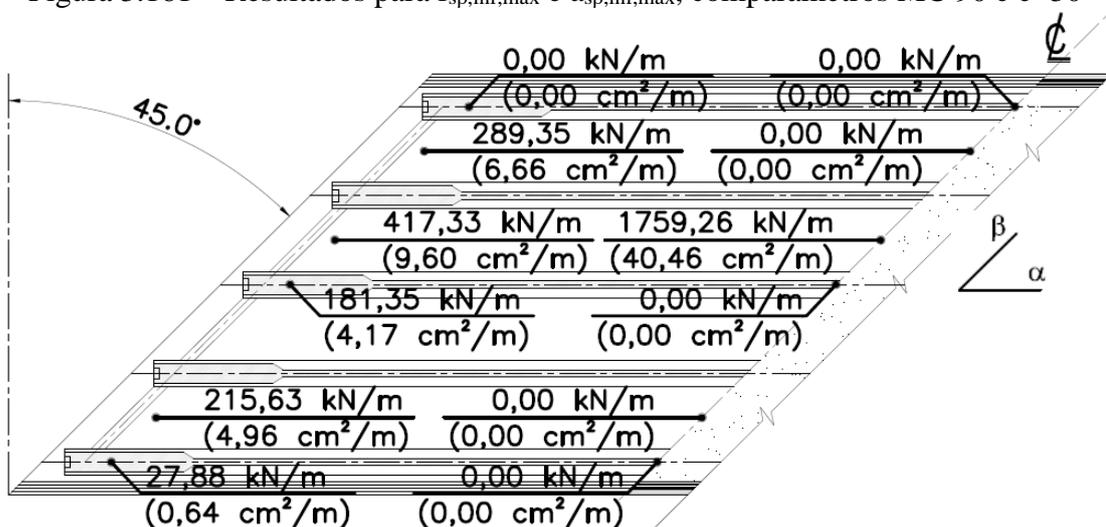


Figura 3.162 – Resultados para  $f_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$  e  $a_{s\beta,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=45^\circ$

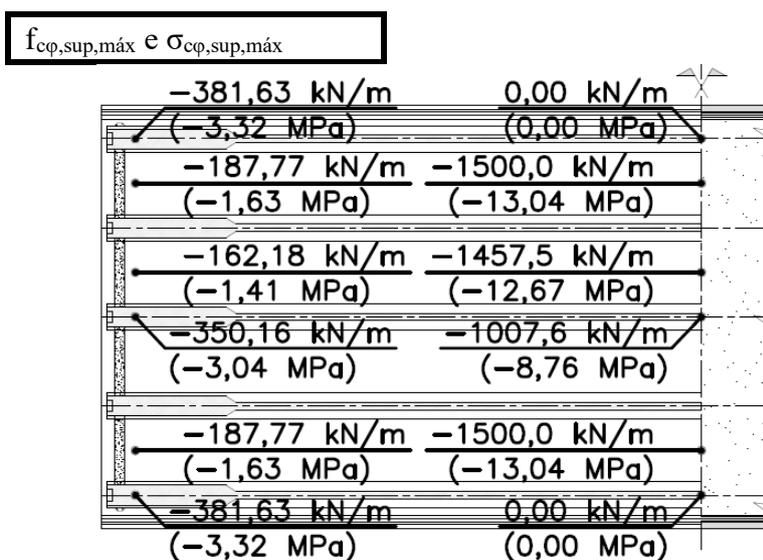


Figura 3.163– Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=0^\circ$

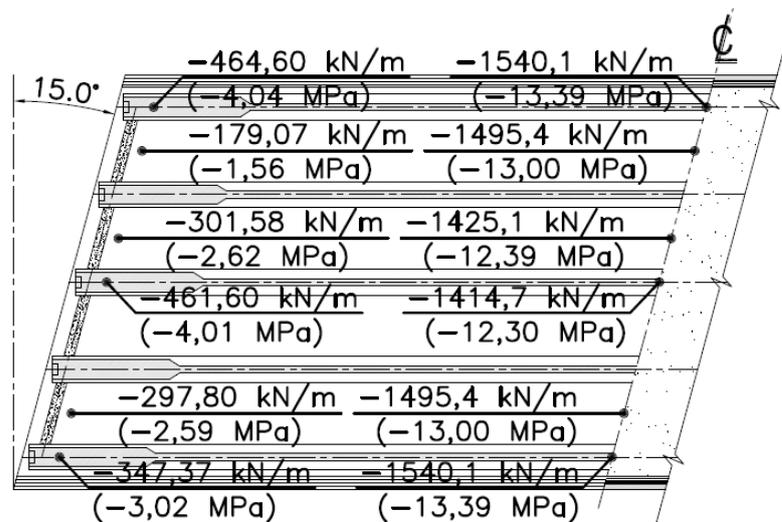


Figura 3.164 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=15^\circ$

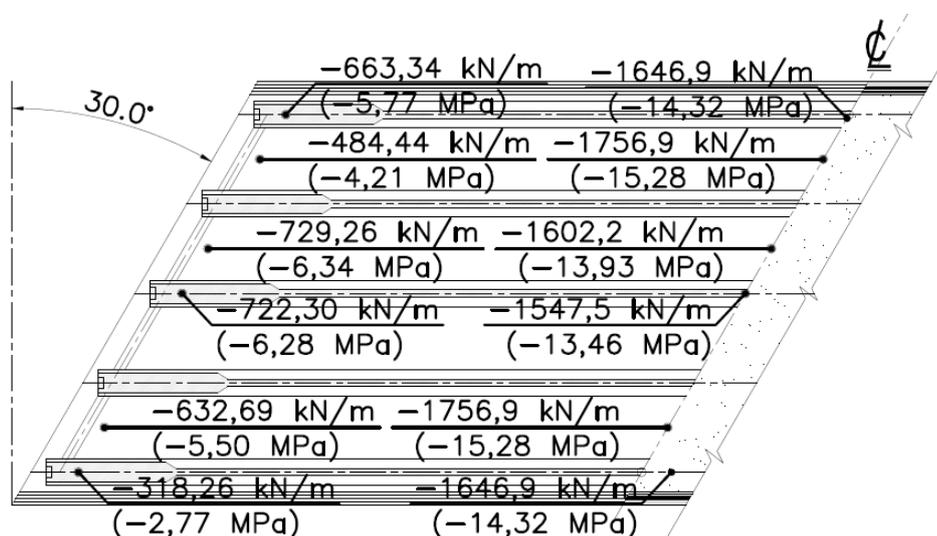


Figura 3.165 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=30^\circ$

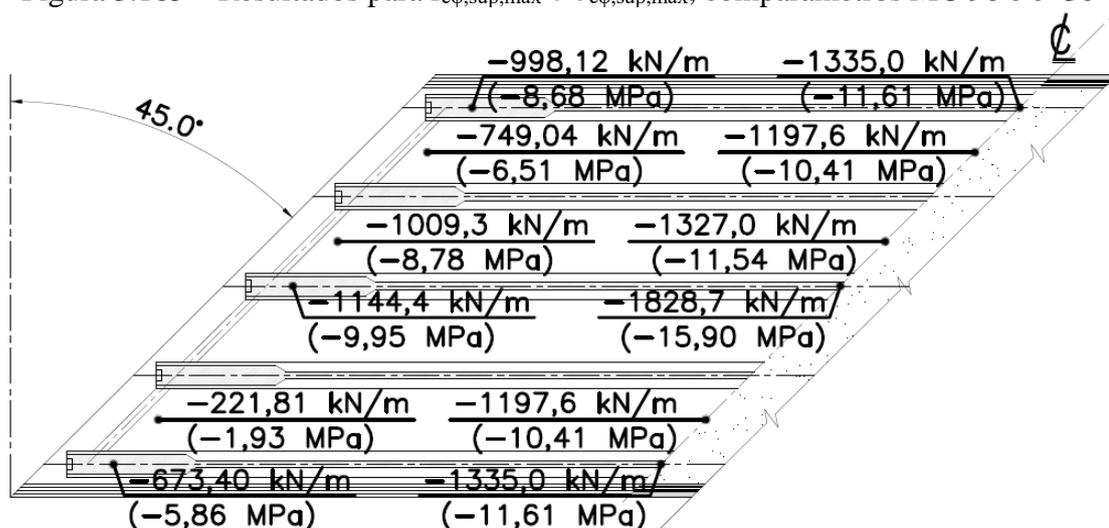


Figura 3.166 – Resultados para  $f_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,sup,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=45^\circ$

