

ADRIANA BARBOSA FERRAZ CAVALCANTI

**ANÁLISE DA RIGIDEZ À TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE
RESISTÊNCIA NORMAL E DE ALTA RESISTÊNCIA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia da Construção.

Orientador: Prof. PLÁCIDO BARBOSA, M.Sc.

Co-orientador: Prof. EMIL DE SOUZA SÁNCHEZ FILHO, D.Sc.

Niterói

2005

ADRIANA BARBOSA FERRAZ CAVALCANTI

**ANÁLISE DA RIGIDEZ À TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE
RESISTÊNCIA NORMAL E DE ALTA RESISTÊNCIA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia da Construção.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Plácido Barbosa, M.Sc. - Orientador
Universidade Federal Fluminense

Cavalcanti, Adriana Barbosa Ferraz

2005 Análise da Rigidez à Torção em Vigas de Concreto Armado de Resistência Normal e de Alta Resistência / Adriana Barbosa Ferraz Cavalcanti. – Niterói: UFF/CTC, 2005.

241 f.

Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil, Universidade Federal Fluminense, 2005.

1. Concreto Armado. 2. Torção. 3. Rigidez. 4. Concreto de alta resistência.

Prof. Emil de Souza Sánchez Filho, D.Sc. – co-orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Marta de Souza Lima Velasco, D.Sc.
Pontifícia Universidade Católica - PUC-RIO

Prof^a. Maria Teresa Gomes Barbosa, D.Sc.
Universidade Federal de Juiz de Fora

Niterói
2005

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Plácido Barbosa, pela confiança depositada.

Ao meu co-orientador, professor Emil de Souza Sánchez Filho, pela confiança, pela paciência e disposição, de quem me tornei amiga.

Aos professores de graduação que despertaram o meu gosto por esta profissão.

Ao meu esposo Mário, pelo apoio e pela compreensão da minha ausência.

Aos meus pais pelo esforço de uma vida para que eu pudesse estudar.

Aos amigos que conquistei e meus familiares.

A Deus pela oportunidade.

Este trabalho é dedicado

Aos meus pais, pelo amor e dedicação que sempre tiveram por nós, principalmente à minha mãe que estaria orgulhosa se aqui estivesse.

Aos meus irmãos, pela nossa amizade e companheirismo.

Ao meu esposo Mário pelo incentivo.

Aos meus amigos pelas experiências compartilhadas, pelo carinho, e pelo apoio.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	3
SUMÁRIO.....	5
LISTA DE FIGURAS	7
LISTA DE TABELAS	9
LISTA DE SÍMBOLOS.....	10
RESUMO.....	19
ABSTRACT	20
INTRODUÇÃO	21
Objetivos	21
Conteúdo.....	22
1 TEORIA ELÁSTICA	24
1.1 NOTAS INICIAIS.....	24
2 ANÁLISE À TORÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ESTRUTURAL	39
2.1 NOTAS INICIAIS.....	39
2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE TORÇÃO.....	39
2.2.1 Torção de SAINT-VENANT	39
2.2.2 Torção de VLASSOV	40
2.3 TEORIAS SOBRE TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ESTRUTURAL	
41	
2.3.1 Seção Circular	41
2.3.2 SEÇÃO RETANGULAR.....	42
2.3.3 SEÇÕES GENÉRICAS	44
2.3.4 TEORIA DE BREDT.....	46
2.4 COMPORTAMENTO MECÂNICO DAS VIGAS DE CONCRETO	
ARMADO SUBMETIDAS Á TORÇÃO.....	47
2.5 MODELO DA TRELIÇA ESPACIAL GENERALIZADA	49
2.6 PRESCRIÇÕES DA NBR-6118/2003	52
2.6.1 Torção de equilíbrio	52
2.6.1.1 Introdução	52
2.6.1.2 Espessura equivalente da parede da seção.....	52
2.6.1.3 Verificação da resistência das bielas.....	54
2.6.1.4 Armaduras mínimas	56
2.6.1.5 Armadura longitudinal.....	58
2.6.1.6 Armadura transversal	60
2.6.1.7 Flexão e torção.....	60
2.6.1.8 Força cortante e torção	61
2.6.1.9 Detalhamento	62
2.6.2 Torção em perfis abertos de paredes finas.....	64
2.6.3 Considerações finais.....	66

3	RIGIDEZ À TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	67
3.1	NOTAS INICIAIS.....	67
3.2	RIGIDEZ À TORÇÃO ANTES DA FISSURAÇÃO.....	68
3.3	RIGIDEZ À TORÇÃO PÓS-FISSURAÇÃO.....	69
3.3.1	Modelo de Lampert (1973).....	69
3.3.2	Modelo de Hsu (1974,1984).....	72
3.3.2.1	Interseção vertical	79
3.3.2.2	Resumo da rigidez à torção.....	82
3.3.3	Modelo de Tavio e Susanto Teng (2004).....	85
4	FORMULAÇÃO PROPOSTA.....	92
4.1	ENSAIOS DE FANG E SHIAU (2004).....	92
4.1.1	O modelo da treliça espacial generalizada com abrandamento de tensões no concreto	96
4.1.2	Torção pura.....	100
4.1.3	Ductilidade	100
4.1.4	Ângulo da Biela.....	104
4.1.5	Alongamento Longitudinal das vigas.....	104
4.2	FORMULAÇÃO TEÓRICA.....	105
4.2.1	Fórmula Original.....	105
4.2.2	Fórmula Modificada.....	106
4.2.3	Cálculo da rigidez tangente.....	107
4.3	ENSAIO DE SILVA FILHO (2005)	107
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	111
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	120
6.1	Rigidez Secante.....	120
6.1.1	Concreto de Alta Resistência.....	120
6.1.2	Concreto de Resistência Normal	121
6.2	Rigidez Tangente.....	121
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
	ANEXO A	125
	ANEXO B	134
	ANEXO C	159
	ANEXO D	207
	ANEXO E	224

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Membrana sob pressão constante.	25
Figura 1.2 – Parâmetros da seção transversal.	27
Figura 1.3 – Seção retangular com espessura muito fina.	29
Figura 1.4 – Seção retangular com espessura muito fina.	29
Figura 1.5 – Condições para se resolver o problema da torção por meio da analogia da membrana.	30
Figura 1.6 – Analogia da membrana para seção vazada de paredes finas.	31
Figura 1.7 – Fluxo de tensões tangenciais em seções celulares de paredes finas.	32
Figura 1.8 – Equilíbrio dos fluxos de tensões tangenciais nas junções de paredes.	32
Figura 1.9 – Fluxo de tensões tangenciais nas paredes das células.	33
Figura 1.10 – Momentos torçores resistidos pelos fluxos.	34
Figura 1.11 – Seção unicelular.	34
Figura 1.12 – Distribuição das tensões tangenciais na espessura da parede da seção.	36
Figura 1.13 – Seção vazada de paredes finas com abas laterais.	38
Figura 2.1 – Tipos de torção: a) torção de equilíbrio; b) torção de compatibilidade; adaptada de PARK e PAULAY (1975).	40
Figura 2.2 – Empenamento de uma viga com seção I devido à Torção de Vlassov; adaptada de NAWY (1985).	41
Figura 2.3 – Seção circular; adaptada de SÁNCHEZ (1999).	42
Figura 2.4 – Seção retangular; adaptada de SÁNCHEZ (1999).	43
Figura 2.5 – Analogia do monte de areia; adaptada de CHEN & LUI (1987).	45
Figura 2.6 – Teoria de Bredt para tubos de paredes finas; adaptada de SÁNCHEZ (1999).	47
Figura 2.7 – Ângulo de torção por unidade de comprimento (10^{-3} deg. /ln); adaptada de HSU (1984).	48
Figura 2.8 – Modelo da Treliça Espacial Generalizada: a) viga suposta funcionando como um tubo de paredes finas; b) painel fissurado solicitado por uma força proveniente do fluxo de tensões tangenciais; c) tirantes compostos pelos estribos verticais; adaptada de HSU (1984).	51
Figura 2.9 – Parâmetros da seção retangular.	53
Figura 2.10 – Parâmetros da seção retangular; adaptada de SÁNCHEZ (1999).	59
Figura 2.11 – Interação entre a força cortante e o momento torçor em seções maciças e vazadas de acordo com a NBR 6118/2003.	62
Figura 2.12 – Transferência da força da biela num painel que compõe a seção para a armadura longitudinal; adaptada de SÁNCHEZ (2004).	63