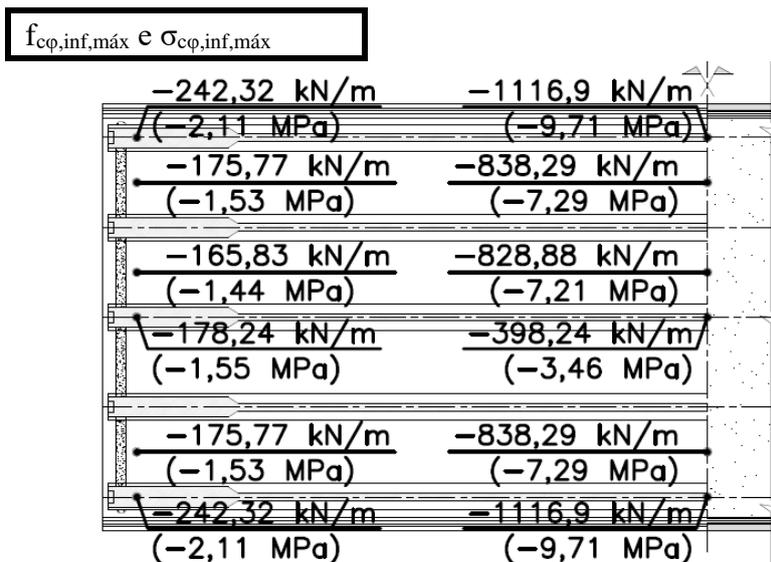


Figura 3.167 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=0^\circ$

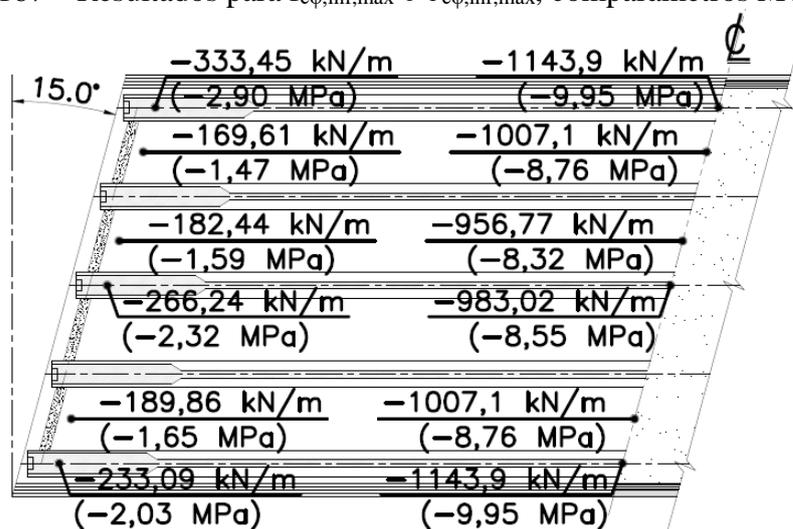


Figura 3.168 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=15^\circ$

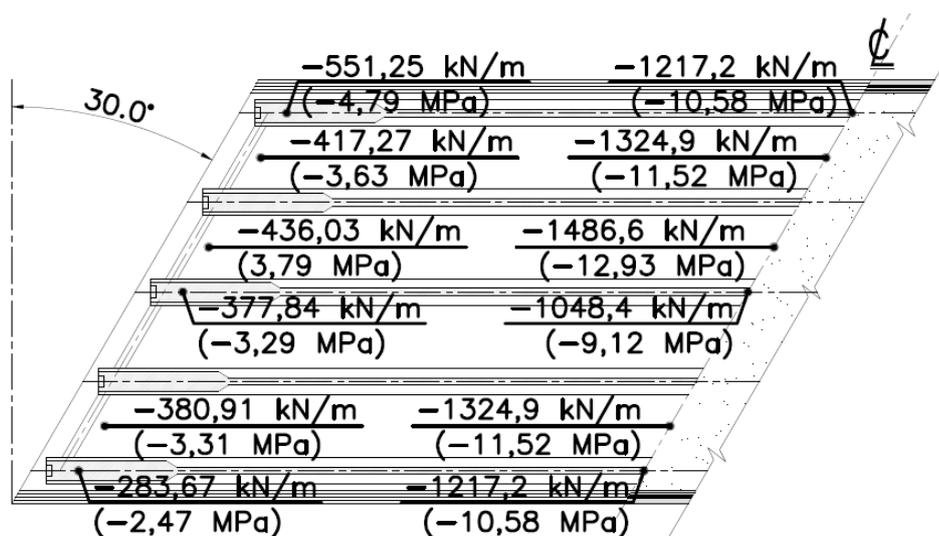


Figura 3.169 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=30^\circ$

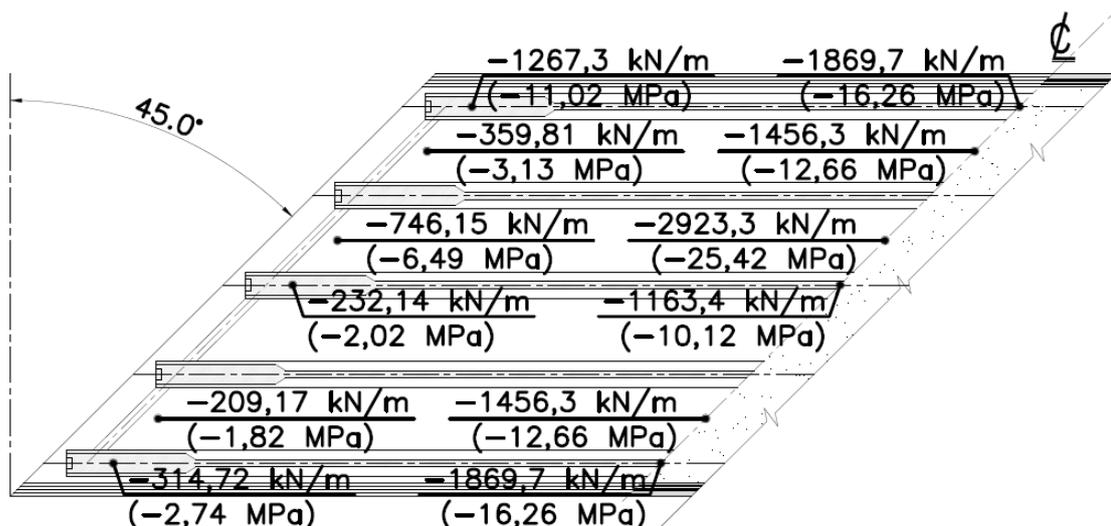


Figura 3.170 – Resultados para  $f_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{c\phi,inf,m\acute{a}x}$ , comparâmetros MC 90 e  $e=45^\circ$

Os seguintes aspectos são observados sobre as armaduras e tensões no concreto:

- $a_{s,\alpha,sup}$  – armadura longitudinal superior
  - as armaduras máximas são obtidas sobre as vigas centrais, próximo ao apoio, exceto na ponte ortogonal, na qual a armadura máxima é obtida sobre as vigas extremas, também próximo ao apoio;
  - na região do meio do vão, essas armaduras não são necessárias, independentemente da esconsidade;
  - as armaduras são diminutas, nas pontes com ângulo de esconsidade  $0^\circ$  e  $15^\circ$ , e assumem maiores valores nas pontes com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ ;
  - em geral, a armadura aumenta com a elevação da esconsidade.
- $a_{s,\beta,sup}$  – armadura transversal superior
  - as armaduras máximas são obtidas sobre as vigas extremas, nas pontes com ângulo de esconsidade  $0^\circ$  e  $15^\circ$ , e sobre as vigas centrais, naquelas com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ ;
  - na região do meio do vão, essas armaduras diminuem, com a elevação da esconsidade, porém, na ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , são necessárias armaduras elevadas entre as vigas extremas;
  - na região próxima ao apoio, essas armaduras aumentam com a elevação da esconsidade.
- $a_{s,\alpha,inf}$  – armadura longitudinal inferior

- as armaduras máximas são obtidas sobre as vigas, na região próxima ao apoio, exceto na ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , que apresenta a maior armadura, entre as vigas centrais, na região do meio do vão;
- na região do meio do vão, essas armaduras não são necessárias, exceto na ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , em que são necessárias armaduras bastante elevadas nos panos entre as vigas centrais;
- na região próxima ao apoio, as armaduras necessárias aumentam, com a elevação do ângulo de esconsidade, porém só assumem valores elevados na ponte mais esconsa.
- $a_{s,\beta,\text{inf}}$  – armadura transversal inferior
  - as armaduras máximas são obtidas entre as vigas centrais, na região do meio do vão;
  - no geral, as armaduras aumentam, com a elevação do ângulo de esconsidade, com exceção dos pontos sobre as vigas extremas, no canto de ângulo obtuso e no meio do vão;
  - no ponto 5 (meio do vão, sobre a viga central) não são necessárias armaduras, independentemente da esconsidade.
- $f_{c,\varphi,\text{sup}}$  – tensões no concreto da chapa superior
  - as maiores tensões, em módulo, são obtidas na região do meio do vão;
  - de modo geral, o aumento do ângulo de esconsidade resulta em maior compressão no concreto.
- $f_{c,\varphi,\text{inf}}$  – tensões no concreto da chapa inferior
  - as maiores tensões, em módulo, são obtidas na região do meio do vão;
  - as tensões nas chapas inferiores são, em geral, menores em módulo do que as tensões nas chapas superiores, com exceção da ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , que apresenta maiores tensões de compressão nas chapas inferiores;
  - em geral, o aumento do ângulo de esconsidade resulta em maior compressão no concreto.

A análise de pontos isolados não é simples. As longarinas e transversinas de apoio provocam variações bruscas nas solicitações, dificultando a interpretação direta dos resultados.

Mesmo considerando-se chapas mais espessas e, conseqüentemente, braços de alavanca menores, nas pontes com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$  a tensão admissível no

concreto foi superada em 2% e 70%, respectivamente. Para atender à condição de compressão excessiva na laje de maior esconsidade, sem alterar a sua altura, seria necessária a utilização de um concreto C60, bastante incomum em obras desse tipo.

Desprezando-se o aumento das solicitações devido ao peso próprio, a utilização de uma laje com 30cm de espessura resultaria em tensões no concreto abaixo da admissível sem a necessidade da adoção de um concreto de maior resistência. Uma laje mais espessa também reduziria as armaduras necessárias, que, para as pontes com ângulos de esconsidade 30° e 45°, foram bastante elevadas.

O acréscimo das armaduras superiores, nas extremidades das longarinas, está associado às tensões de cisalhamento, conforme a regra da costura.

Da Figura 3.171 à Figura 3.176, são apresentados os diagramas de  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$  e  $V_{máx}$ , respectivamente, devido às cargas permanentes para as pontes em vigas múltiplas sem esconsidade e com ângulo de esconsidade de 30°.

Observa-se que, com exceção da força por unidade de comprimento na direção  $y$   $F_y$  e do momento volvente  $M_{xy}$ , as demais solicitações pouco se alteram entre a ponte sem esconsidade e aquela com ângulo de esconsidade 30°.

A forte compressão das chapas na região do meio do vão deve-se, principalmente, à elevada força longitudinal  $F_x$  na laje, que funciona como mesa de compressão das longarinas.

O aumento das armaduras calculadas com a elevação do ângulo de esconsidade das pontes deve-se, sobretudo, à não ortogonalidade das armaduras. O dimensionamento dos 12 pontos estudados para as solicitações obtidas nos modelos esconsos, porém, considerando armaduras ortogonais, obteve áreas de aço semelhantes para todas as esconsidades estudadas. Ressalta-se, no entanto, que a economia no peso de aço, é contrabalançada com maior trabalho no detalhamento, corte e dobra das armaduras, onerando a construção.

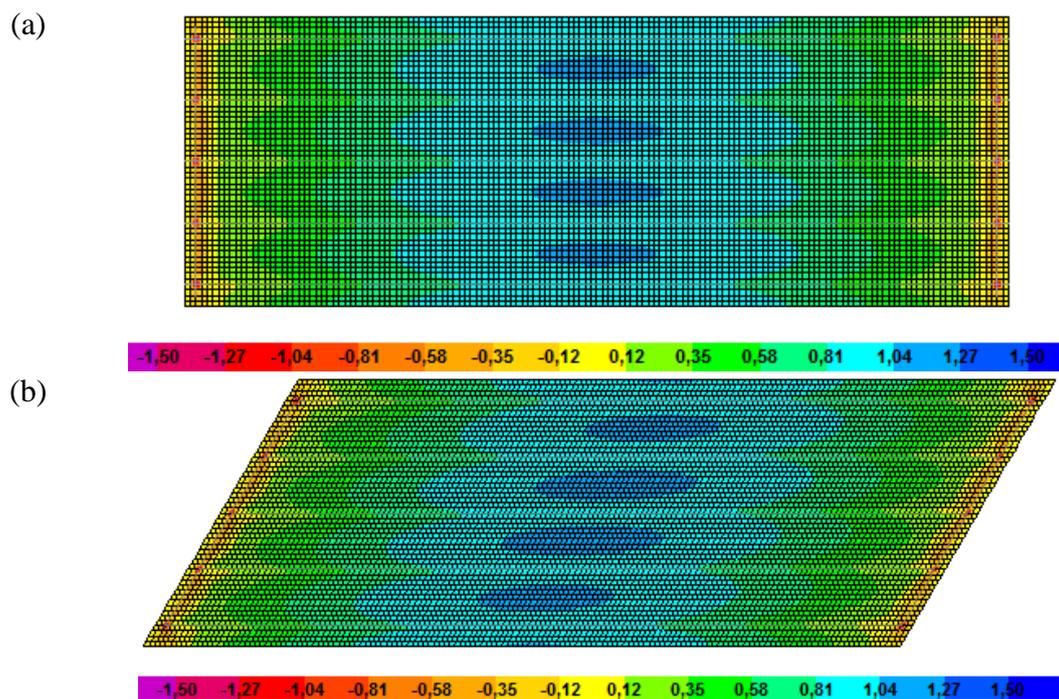


Figura 3.171 – Diagramas de  $M_x$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