Figura 2.13 – Flexo-torção de perfis abertos de paredes finas; adaptada da norma NBR 6118/2003.....	65
Figura 3.1 – Curva $T \times \theta$ para vigas de concreto armado; adaptada TAVIO e TENG (2004).....	69
Figura 3.2 – Propriedades da seção retangular; adaptada de TAVIO (2004).	72
Figura 3.3 – Treliza Espacial; adaptada de HSU (1984).	74
Figura 3.4 – Compatibilidade das deformações específicas devida à distorção proveniente da torção; adaptada por HSU (1984).....	77
Figura 3.5 – Diagrama momento x ângulo de torção por unidade de comprimento ($T \times \theta$); adaptada de HSU (1984).	81
Figura 3.6 – Curva $T \times \theta$ para vigas B4, D4 e E4 dos ensaios realizados na PCA; adaptada de HSU (1984).	81
Figura 3.7 – Rigidez à torção simplificada; adaptada de HSU (1984).....	85
Figura 3.8 – Viga de concreto sujeita à torção na fase pós- fissuração; adaptada de TAVIO e SUSANTO TENG (2004).	87
Figura 4.1 – Detalhes das vigas ensaiadas; por FANG e SHIAU (2004).	93
Figura 4.2 – Detalhes do esquema de ensaio por de FANG e SHIAU (2004).....	95
Figura 4.3 – Relação $T \times \theta$ para vigas de concreto normal; adaptada de FANG e SHIAU (2004).	97
Figura 4.4 – Ductilidade das vigas; adaptada de FANG e SHIAU (2004).	102
Figura 4.6 – Características da viga VR 20x40; adaptada de SILVA FILHO (2005)108	

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coeficientes adimensionais.....	43
Tabela 4.1 – Características das vigas ensaiadas por FANG e SHIAU (2004)...	94
Tabela 4.2 – Dados das vigas CAR e CN adaptadas dos ensaios de FANG e SHIAU (2004).....	99
Tabela 4.3 – Resultados dos testes; adaptada de FANG e SHIAU (2004)	103

LISTA DE SÍMBOLOS

a) Abreviações

CAR Concreto de Alta Resistência

CN Concreto Normal

b) Letras romanas minúsculas

a_1 flecha oriunda da parede 1 devido à força F

a_2 flecha na parede 2 devido á força F

a_i menor lado do retângulo genérico

a_{sl} área da armadura longitudinal por unidade de comprimento

a_{sw} área dos estribos por unidade de comprimento

b largura da alma de uma viga

b_i maior lado do retângulo genérico

b_w largura da seção

c_1 distância entre o eixo da armadura longitudinal e a face da seção

d altura útil da seção; diâmetro da seção transversal do concreto

d_1 diâmetro do círculo formado pela linha central do estribo

d_s elemento de comprimento ao longo da linha média do perfil

f_c resistência à compressão do concreto; tensão máxima de compressão do concreto

f_{cd}	resistência de cálculo à compressão do concreto
f_{ck}	resistência característica à compressão do concreto
f_{ctm}	resistência média do concreto à tração direta
f'_c	tensão característica de compressão
f_t	resistência à tração direta do concreto não fissurado
f_y	tensão de escoamento do aço
$f_{y\ell}$	tensão de escoamento do aço que constitui as armaduras longitudinais
$f_{y\ell d}$	tensão de escoamento do aço da armadura longitudinal
$f_{y\ell k}$	tensão de escoamento característica da armadura longitudinal
f_{yt}	tensão de escoamento da armadura transversal (estribo)
f_{ywk}	tensão de escoamento do aço da armadura transversal
h_e	espessura equivalente, espessura da parede do tubo (h)
k_1	fluxo de cisalhamento
k_2	fluxo de cisalhamento
k_{cr}	rigidez à torção na fissuração
k_{um}	rigidez à torção na ruptura
ℓ	comprimento da viga
n	relação entre os módulos de elasticidade
n_y	normal na direção y
n_z	normal na direção z
p	pressão interna da membrana
p_1	perímetro de centro a centro da linha do estribo

p_{cp}	perímetro externo da seção de concreto
p_e	perímetro efetivo da seção A_e
p_0	perímetro de A_0
q	fluxo de cisalhamento
q_1	fluxo de cisalhamento
r	braço de alavanca do fluxo de cisalhamento
r_h	coeficiente adimensional
r_ℓ	coeficiente adimensional
s	espaçamento entre os estribos internos
s_ℓ	espaçamento medido de eixo a eixo das barras longitudinais
s_w	espaçamento entre os estribos internos
t	espessura da parede do tubo
t_a	espessura da parede do tubo
t_b	espessura da parede do tubo
t_c	espessura da parede do tubo
t_d	espessura da parede do tubo
t_e	espessura da parede do tubo
t_i	espessura da parede da seção vazada ou seção sólida
t_{\min}	espessura mínima
u	perímetro da área da linha central da barra; perímetro da seção maciça
u_e	perímetro da seção efetiva
u_x	deslocamento no eixo X

u_y	deslocamento no eixo Y
u_z	deslocamento no eixo Z
x	menor dimensão da seção transversal
$x_{m\acute{a}x}$	largura máxima de um dos retângulos que formam a seção
x_1	distância tomada de eixo a eixo das barras longitudinais
y	maior dimensão da seção transversal
y_1	distância tomada de eixo a eixo das barras longitudinais
w	condição de contorno da membrana
z	braço de alavanca interno

c) Letras romanas maiúsculas

A	área da seção média do tubo; área da seção maciça
A_0	área delimitada pelo fluxo de cisalhamento; área definida pela linha média do perfil
A_c	área externa da seção transversal do concreto; área da seção retangular
A_{cp}	área da seção de concreto; área do perímetro externo da seção transversal do concreto
A_e	área da seção efetiva; área da linha média da seção
A_h	área da seção transversal de um estribo;
A_ℓ	área total da seção transversal da armadura longitudinal
A_t	área da seção transversal de um tramo do estribo; área da armadura transversal
A_1	área equivalente
$A_{s\ell}$	área das barras longitudinais; área da seção transversal da armadura longitudinal

A_{st}	área de escoamento do aço que compõe os estribos
A_{sw}	área da seção transversal da armadura transversal
A_{90}	área de um tramo do estribo vertical
C	rigidez à torção; momento de inércia à torção
D	força na biela
E_c	módulo de elasticidade do concreto
E	módulo de elasticidade longitudinal
E_s	módulo de elasticidade do aço
F_{Rd}	força transversal
F_{sd}	parcela da força transversal total aplicada
G	módulo de elasticidade transversal
G_c	módulo de elasticidade transversal
G_{cr}	módulo de cisalhamento pós-fissuração
$(GC)_{cr}$	rigidez à torção na fase da fissuração
$(GC)_e$	rigidez à torção
(GC)	rigidez à torção
$(GC)_u$	rigidez à torção na fase da ruptura
$G_{cr}C_{cr}$	rigidez à torção pós-fissuração
J_{ef}	momento de inércia efetivo
$(J_{ef})_{aba}$	momento de inércia efetivo da aba
J_f	momento de inércia
J_{outros}	momento de inércia efetivo das abas

J_t	momento de inércia à torção
R	raio da seção
R_e	raio externo
S	força axial atuante no extremo da membrana
T	momento torçor
T_a	momento torçor na fase pré fissuração
T_d	momento torçor de projeto
T_c	momento torçor resistido pelo concreto
T_{cr}	momento torçor na fase fissurada
T_f	momento torçor resistido pela mesa (flange)
T_{outros}	momento torçor (abas)
T_n	momento torçor na fase da ruptura
T_{Rd}	momento torçor resistente de cálculo
$T_{Rd,2}$	torçor resistido pelas bielas flexo-comprimidas
$T_{rd,3}$	torçor resistido pela armadura transversal
$T_{Rd,4}$	torçor resistido pela armadura longitudinal
T_{sd}	momento torçor solicitante de projeto
T_u	momento torçor de ruptura
V	força cortante
V_{Rd}	esforço cortante resistente de cálculo
V_{Rd2}	esforço cortante de cálculo máximo que pode ser suportado pelas bielas de compressão

V_{sd} parcela do esforço cortante resistida pelos estribos internos

V_{sd} força cortante solicitante de cálculo

d) Letras gregas minúsculas

α ângulo de inclinação das bielas; coeficiente adimensional; rotação da seção produzida pela flexão

α_{v2} fator de efetividade do concreto

β coeficiente adimensional

ε_c deformação específica do concreto

ε_d deformação específica da biela de concreto

ε_h deformação específica da armadura transversal

ε_ℓ deformação específica da armadura longitudinal

ε_0 deformação específica máxima de compressão

ϕ coeficiente adimensional

ϕ_t diâmetro dos estribos

ϕ'_{vazado} ângulo de torção por unidade de comprimento (vazado)