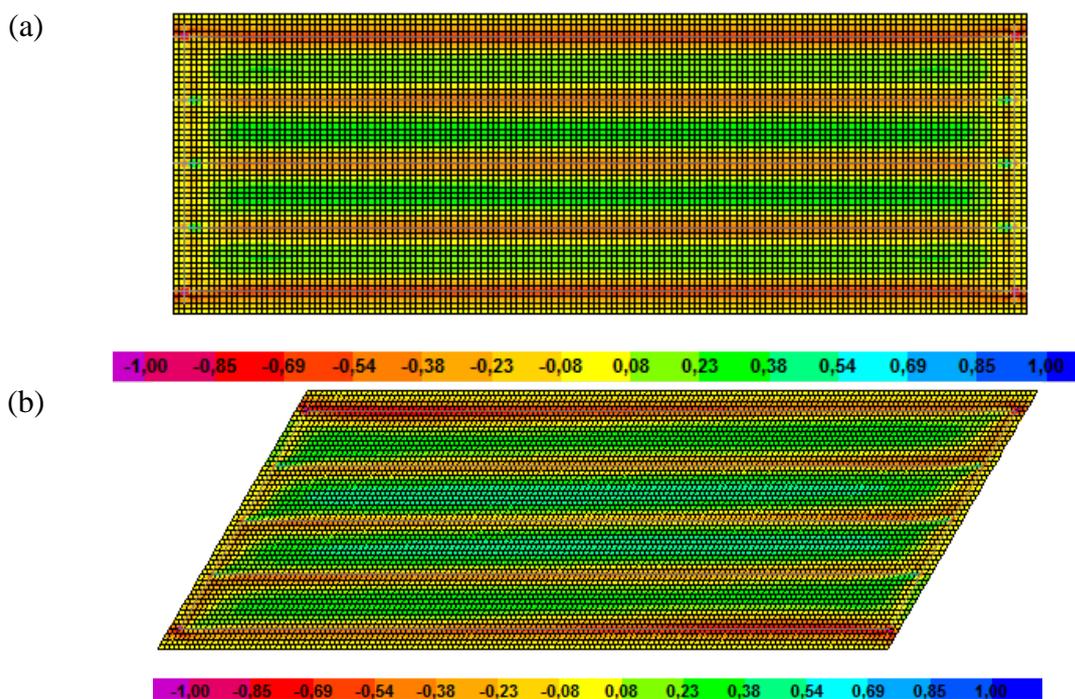


Figura 3.172 – Diagramas de  $M_y$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

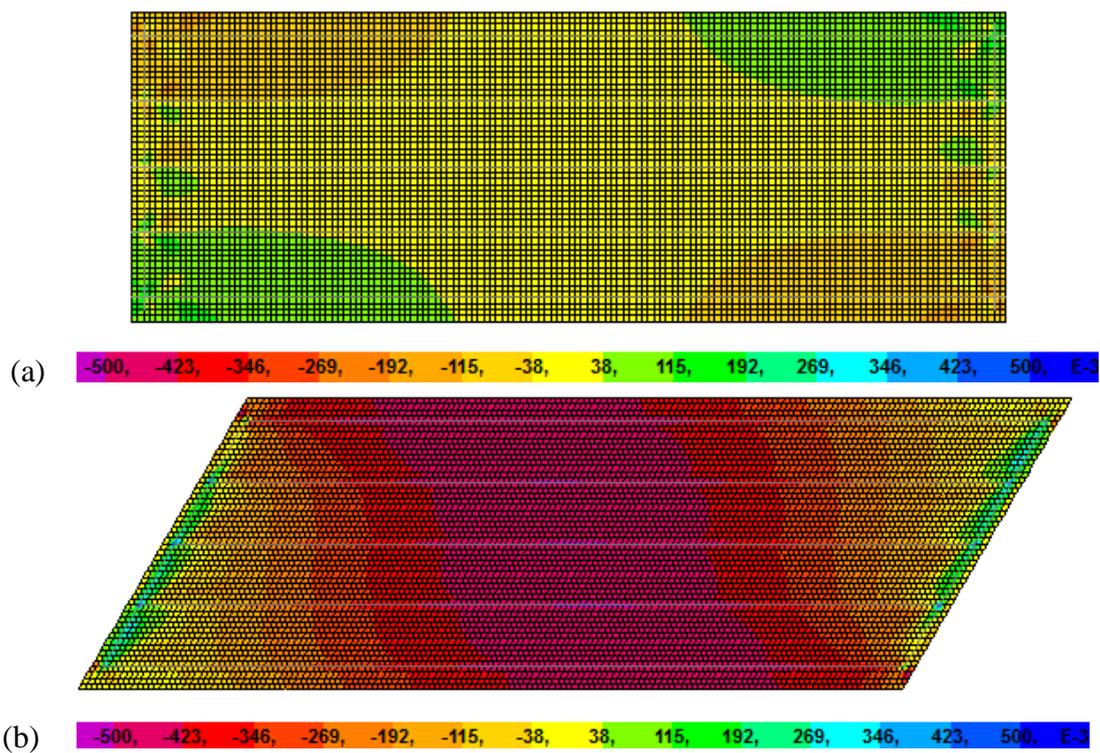


Figura 3.173 – Diagramas de  $M_{xy}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

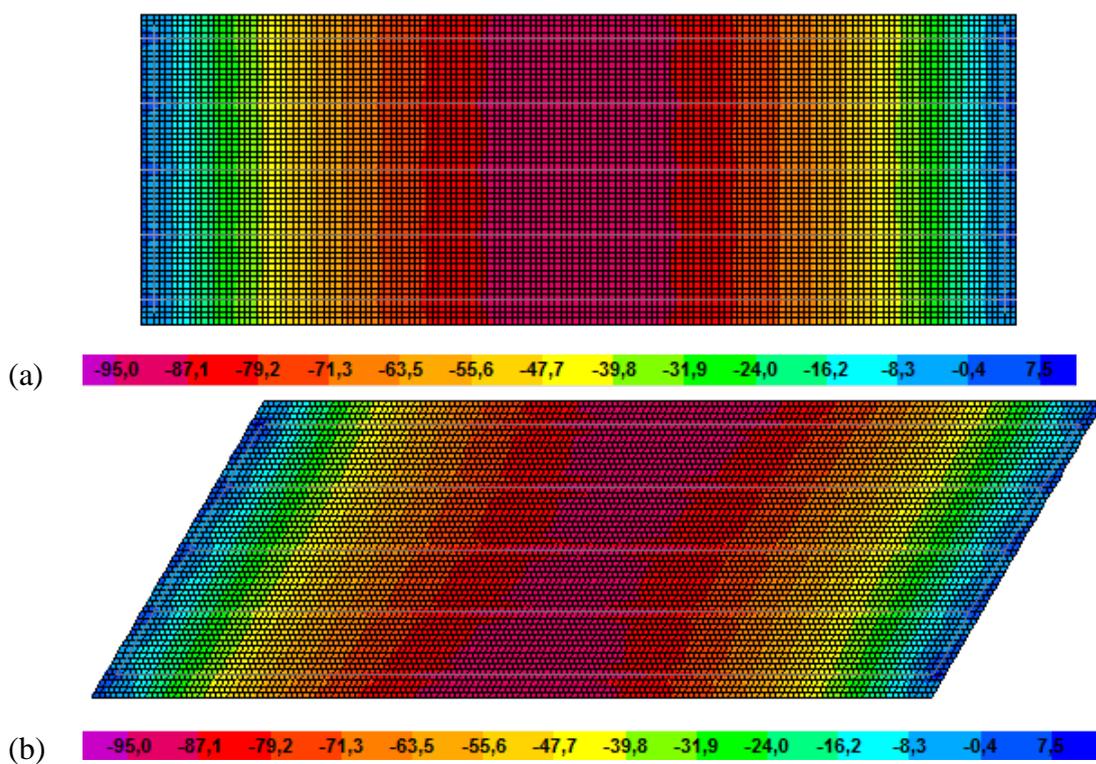


Figura 3.174 – Diagramas de  $F_x$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