φ coeficiente adimensional; ângulo de torção

γ distorção de cisalhamento total

γ_c distorção de cisalhamento

γ_h distorção devido ao alongamento do estribo

γ_ℓ distorção devido ao alongamento da barra longitudinal

η coeficiente adimensional

λ coeficiente adimensional

μ	coeficiente adimensional
ν	coeficiente de Poisson
θ	ângulo de torção por unidade de comprimento
θ_a	ângulo de torção na fase pré-fissuração
θ_{cri}	ângulo de torção quando da fissuração
θ_{crp}	ângulo de torção na fase da fissuração
θ_u	ângulo de torção na fase da ruptura
θ_y	ângulo de torção na fase do escoamento
ρ_2	perímetro da linha do centro ao canto da barra longitudinal
ρ_ℓ	taxa volumétrica da armadura longitudinal
$\rho_{s\ell}$	taxa geométrica da armadura longitudinal
ρ_{sw}	taxa geométrica da armadura transversal
ρ_t	taxa volumétrica da armadura transversal
ρ_{total}	taxa volumétrica total
ρ_w	taxa volumétrica da armadura transversal
σ_c	resistência à compressão do concreto; tensão na biela
σ_d	tensão de compressão na biela
σ_h	tensão na fibra
σ_ℓ	tensão de compressão do concreto
σ_{xn}	tensão no plano Xn
σ_{xy}	tensão no plano XY
σ_{xz}	tensão no plano XZ

τ	tensão cisalhante
τ_a	fluxo de cisalhamento
τ_b	fluxo de cisalhamento
τ_c	fluxo de cisalhamento
$\tau_{m\acute{a}x}$	tensão de cisalhamento máxima
τ_{id}	tensão cisalhante de cálculo
ψ	coeficiente adimensional
ξ	coeficiente de abrandamento de tensões

RESUMO

Esta dissertação apresenta um estudo da torção de materiais homogêneos e isotrópicos, e uma breve revisão do comportamento de vigas de concreto armado submetidas à essa solicitação. É realizada uma revisão bibliográfica relativa aos modelos de cálculo da rigidez à torção de vigas de concreto armado. São realizados estudos para um ajuste da curva $T \times \theta$, para cálculo da torção, da rigidez secante e rigidez tangente. São realizadas análises a partir de dados experimentais encontrados na literatura. Após este estudo constatou-se a necessidade de um ajuste nas fórmulas existentes por apresentarem valores discrepantes. A análise realizada mostra que o ajuste teórico para a curva $T \times \theta$ por meio do modelo proposto fornece resultados mais consistentes.

ABSTRACT

This dissertation presents a study of beams of the homogeneous isotropic materials subjected to torsion, and a brief revision of the torsional behavior of reinforced concrete beams. It is done a bibliographical revision of the models of the torsional rigidity of reinforced concrete beams. It is done to study for adjustment of the curve $T \times \theta$, and for the calculation torsion, calculation of the secant stiffness and tangent stiffness. This model is analyzed and compared with the test data found in the literature. The analysis done shows that the theoretical adjustment for the curve $T \times \theta$, by proposed model gives more consistent results.

INTRODUÇÃO

OBJETIVOS

As pesquisas sobre torção em vigas de concreto estrutural estão a desenvolver-se desde o início do século, ressaltando-se os ensaios pioneiros de Emil Mörsch em 1904 e 1924. Atualmente o modelo adotado internacionalmente é o modelo da Treliça Espacial Generalizada, concebido por Ernest Rausch em 1929.

Como não existem muitos estudos envolvendo este tema fez-se necessário a abordagem deste assunto, que tem como objetivo delinear os parâmetros fundamentais do dimensionamento à torção por meio do modelo da Treliça Espacial Generalizada, de modo a permitir a formulação de um estudo do comportamento das rizezas à torção em fase elástica linear e fase pós-fissuração de vigas de concreto armado, cujo concreto tenha resistência normal ou alta resistência.

Foram estudados diversos modelos para rigidez à torção encontrados na literatura, destacando-se seu principais pontos, e ressaltando-se suas características fundamentais. Adotou-se uma formulação baseada no diagrama tri-linear para o diagrama momento torçor vs. ângulo de torção por unidade de comprimento da viga, onde os pontos de referência para esse estudo são o momento torçor de fissuração, o momento torçor de escoamento de uma das armaduras, longitudinal ou transversal, e o momento torçor último.

Para analisar a aplicação da formulação estudada aos resultados experimentais, foram confrontados os resultados de ensaios de vigas de concreto com resistência normal e concreto de alta resistência, solicitadas à torção pura, num total de 16 vigas. Calculou-se a correlação entre a fórmula inicialmente pesquisada e esses resultados, obtendo-se um coeficiente adimensional para um dos termos, cujo expoente proposto é diferente do encontrado no artigo inicialmente pesquisado.

Esse cálculo foi feito por meio de análise estatística, na qual foi obtido um coeficiente característico usado na fórmula proposta neste trabalho.

CONTEÚDO

No capítulo 1, é realizada uma revisão bibliográfica, onde se faz uma apresentação resumida do estudo da torção de vigas de material homogêneo e isotrópico, realçando-se a analogias da membrana aplicada às seções vazadas de paredes finas.

No capítulo 2 é apresentado o estudo da analogia do monte de areia, definindo-se os tipos de torção, o comportamento das vigas de concreto armado solicitadas à torção, e as prescrições da NBR 6118/2003 para o dimensionamento e detalhamento à torção, e dando-se destaque ao modelo da Treliça Espacial Generalizada.

No Capítulo 3 são apresentados de maneira resumida, os diversos estudos e modelos encontrados na literatura para o cálculo das rizezas à torção de vigas de concreto armado em fase elástica linear e fase pós-fissuração. Neste capítulo destaca-se uma das formulações para ser aplicada e a adaptada aos resultados experimentais obtidos na literatura.

No capítulo 4 são relatados e analisados os resultados dos ensaios de 16 vigas de concreto armado, de resistência normal e de alta resistência, solicitadas à torção pura. Esses resultados foram confrontados com a formulação adotada, calculando-se por meio de análise estatística um coeficiente de adaptação, e um expoente para um dos termos da fórmula proposta.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões encontradas, e as sugestões para trabalhos futuros.

Nos Anexos estão as seguintes informações:

- Anexo A – Cálculo da Constante ψ
- Anexo B – Cálculo da Torção

- Anexo C – Cálculo da Rigidez
- Anexo D – Cálculo por meio da derivada para $\phi = 2$
- Anexo E – Cálculo por meio da derivada para $\phi = 1,02$
- Anexo F – Gráficos da Torção
- Anexo G – Gráficos da Rigidez Secante
- Anexo H – Gráficos da Rigidez Tangente
- Anexo I – Gráficos comparativos entre TAVIO e TENG (2004) e modelo proposto

1 TEORIA ELÁSTICA

1.1 NOTAS INICIAIS

O problema da torção em vigas de material homogêneo e isótropo foi resolvido por Saint-Venant em 1853. Contudo, a dificuldade algébrica para se obter expressões para seções transversais genéricas, especialmente as que têm vazados e paredes finas, levou Prandtl a conceber uma teoria em 1903, na qual a equação diferencial de uma membrana sob pressão interna é comparada com a equação diferencial que rege o estudo da torção.

Neste capítulo serão resumidos os principais tópicos dessa teoria, que por sua generalidade leva à dedução das expressões para a torção de tubos de paredes finas, que é o arcabouço do estudo da torção de vigas de concreto estrutural.

1.1. ANALOGIA DA MEMBRANA

A equação da membrana sob pressão interna p é dada por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{s} \quad (1.1)$$

onde

w é a flecha e $w=0$ é a condição de contorno (Figura 1.1),

s é a força axial atuante no extremo da membrana.

$$\phi = \frac{2s}{p} w \quad (1.2)$$

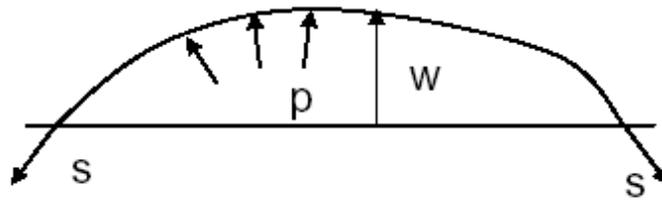


Figura 1.1 – Membrana sob pressão constante.

Para a função de tensões $\phi(x)$ tem-se:

– deslocamentos:

$$u_x = u_x(y, z) \quad (1.3)$$

$$u_y = -z\phi(x) \quad (1.4)$$

$$u_z = y\phi(x) \quad (1.5)$$

– tensões:

$$\sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \phi' y \right) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \phi' z \right) \quad (1.7)$$

Para a equação de equilíbrio tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

$$\sigma_{xy} = G\phi' \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.9)$$

$$\sigma_{xz} = -G\phi' \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.10)$$

onde ϕ é a função de Prandtl.

Das expressões 1.6 e 1.7 tem-se:

$$G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} = -G\phi' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - G\phi' = G\phi' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + G\phi' \quad (1.11)$$

Resolvendo-se essa equação, e considerando-se o tipo de seção transversal da viga seguem-se (Figura 1.2):

– equação de Poisson:

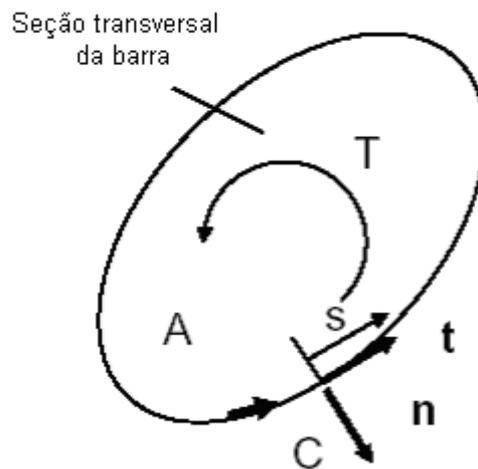
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2 \quad (1.12)$$

– equação de contorno:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = G\phi' \frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad (1.13)$$

onde

$\phi = 0$ – uma constante no contorno C (Figura 1.2).



sendo

A – área;

C – contorno;

s – coordenada ao longo do contorno;

n, t – sistema local de coordenadas.

Figura 1.2 – Parâmetros da seção transversal.

Para o momento de torção *v.s* ângulo de torção por unidade de comprimento resulta:

$$T = G\phi' J_{ef} \quad (1.14)$$

$$J_{ef} = 2 \iint \phi dA \quad (1.15)$$

$$(\sigma_{nt})_{emC} = \frac{T}{J_{ef}} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{emC} \quad (1.16)$$

$$(\tau_{\max})_{emC} = \frac{T}{J_{ef}} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{emC} \quad (1.17)$$

Para o empenamento longitudinal tem-se os seguintes deslocamentos:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\phi' y - \phi' \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \phi' z + \phi' \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.19)$$

então

$$u_x = -\phi' \left(yz + \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dz \right) = \phi' \left(yz + \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dy \right) \quad (1.20)$$

Para o caso particular de uma seção retangular com espessura muito fina (Figura 1.3 e 1.4) seguem-se:

$$\Phi = \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right) \quad (1.21)$$

$$J_{ef} = 2 \int_{y=-t/2}^{y=+t/2} \Phi b dy = \frac{1}{3} bt^3 \quad (1.22)$$

$$\tau_{máx} = \frac{T}{J_{ef}} \left(\mp \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=\pm t/2} = \frac{3T}{bt^2} \quad (1.23)$$

$$u_x = \phi' yz \quad (1.24)$$

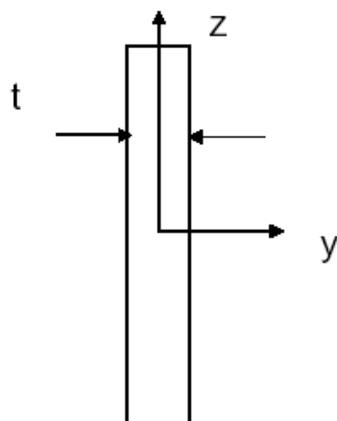
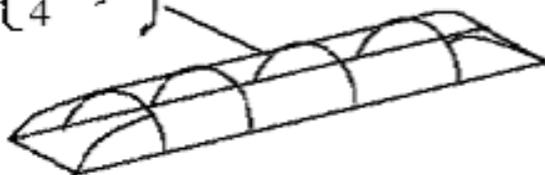
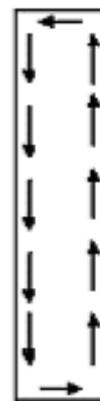


Figura 1.3 – Seção retangular com espessura muito fina.

$$\bar{\Phi} = \left[\frac{t^2}{4} - y^2 \right]$$



(a)



(b)

a) analogia da membrana; b) distribuição de tensões tangenciais.

Figura 1.4 – Seção retangular com espessura muito fina.

Para seções transversais com sollicitação que satisfaça:

$$\oint_{\text{vazado}} du_x = 0 \quad (1.25)$$

tem-se

$$\oint_{\text{vazado}} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds = 2G\phi' A_{\text{vazado}} \quad (1.26)$$

OU

$$\oint_{\text{vazado}} \tau ds = 2G\phi'_{\text{vazado}} \quad (1.27)$$

A condição suplementar para determinar k (Figura 1.5) é dada por:

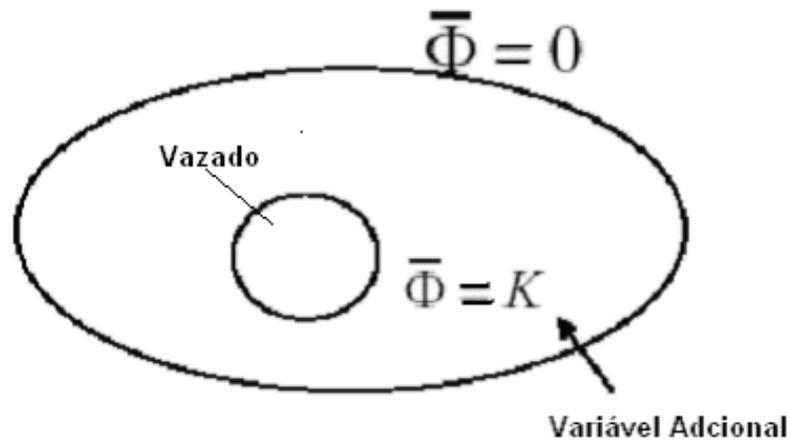


Figura 1.5 – Condições para se resolver o problema da torção por meio da analogia da membrana.

Se a seção tiver mais de um vazado, essa condição adicional é aplicada para cada vazado de modo a se obter as múltiplas variáveis.

Torção para seções vazadas com paredes finas

Usando-se a analogia da membrana (Figura 1.6) tem-se para uma seção vazada de paredes finas:

$$\tau_a = \frac{K_1}{t_a} \quad (1.28)$$

$$\tau_b = \frac{K_1 - K_2}{t_b} \quad (1.29)$$

$$\tau_c = \frac{K_2}{t_c} \quad (1.30)$$

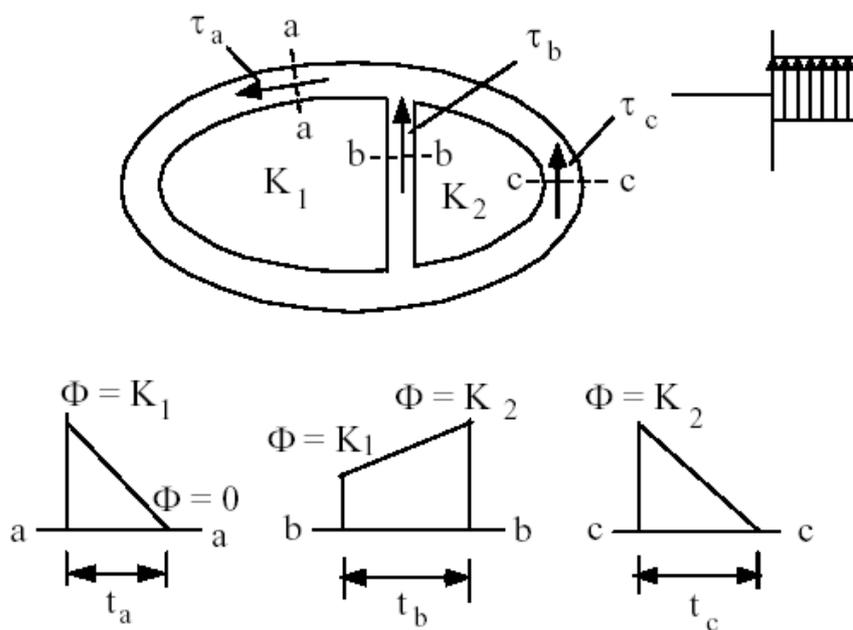


Figura 1.6 – Analogia da membrana para seção vazada de paredes finas.