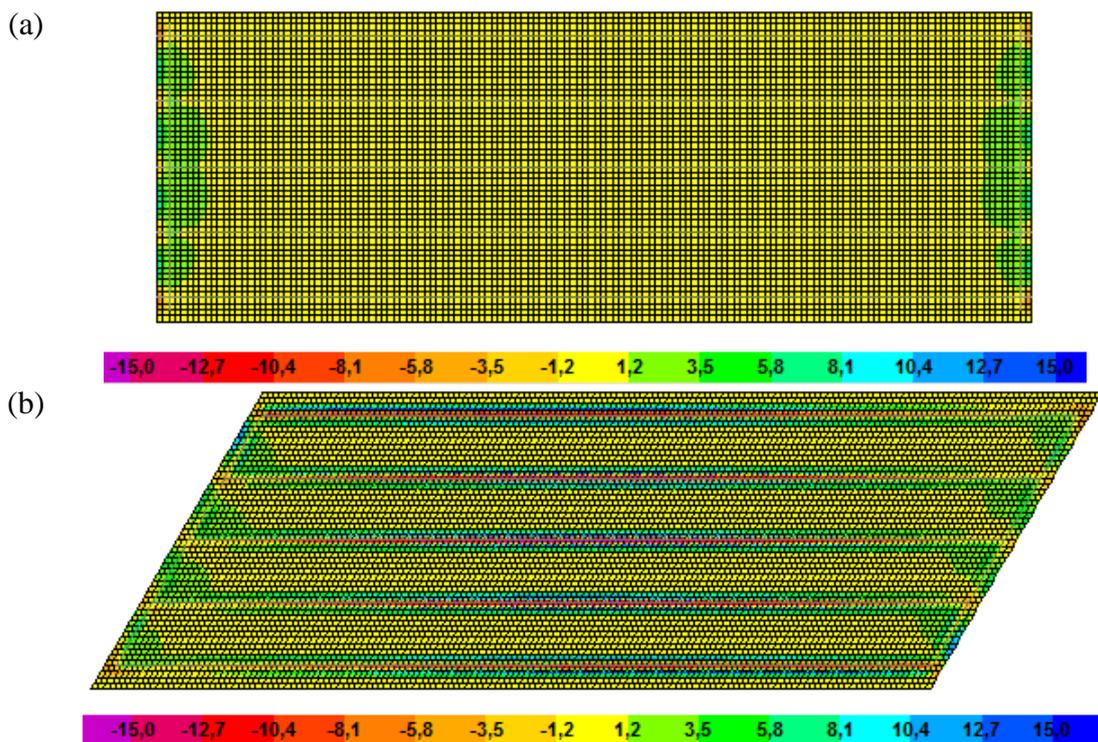


Figura 3.175 – Diagramas de  $F_y$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

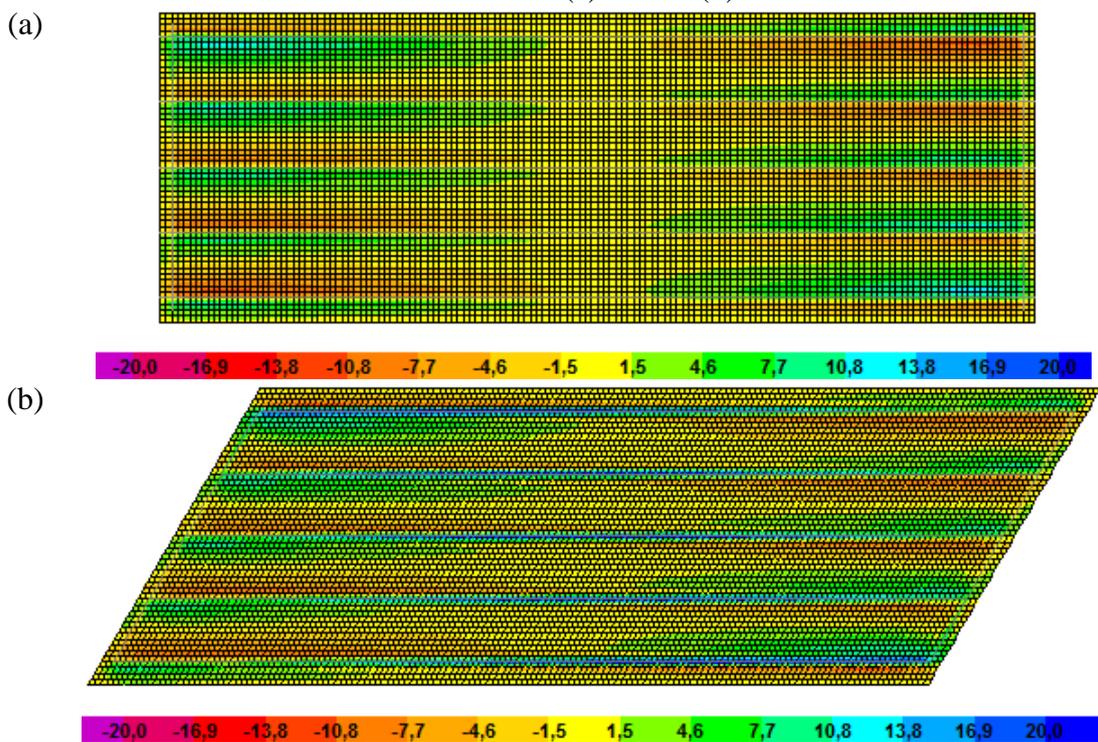


Figura 3.176 – Diagramas de  $F_{xy}$  devido às cargas permanentes nas pontes com ângulo de esconsidade (a)  $e=0^\circ$  e (b)  $e=30^\circ$

### 3.5.5. Peso total de aço e taxas de armadura

#### 3.5.5.1. Critérios adotados

As lajes de pontes em vigas múltiplas costumam ser detalhadas, com a distribuição uniforme das armaduras, sem variação de bitolas e espaçamentos. Armaduras de reforço são utilizadas, quando os balanços laterais são muito grandes ou quando são utilizadas transversinas, no vão, ligadas à laje.

Para o cálculo do peso total de aço, foi considerado o detalhamento uniforme das armaduras, a partir das máximas armaduras superiores e inferiores, calculadas para as direções  $\alpha$  e  $\beta$ , nos 12 pontos estudados.

Apesar desse tipo de solução ser usualmente executada, utilizando-se pré-lajes com a armadura positiva incorporada, o cálculo do peso da armadura inferior foi feito, considerando-se a laje escorada e moldada totalmente no local.

As bitolas e espaçamentos foram definidos, adotando-se a menor armadura, superior à calculada, obtida por barras com diâmetros de 8 mm, 10mm, 12,5mm, 16mm, 20mm e 25mm, em espaçamentos de 20cm, 17,5cm, 15cm, 12,5cm, 10cm e 7,5cm.

Para as lajes com armaduras ortogonais, foram respeitadas a armadura mínima e a relação mínima entre armaduras calculadas, preconizadas pela NBR 6118:2014. Para as lajes com armaduras oblíquas, foram respeitadas as relações da Tabela 2.3 e as taxas mínimas da Tabela 2.5. Para as lajes estudadas a armadura mínima é dada pela taxa mínima absoluta e vale  $3,45 \text{ cm}^2/\text{m}$ .