Os fluxos das tensões tangenciais são dados por (Figura 1.7):

$$q_1 = \tau_a t_a = K_1 \quad (1.31)$$

$$q = q_1 - q_2 = \tau_b t_b = K_1 - K_2 \quad (1.32)$$

$$q_2 = \tau_c t_c = K_2 \quad (1.33)$$

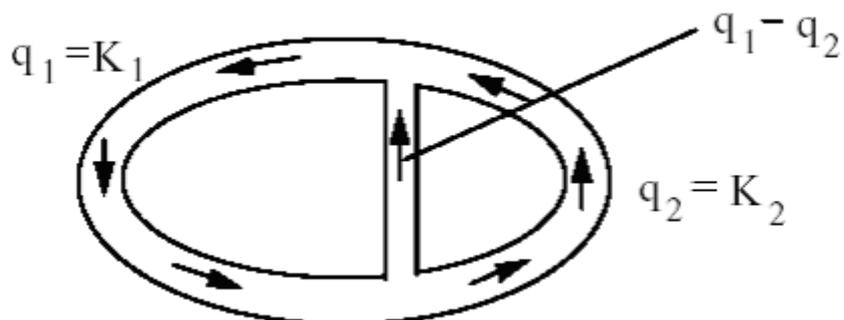


Figura 1.7 – Fluxo de tensões tangenciais em seções celulares de paredes finas.

Nas junções das paredes tem-se que o fluxo das tensões tangenciais que chegam deve ser igual ao fluxo das tensões tangenciais que saem, donde (Figura 1.8):

$$\sum q = 0 \quad (1.34)$$

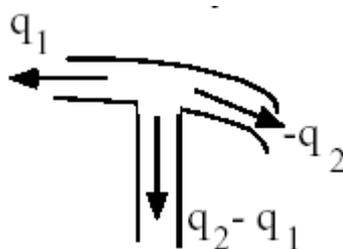


Figura 1.8 – Equilíbrio dos fluxos de tensões tangenciais nas junções de paredes.

Para cada célula tem-se:

$$\oint_{\text{vazado}} \tau ds = 2G\phi' A_{\text{vazado}} \quad (1.35)$$

donde

$$\frac{1}{2G\Omega_i} \oint \frac{q}{t} ds = \phi' \quad (1.36)$$

logo

$$\tau_{máx} = \left(K \frac{q}{t} \right)_{máx} \quad (1.37)$$

O empenamento geralmente é pequeno para seções vazadas fechadas com paredes finas, logo:

$$T = 2\Omega_1 q_1 + 2\Omega_2 q_2 \quad (1.38)$$

$$\phi' = \frac{1}{2G\Omega_1} \oint_{c_1} \frac{q}{t} ds \quad (1.39)$$

$$\phi' = \frac{1}{2G\Omega_2} \oint_{c_2} \frac{q}{t} ds \quad (1.40)$$

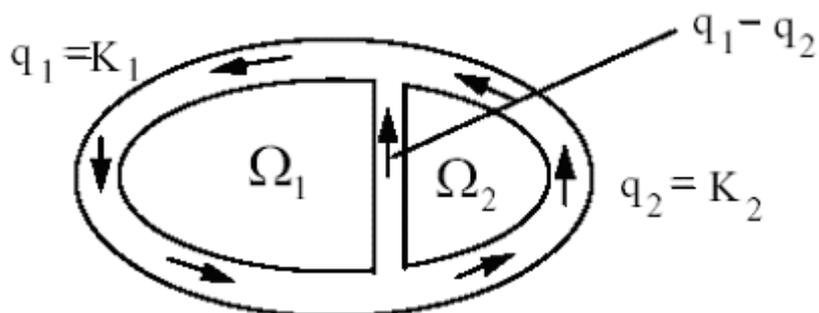


Figura 1.9 – Fluxo de tensões tangenciais nas paredes das células.

Sendo Ω_i a área definida pela seção média das paredes do tubo tem-se para o momento torçor (Figura 1.9):

$$T = \sum_i 2q_i \Omega_i \quad (1.41)$$

Os fluxos dados pelas expressões 1.39 e 1.40 é o fluxo total que ocorre na seção transversal, isto é, $q_1 - q_2$ flui na seção vertical (Figura 1.10).

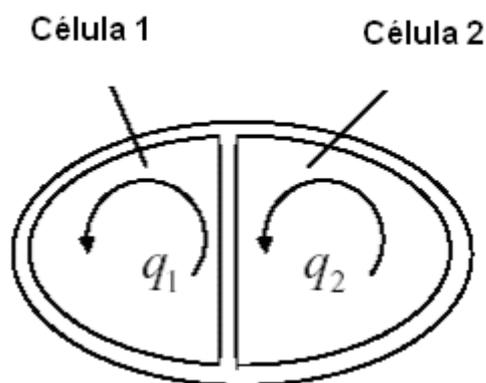


Figura 1.10 – Momentos torçores resistidos pelos fluxos.

Dessa análise tem-se:

- 1) se o momento torçor T é conhecido, então q_1 e q_2 são calculados em termos da variável ϕ' por meio das expressões 1.39 e 1.40. Esses fluxos q_m são então substituídos na expressão 1.38, que é resolvida para a variável ϕ' , sendo completamente determinados;
- 2) se ϕ' é conhecido, as expressões 1.39 e 1.40 podem ser resolvidas diretamente para os valores de q_m , e então a expressão 1.38 é usada para se calcular T .

Para uma seção unicelular tem-se a área Ω (Figura 1.11), donde:

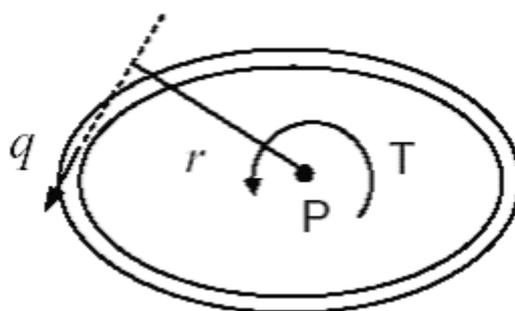


Figura 1.11 – Seção unicelular.

$$T = \oint_c q r \, ds = q \oint_c r \, ds = 2q\Omega \quad (1.42)$$

$$q = \frac{T}{2\Omega} \quad (1.43)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left(\frac{T}{2\Omega t} \right)_{m\acute{a}x} = \frac{T}{2\Omega t_{m\acute{i}n}} \quad (1.44)$$

Admitindo-se que n\~{a}o haja concentra\~{c}o de tens\~{o}es tem-se:

$$\phi' = \frac{1}{2G\Omega} \oint_c \frac{q}{t} \, ds = \frac{T}{4G\Omega^2} \oint_c \frac{ds}{t} \quad (1.45)$$

$$T = GJ_{ef} \phi' \quad (1.46)$$

onde

$$J_{ef} = \frac{4\Omega^2}{\oint_c \frac{ds}{t}} \quad (1.47)$$

A seq\~{u}\~{e}ncia para solu\~{c}o\~{a}o deste problema \~{e} calcular o fluxo q , e com a express\~{a}o 1.46 calcular ϕ' .

Outra sistem\~{a}tica \~{e} dado ϕ' , calcular T com a express\~{a}o 1.46 e q da express\~{a}o 1.43.

A tens\~{a}o tangencial na realidade n\~{a}o \~{e} uniformemente distribu\~{i}da ao longo da espessura da parede do tubo (Figura 1.12).

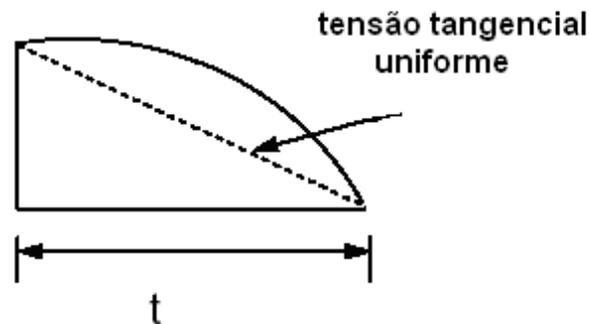


Figura 1.12 – Distribuição das tensões tangenciais na espessura da parede da seção.

A diferença entre a tensão tangencial real e a uniformemente distribuída pode ser corrigida por um fator dado por:

$$J_{ef} = \frac{4\Omega^2}{\oint_c \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \oint_c t^3(s) ds \quad (1.48)$$

Para seções vazadas de paredes finas com abas laterais (Figura 1.13) tem-se a contribuição dessas abas:

$$T = T_c + \sum T_f = G\phi' \left[\frac{4\Omega^2}{\oint_c \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \oint_c t^3 ds + \sum \frac{1}{3} \oint t^3 ds \right] \quad (1.49)$$

onde o primeiro termo

$$J_{ef} = \frac{4\Omega^2}{\oint_c \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \oint_c t^3 ds \quad (1.50)$$

é relativo a seção vazada e

$$J_{ef} = \sum \frac{1}{3} \oint t^3 ds \quad (1.51)$$

é relativo às abas laterais de paredes finas.

Para seção fechada tem-se:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T_c}{2\Omega t_{m\acute{i}n}} \quad (1.52)$$

$$T_c = G\phi'(J_{ef})_{fechada} \quad (1.53)$$

Nas abas laterais tem-se:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left(\frac{T_f t}{(J_{ef})_{aba}} \right)_{m\acute{a}x} \quad (1.54)$$

$$T_f = G\phi'(J_{ef})_{aba} \quad (1.55)$$

donde seguem-se

$$J_{total} = J_f + J_{outros} \quad (1.56)$$

$$T_{total} = T_f + T_{outros} \quad (1.57)$$

onde

$$T_f = G\phi' J_f \quad (1.58)$$

$$T_{outros} = G\phi' J_{outros} \quad (1.59)$$

$$T_{total} = G\phi' J_{total} \quad (1.60)$$

então

$$\frac{T_f}{(J_{ef})_{aba}} = \frac{T_{total}}{(J_{ef})_{total}} = G\phi' \quad (1.61)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left(\frac{T_{total} t}{(J_{ef})_{total}} \right)_{m\acute{a}x} \quad (1.620)$$

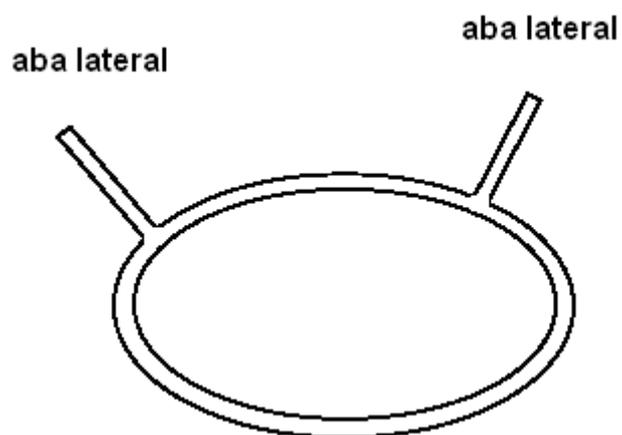


Figura 1.13 – Seção vazada de paredes finas com abas laterais.

2 ANÁLISE À TORÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ESTRUTURAL

2.1 NOTAS INICIAIS

O modelo adotado internacionalmente para torção em vigas de concreto armado é o da Treliça Espacial Generalizada, proveniente do modelo concebido por Ernest Rausch em 1929, cuja generalização originou-se dos trabalhos de Bruno Thürlimman e Paul Lampert no ETH-Zürich. Esse modelo é fundamentado na Teoria da Plasticidade.

A norma ACI-318/2002, desde sua versão de 1995, passou a adotar o modelo da Treliça Espacial Generalizada.

As novas prescrições normativas brasileiras para dimensionamento de vigas de concreto admitem este modelo, em total concordância com o modelo da treliça para análise da resistência à força cortante, mencionando a flexo-torção, e prescrevendo uma metodologia simplificada para sua consideração. (SÁNCHEZ, 1999).

2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE TORÇÃO

2.2.1 Torção de SAINT-VENANT

Este tipo de torção subdivide-se em torção de equilíbrio e torção de compatibilidade.

A torção de equilíbrio é indispensável ao equilíbrio e estabilidade da viga, e pode levar a uma ruptura brusca se não for adequadamente analisada (Figura 2.1).

A torção de compatibilidade é aquela na qual o momento torçor provém dos efeitos de coação. Segundo a NBR 6118/2003 esse tipo de torção pode ser

desprezado no dimensionamento adotando-se uma armadura mínima. O ACI 318/2003 prescreve uma sistemática para esse cálculo.

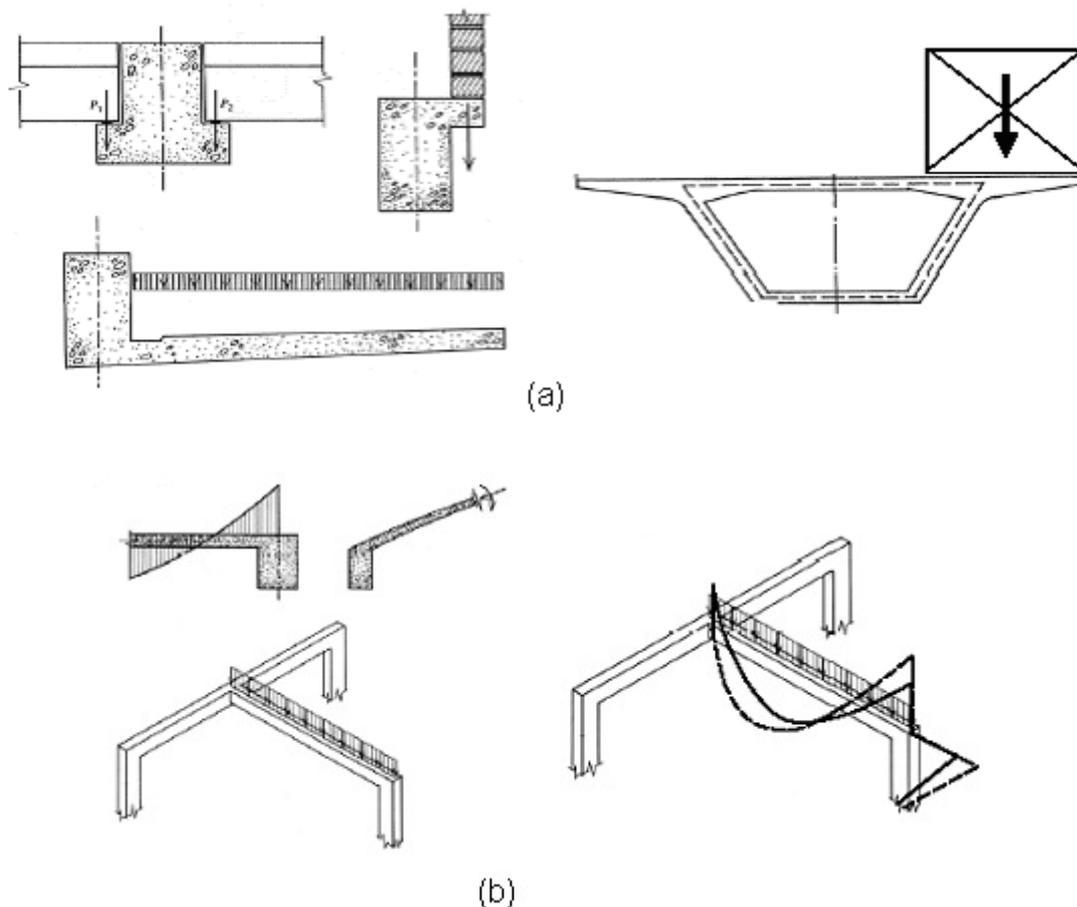


Figura 2.1 – Tipos de torção: a) torção de equilíbrio; b) torção de compatibilidade; adaptada de PARK e PAULAY (1975).

2.2.2 Torção de VLASSOV

A torção de Vlassov ou Flexo-torção é comum em perfis de hastes de paredes delgadas, podendo ser admitida como uma flexão horizontal de dois trechos paralelos da seção em sentidos opostos (Figura 2.2).

Esse tipo de torção não será estudado neste trabalho.

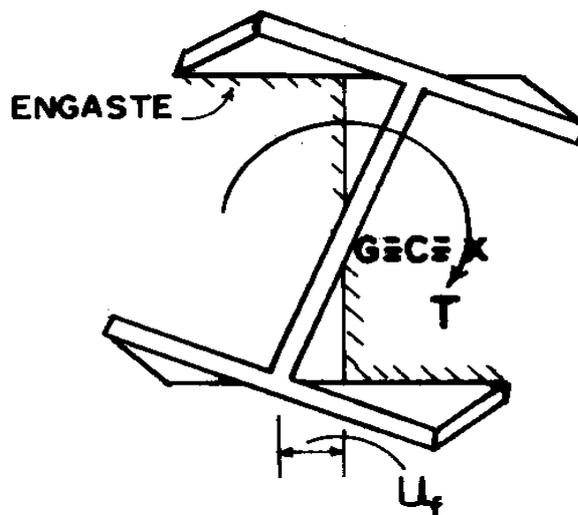


Figura 2.2 – Empenamento de uma viga com seção I devido à Torção de Vlasov; adaptada de NAWY (1985).

2.3 TEORIAS SOBRE TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ESTRUTURAL

2.3.1 Seção Circular

Na seção circular essa permanece inalterada após a deformação de torção (Figura 2.3), e não há empenamento da seção, isto é, a seção permanece plana após a deformação. Seguindo-se o formulário para esse caso:

– tensão cisalhante:

$$\tau = G\theta = \frac{TR}{J_p} \quad (2.1)$$

– distorção da seção:

$$\gamma = R\theta \quad (2.2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3)$$

onde

T – momento torçor;

R – raio da seção;

θ – ângulo de torção por unidade de comprimento;

G – módulo de elasticidade transversal;

E – módulo de elasticidade longitudinal;

ν – coeficiente de Poisson;

J_p – momento de inércia polar da seção.