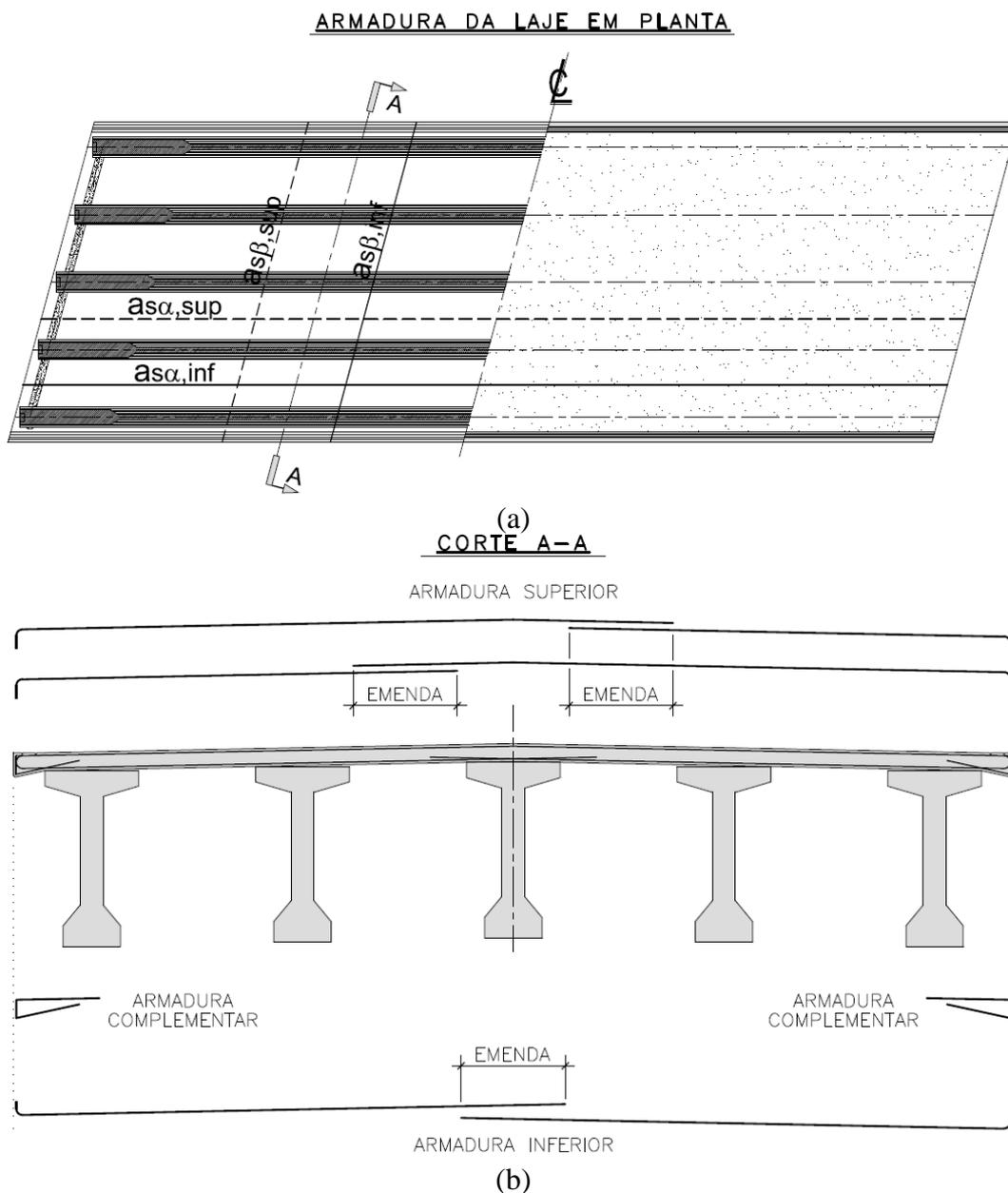


Figura 3.177 – Forma típica adotada para as armaduras (a) em planta, e (b) em corte transversal segundo a esconsidade

Os comprimentos das barras foram calculados considerando-se a dimensão da laje segundo a direção da barra, com suas extremidades dobradas, estendendo-se até a face oposta. Os cobrimentos nominais foram fixados em 3cm. A Figura 3.177 apresenta a forma típica adotada para as armaduras em planta e corte transversal. A quantidade de emendas necessárias para cada posição foi calculada, admitindo-se o comprimento máximo das barras de aço de 12m.

Tanto os raios de dobramento das armaduras quanto os comprimentos das emendas foram considerados em função da bitola adotada, e são mostrados na Tabela 3.6. Os pesos de cada bitola por metro também são mostrados na Tabela 3.6.

As armaduras transversais ao plano das lajes e complementares, tais como as armaduras das pingadeiras, foram desprezadas.

Tabela 3.6 – Raios de dobramento, comprimento dos arcos, comprimento das emendas e peso por metro das barras de aço, por bitola

$\phi$ (mm)	R <sub>dobra</sub> (cm)	L <sub>arco</sub> (cm)	L <sub>emenda</sub> (cm)	p (kg/m)
8	4,00	6,50	0,50	0,4
10	5,00	8,00	0,60	0,63
12,5	6,50	10,00	0,75	1
16	8,00	13,00	1,00	1,6
20	10,00	16,00	1,20	2,5
25	20,00	31,00	1,50	4

### 3.5.5.2. Detalhamento das armaduras

As Figuras 3.178 a 3.181 apresentam o detalhamento esquemático das lajes das pontes em vigas múltiplas.

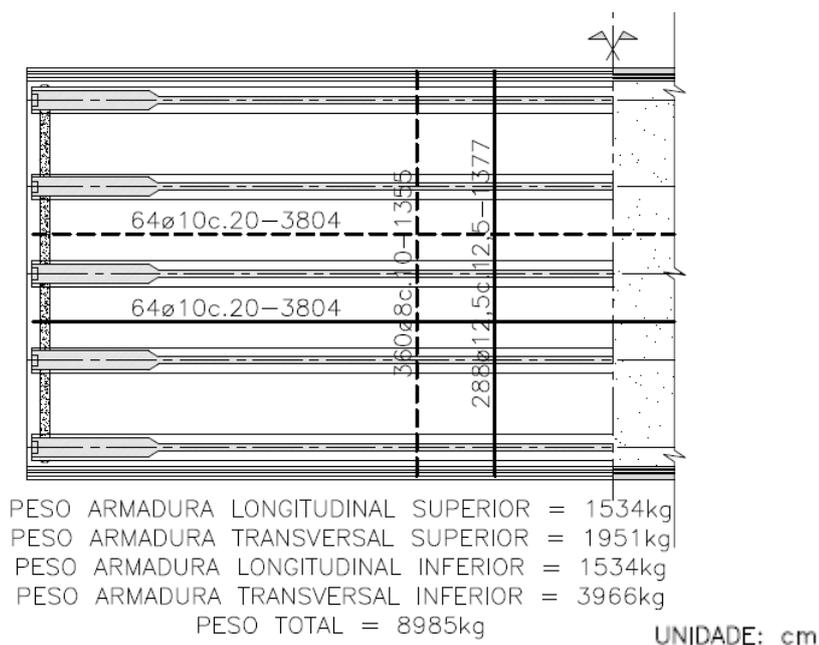
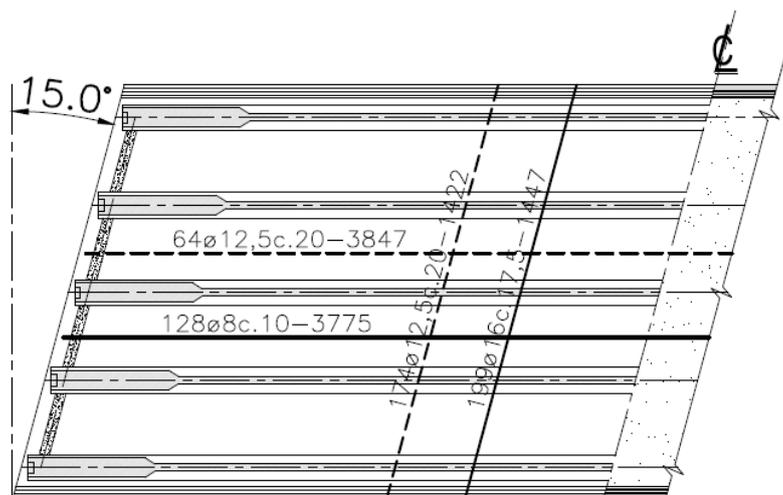


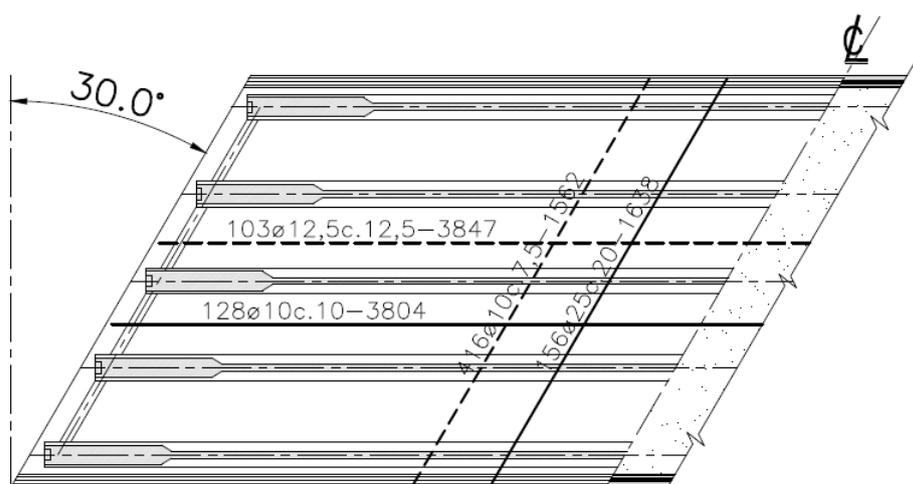
Figura 3.178 – Detalhamento esquemático das armaduras com  $e=0^\circ$



PESO ARMADURA LONGITUDINAL SUPERIOR = 2462kg  
 PESO ARMADURA TRANSVERSAL SUPERIOR = 2475kg  
 PESO ARMADURA LONGITUDINAL INFERIOR = 1933kg  
 PESO ARMADURA TRANSVERSAL INFERIOR = 4608kg  
 PESO TOTAL = 11478kg

UNIDADE: cm

Figura 3.179 – Detalhamento esquemático das armaduras com  $e=15^\circ$



PESO ARMADURA LONGITUDINAL SUPERIOR = 3962kg  
 PESO ARMADURA TRANSVERSAL SUPERIOR = 4094kg  
 PESO ARMADURA LONGITUDINAL INFERIOR = 3068kg  
 PESO ARMADURA TRANSVERSAL INFERIOR = 10221kg  
 PESO TOTAL = 21345kg

UNIDADE: cm

Figura 3.180 – Detalhamento esquemático das armaduras com  $e=30^\circ$

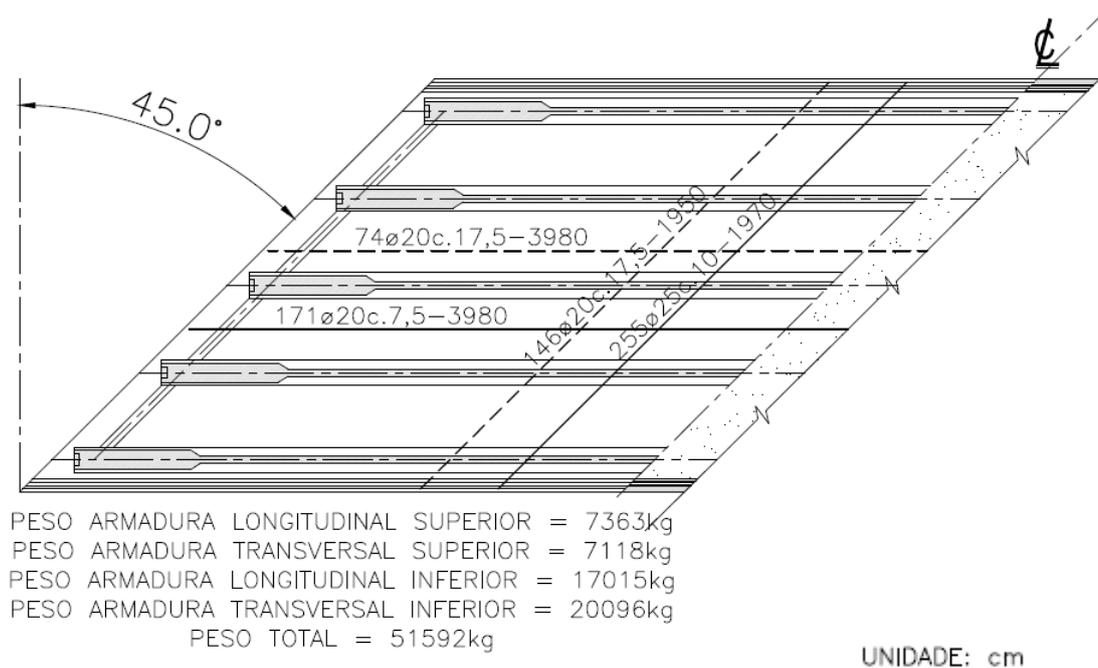


Figura 3.181 – Detalhamento esquemático das armaduras com  $e=45^\circ$

Para a ponte sem esconsidade, o detalhamento obteve um peso total de 8985 kg, que resultou em taxas de  $85 \text{ kg/m}^3$  de concreto e  $20 \text{ kg/m}^2$  de área em planta. Para a ponte com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ , o peso total de aço foi de 11478 kg, um aumento, portanto, de aproximadamente 30% em relação à ponte sem esconsidade. As taxas de aço foram de  $108 \text{ kg/m}^3$  e  $25 \text{ kg/m}^2$ .

Para as pontes com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , os pesos totais de aço foram 21345 kg e 51592 kg, respectivamente. As taxas foram de  $201 \text{ kg/m}^3$  e  $46 \text{ kg/m}^2$ , para a ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , e  $489 \text{ kg/m}^3$  e  $112 \text{ kg/m}^2$ , para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade. Os acréscimos em relação à ponte sem esconsidade foram da ordem de 240%, para ponte com ângulo de esconsidade  $30^\circ$ , e de 575% para a ponte com  $45^\circ$  de esconsidade.

Na ponte com ângulo de esconsidade  $15^\circ$ , a relação mínima entre armaduras proposta não afetou o peso total de aço, porém o aumento da armadura mínima resultou em um acréscimo de 4% de aço. Já nas pontes com ângulos de esconsidade  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , a armadura mínima proposta não aumentou o peso total de aço, enquanto, a relação mínima entre armaduras oblíquas sugerida resultou em aumentos de 1% e 15% no peso de aço, respectivamente. Todavia, salienta-se que, em um detalhamento mais refinado das armaduras, as taxas mínimas e relações mínimas entre armaduras propostas teriam maior impacto sobre o peso total de aço.

A majoração da armadura calculada para a ponte com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , conforme a Tabela 2.4, alterou o detalhamento das armaduras transversais inferiores e

superiores, porém, na direção longitudinal, apenas o detalhamento da armadura superior sofreu alteração. O aumento total no peso de aço foi de 12%.

O aumento significativo das taxas deve-se, principalmente, ao aumento das áreas de aço necessárias com a diminuição do ângulo entre as camadas de armadura. As armaduras mínimas e relações mínimas entre armaduras oblíquas propostas pouco aumentaram o peso total de aço.

O detalhamento das armaduras positivas, utilizando-se pré-lajes, resultaria em maior peso total de aço, uma vez que haveria emendas sobre todas as vigas.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, discute-se o dimensionamento de estruturas laminares de concreto com armaduras esconsas entre si, e oblíquas em relação às direções das solicitações. Os esforços, por unidade de comprimento, atuantes no plano do elemento, são: duas forças normais, uma força tangencial, dois momentos fletores e um momento volvente. Dois esforços cortantes por unidade de comprimento atuam na direção transversal ao plano do elemento. A teoria utilizada considera as oito solicitações concomitantes e baseia-se no modelo da chapa fissurada de concreto.

Aspectos teóricos e práticos da formulação são analisados a partir do estudo de casos de lajes de pontes com formas esconsas.

Após a revisão bibliográfica, são apresentados os modelos da chapa fissurada para o dimensionamento de cascas, com armaduras ortogonais e oblíquas. O problema é tratado no sistema local, independentemente da direção das armaduras, evitando-se, assim, a transformação para os eixos principais. Esse procedimento simplifica o cálculo manual e a implementação computacional.

São propostos critérios objetivos para consideração da armadura mínima absoluta e da relação mínima entre armaduras oblíquas, em função das recomendações da NBR 6118:2014 para armaduras ortogonais. O dimensionamento de cascas às solicitações transversais ao plano do elemento também é revisado.

A teoria da chapa fissurada com armadura oblíqua é aplicada no dimensionamento de lajes de pontes. São apresentados 12 exemplos de interesse prático, sendo quatro pontes estruturadas em laje sem vigas laterais, quatro pontes estruturadas em laje com vigas laterais e quatro pontes em vigas múltiplas ligadas através da laje e das transversinas. Todos os casos são estudados conforme os ângulos de esconsidade  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , utilizando-se modelos em elementos finitos.