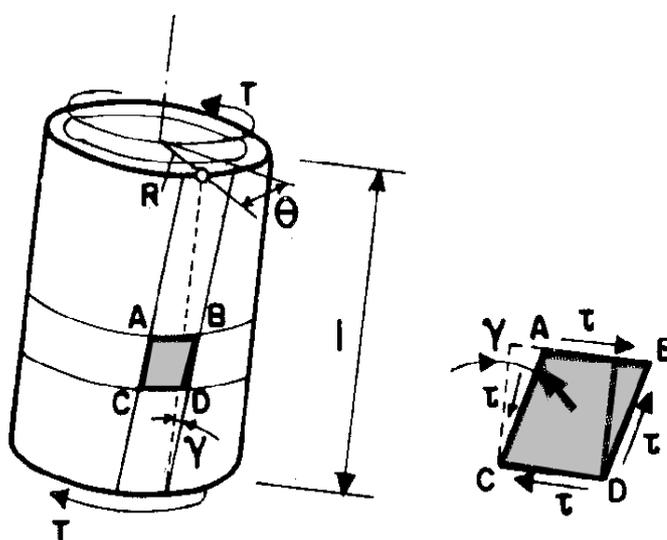


Figura 2.3 – Seção circular; adaptada de SÁNCHEZ (1999).

2.3.2 SEÇÃO RETANGULAR

Utilizando-se o método semi-inverso da Teoria da Elasticidade, Barré de Saint-Venant obteve a solução para o problema da torção em seções não circulares (Figura 2.4). Esta teoria pode ser resumida por meio das seguintes expressões aplicáveis à seções retangulares:

– tensão tangencial máxima:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{\alpha y x^2} \quad (2.4)$$

– distorção da seção:

$$\gamma = \frac{T \ell}{\beta y x^2 G} \quad (2.5)$$

onde α, β são coeficientes adimensionais (Tabela 2.1), x, y são a menor e maior dimensão da seção transversal, respectivamente, e ℓ é o comprimento da viga.

Tabela 2.1 – Coeficientes adimensionais.

y/x	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

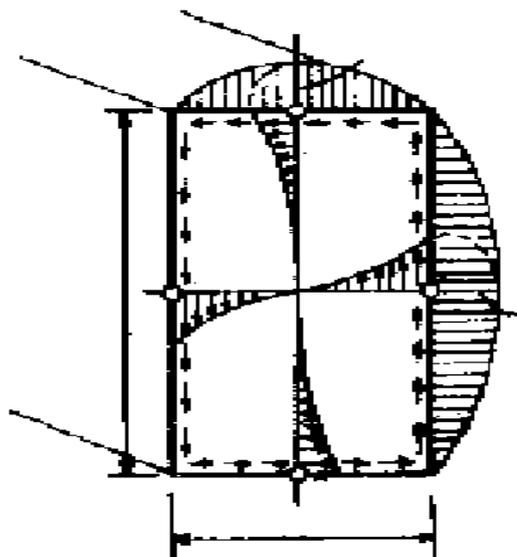


Figura 2.4 – Seção retangular; adaptada de SÁNCHEZ (1999).

2.3.3 SEÇÕES GENÉRICAS

Para seções genéricas utiliza-se a analogia de Prandtl para a obtenção de expressões do momento torçor. Essa analogia admite o regime elástico linear (lei de Hooke).

A analogia de Nadai foi, de modo análogo à analogia de Prandtl, aplicada às seções plastificadas à torção. Essa concepção é denominada de analogia do monte de areia, diferindo-se da anterior devido a inclinação constante da tangente à função $\Psi(x, y)$ ao longo da seção, pois admite a plastificação total da mesma (Figura 2.5).

As condições de contorno para a função $\Psi(x, y)$ permitem concluir que $\Psi(x, y) = 0$ na extensão da superfície lateral, sendo o momento torçor dado por:

$$T = 2 \iint \Psi(x, y) dx dy \quad (2.6)$$

Para seções em forma de **I, T, L, U, π** , é usual adotar a formulação de Bach para o cálculo da constante de torção. Essa formulação relaciona o momento torçor e a tensão cisalhante. As hipóteses básicas dessa formulação são:

- a) a espessura x_i de cada parede do perfil é pequena face as suas demais dimensões;
- b) a forma da seção transversal não se altera quando da deformação de torção, o que corresponde a se admitir que o ângulo de torção é constante para todos os componentes do perfil.

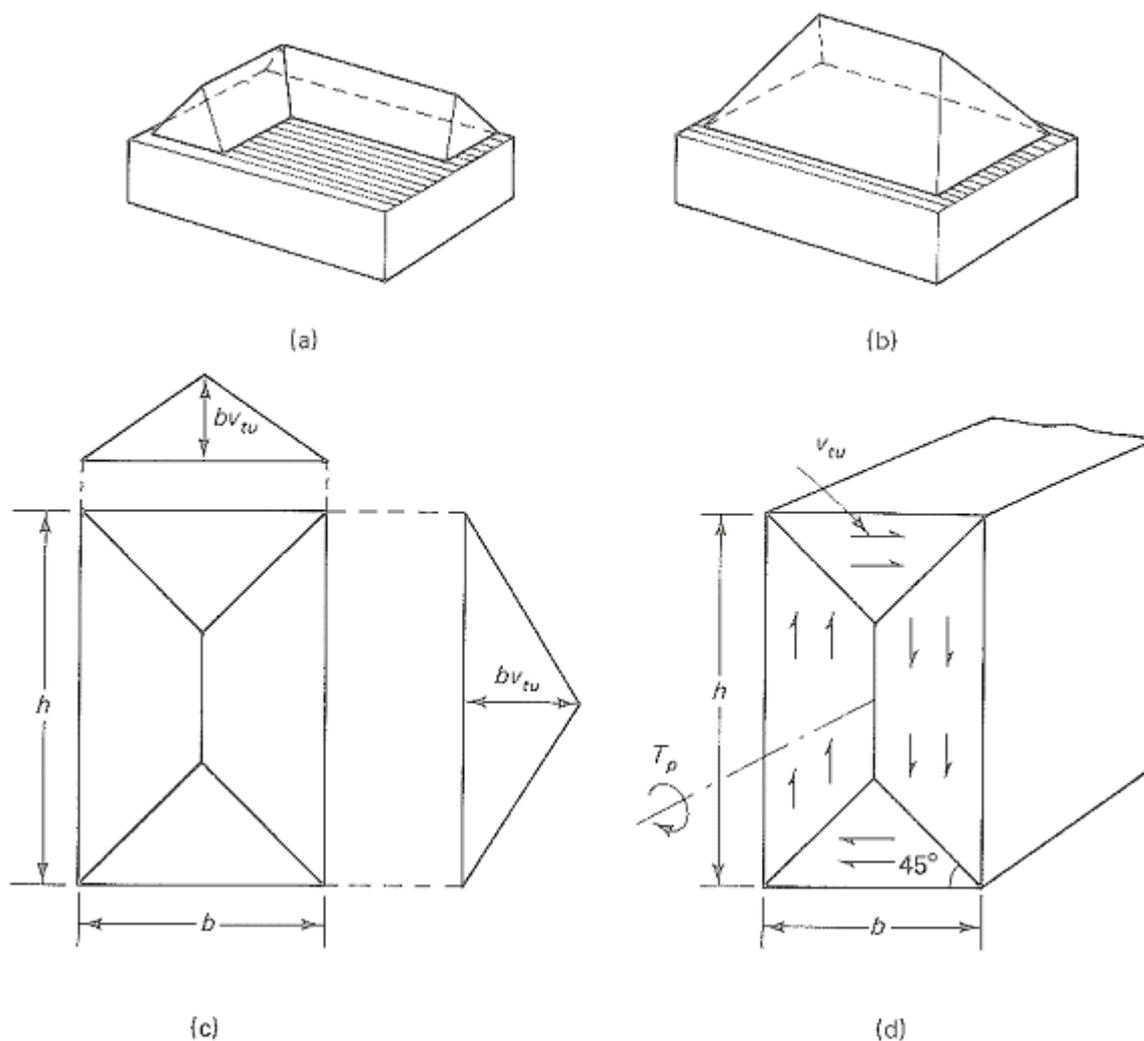


Figura 2.5 – Analogia do monte de areia; adaptada de CHEN & LUI (1987).