Quando a tensão admissível no concreto é excedida, as cascas são redimensionadas, utilizando-se diferentes espessuras das chapas extremas e braços de alavanca correspondentes. Essa solução possibilita a diminuição das tensões no concreto, porém resulta em maiores armaduras. Entretanto, essa redução não é linear, e a utilização de chapas mais espessas nem sempre atende à tensão admissível no concreto. Nesses casos, é necessário adotar-se um concreto de maior resistência ou aumentar-se a espessura do elemento.

A partir dos resultados do dimensionamento de cada modelo, as armaduras são detalhadas, esquematicamente, e os pesos totais de aço são calculados, para obtenção das taxas de armadura por volume de concreto e área de tabuleiro.

Os três tipos de ponte são estudados e discutidos no capítulo 3. As principais conclusões são resumidas a seguir.

Sobre as pontes em laje sem vigas laterais, concluiu-se que

- mesmo nas lajes simplesmente apoiadas e sem continuidade são necessárias armaduras na face superior, especialmente nos casos de maior esconsidade;
- as armaduras principais máximas são obtidas, nas regiões dos bordos livres, com exceção das pontes com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , que apresentam as maiores armaduras no centro da laje;
- nas pontes em laje de grande esconsidade, a armadura principal, necessária no apoio, no canto de ângulo obtuso, é da mesma ordem de grandeza das armaduras calculadas para o meio do vão, e as armaduras secundárias podem ser equivalentes às armaduras principais;
- as tensões no concreto são maiores, em módulo, na chapa inferior e são observadas nos cantos de ângulo obtuso.

Sobre as pontes em laje com vigas laterais, concluiu-se que

- assim como nas pontes sem vigas laterais, as armaduras longitudinais máximas também são obtidas nas regiões dos bordos, junto às vigas, com exceção das pontes com ângulo de esconsidade  $45^\circ$ , que apresentam as maiores armaduras no centro da laje;
- diferentemente das pontes sem vigas laterais, nos casos de grande esconsidade, a armadura principal necessária, no apoio, no canto de ângulo obtuso, é bastante inferior às armaduras necessárias no meio do vão, e é semelhante à armadura do canto de ângulo agudo;
- assim como nas pontes sem vigas laterais, as tensões no concreto também são maiores, em módulo, na chapa inferior, porém são observadas na região do meio do vão;
- a utilização de vigas laterais reduz, significativamente, o peso total de aço e a compressão no concreto das pontes em laje.

Sobre as pontes em vigas múltiplas, concluiu-se que

- as maiores armaduras inferiores são obtidas na região do meio do vão, entre as vigas principais;
- as maiores armaduras superiores são obtidas sobre as longarinas, na região próxima ao apoio delas;
- as maiores tensões no concreto, em módulo, são obtidas na região do meio do vão, onde a laje é mesa de compressão das longarinas;
- as lajes de pontes em vigas múltiplas devem ser dimensionadas utilizando-se o modelo de duas chapas proposto por BAUMANN (1972). A aproximação de WOOD e ARMER (1968) não deve ser adotada, pois não considera os esforços normais presentes nessas lajes.

Entre as principais conclusões da pesquisa, destacam-se

- o aumento da esconsidade resulta em maiores armaduras e maiores tensões no concreto, em módulo;
- os efeitos da esconsidade no dimensionamento das armaduras não devem ser desprezados, mesmo para pequenas esconsidades;
- o atendimento à tensão admissível no concreto é um limitador importante para o detalhamento de armaduras oblíquas em elementos de grandes esconsidades;
- a armadura mínima absoluta e a relação mínima entre armaduras secundária e principal sofrem acréscimos significativos, no caso de armaduras oblíquas, e recomenda-se a inclusão desses parâmetros nas preconizações normativas.

Para trabalhos futuros relacionados ao tema, sugere-se a extensão do modelo tridimensional proposto por SCHULZ e SANTISI D'AVILA (2010) para cascas com armaduras esconsas.

Assim, analisando-se os aspectos teóricos e práticos do dimensionamento de lajes de pontes esconsas, procurou-se discutir a relevância do dimensionamento de placas e cascas de concreto com armaduras oblíquas, além de contribuir para o seu desenvolvimento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT – NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014.

ABNT – NBR 7480:2007 – Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2007.

ABNT – NBR 7187:2003 – Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido – Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2003.

ABNT – NBR 7188:2013 – Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2013.

ABNT – NBR 7189:1985 – Cargas móveis para projeto estrutural de obras ferroviárias, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1985.

ABNT – NBR 8681:2003 – Ações e segurança nas estruturas - Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2003.

BAUMANN, T. – *Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, no. 217, Berlin, 1972, pp. 1–53.

BERTAGNOLI, G., GIORDANO, L., MANCINI, S – *Design and optimization of skew reinforcement in concrete shells*, Structural Concrete, vol. 13/4, 2012, pp. 248-258.

CEB-FIP: Design of concrete structures. CEB-FIP Model Code 1990, Thomas Telford, London, 1993.

Comité Euro-International du Béton and Fédération Internationale de la Précontrainte– *Bul. d'Information 141: CEB/FIP manual on bending and compression*, Construction Press, London, 1982.

EUROCODE 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, 2004.

FALCONER, B. H. – *Theory of the stresses induced in reinforced concrete by applied two-dimensional stress*, ACI Journal, vol. 53(9), 1956, pp. 277–294.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB): Model Code 2010 – final draft, vol. 1, Bulletin 65, e vol. 2, Bulletin 66, Lausanne, Switzerland, 2012.

GUPTA, A. K. – *Membrane reinforcement in concrete shells: a review*, Nuclear Engineering and Design, no. 82, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1984, pp. 63-75.

LEONHARDT, F; MÖNNIG, E. – *Construções de concreto – vol. 2: Casos Especiais de Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado*, tradução: V. L. E. Merino, Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

MARTI, P. – *Design of concrete slabs for transverse shear*, ACI Structural Journal, vol. 87(2), 1990, pp. 180-190.

MILLS, H. B., ARMER, G. S. T., WOOD, R. H. – *The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments – Correspondence*, Concrete, the journal of the concrete society, vol. 2, no. 8, 1968, pp. 319-320.

MITCHELL, D., COLLINS, M. P. – *Diagonal compression field theory – A rational model for structural concrete in pure torsion*, ACI Journal, vol. 71(8), 1974, pp. 396-408.

NIELSEN, M. P. – *Yield conditions for reinforced concrete shells in the membrane state*, Non Classical Shell Problems: IASS Symposium, W. Olszak, ed., North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1964, pp. 1030-1040.

ROBINSON, J. R., DEMORIEUX, J. M. – *Essais de traction-compression sur modèles d'âme de poutre en béton armé (Compte rendu partiel II)*, Institut de Recherches Appliquées du Béton Armé, Paris, France, 1972.

SCHNOBRICH, W. C. – *Behavior of reinforced concrete structures predicted by the finite element method*, Computer & Structures, vol. 7, Pergamon Press, Great Britain, 1977, pp. 365-376.

SCHULZ, M. – *Design of reinforced concrete plates and shells*, Proceedings of the Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1984, pp. 115-127.

SCHULZ, M. – *Verificação geral de peças de concreto armado baseado no modelo da chapa fissurada*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.

SCHULZ, M., SANTISI D'AVILA, M. P. – *Analysis of Reinforced Concrete with Transversal Shear Forces*, ASCE Journal of Structural Engineering, vol. 136, no. 7, 2010, pp. 837-848.

SCHULZ, M., OLIVEIRA, E. – *Design procedure for plane elements with skew reinforcement*, IABSE Symposium Report, Venice, Italy, 2010, pp. 46-53 (8).

VECCHIO, F. J., COLLINS, M. P. – *The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear*, ACI Journal, vol. 83(2), pp. 219-231.

WOOD, R. H. – *The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments*, Concrete, the journal of the concrete society, vol. 2, no. 2, 1968, pp. 69-76.