Dessa análise tem-se:

$$T = G\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} x_i^3 y_i \quad (2.7)$$

sendo $x_i \ll l$, onde l é o comprimento da viga, e $x_i \ll y_i$, onde y_i é a altura do retângulo genérico que compõe a seção.

Para o momento de inércia à torção da seção tem-se:

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} x_i^3 y_i \quad (2.8)$$

Para a rigidez à torção tem-se:

$$C = G J_t \quad (2.9)$$

seguinto-se

$$\theta = \frac{T}{C} \quad (2.10)$$

$$\tau = \frac{T x_{m\acute{a}x}}{C} \quad (2.11)$$

onde $x_{m\acute{a}x}$ é a largura máxima de um dos retângulos que formam a seção.

2.3.4 TEORIA DE BREDT

Os ensaios realizados em vigas de concreto estrutural com seção maciça, mostram que essas se comportam como “vigas vazadas” com paredes de pequena espessura, daí a importância do estudo da Teoria de Bredt e sua adaptação aos modelos de cálculo de vigas executadas com esse material. A Figura 2.6 mostra os parâmetros básicos dessa formulação.

Segundo a Teoria de Bredt a tensão cisalhante proveniente do fluxo das tensões existentes ao longo da linha média do perfil é tangente à parede externa do perfil. Por meio das equações de equilíbrio tem-se a 1ª fórmula de Bredt:

$$\tau = \frac{T}{2A_0t} \quad (2.12)$$

onde

τ – tensão cisalhante;

T – momento torçor;

A_0 – área definida pela linha média do perfil;

t – espessura da parede do tubo.

A 2ª fórmula de Bredt é dada por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{2A_0G} \phi \frac{ds}{t} \quad (2.13)$$

onde

ϕ – ângulo de torção;

G – módulo de elasticidade transversal;

ds – elemento de comprimento ao longo da linha média do perfil.

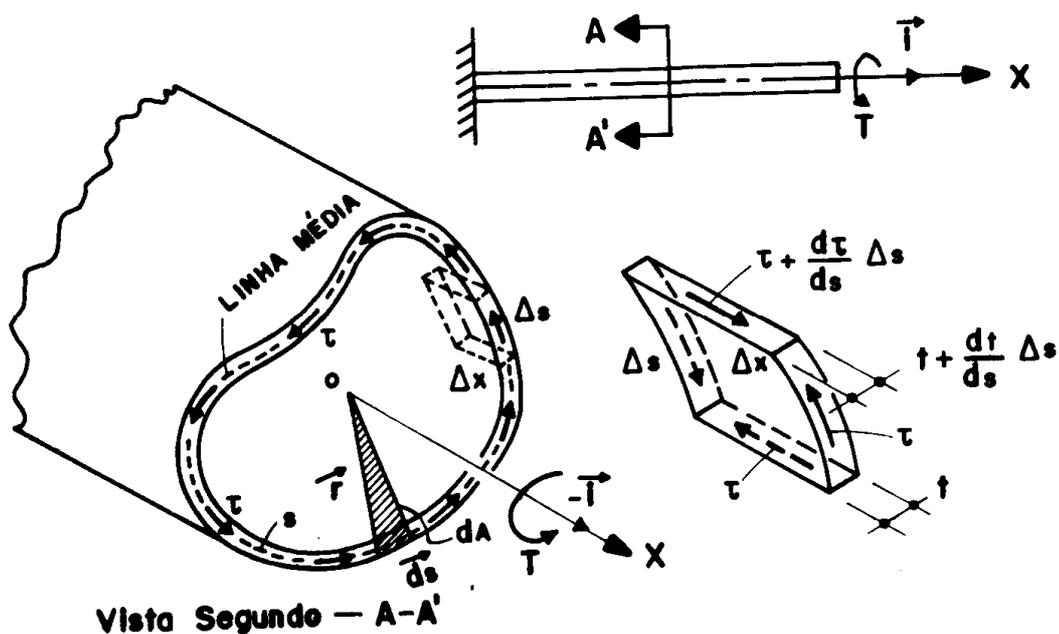


Figura 2.6 – Teoria de Bredt para tubos de paredes finas; adaptada de SÁNCHEZ (1999).

2.4 COMPORTAMENTO MECÂNICO DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS Á TORÇÃO

“O comportamento mecânico das vigas de concreto armado cuja armação é composta somente de armadura longitudinal, apresenta a

curva $T \times \theta$ exibindo um comportamento frágil, pois após o início da fissuração tem-se a ruptura da mesma.

Para valores inferiores ao momento torçor de fissuração T_{cr} , o delineamento da curva é similar ao das peças de concreto simples, não apresentando a armadura longitudinal qualquer acréscimo ponderável na resistência da peça à solicitação de torção. Para vigas com pequena taxa de armadura longitudinal, a ruptura pode ocorrer imediatamente após atingir-se o torçor de fissuração. Vigas com armadura longitudinal de grande monta apresentam resistência a ruptura da ordem de 15% superior ao momento torçor de fissuração.

Conclui-se que a armadura longitudinal é inútil, indiferentemente de sua posição na seção transversal da peça, nos cantos ou distribuídas nas faces (Figura 2.7). A Figura 2.7 transcrita de HSU (1984) realça o comportamento de vigas com diferentes taxas volumétricas de armadura total $\rho = \rho_l + \rho_t$, ressaltando-se que a rigidez à torção CG é pouco influenciada pelo aumento da taxa geométrica total da armadura" (SÁNCHEZ, 1999).

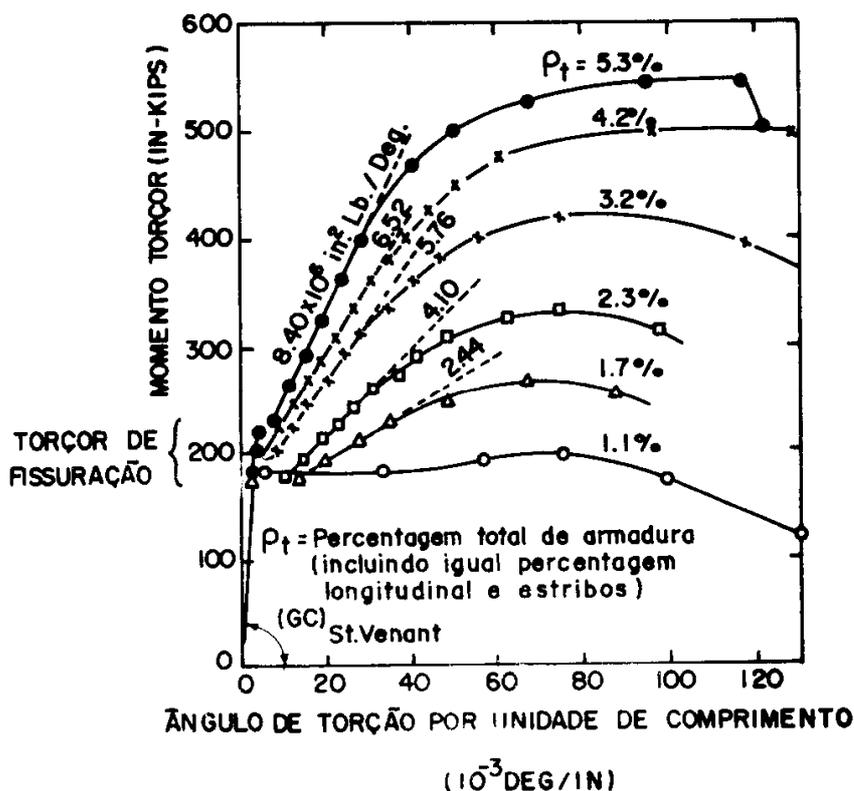


Figura 2.7 – Ângulo de torção por unidade de comprimento (10^{-3} deg. /In); adaptada de HSU (1984).

2.5 MODELO DA TRELIÇA ESPACIAL GENERALIZADA

“O modelo da Treliza Espacial Generalizada é adotado pela NBR-6118/2003, sendo a análise e o dimensionamento à torção efetuados no estado Limite Último, aplicável a concretos de resistência normal, ou seja, concretos com $20MPa \leq f_{ck} \leq 50MPa$, que contempla a torção uniforme (torção de equilíbrio e torção de compatibilidade), e flexo-torção (torção com empenamento da seção).

A Treliza Espacial Generalizada é uma concepção mais geral do modelo original de Ernest Rausch para o dimensionamento de vigas de concreto armado solicitadas à torção.

Esse modelo foi desenvolvido na Suíça por Bruno Thürlimam e Paul Lampert, e recebeu consideráveis contribuições dos pesquisadores da Universidade de Toronto, onde Michael Collins e seus colaboradores, desenvolveram o modelo denominado Campo da Compressão Diagonal Modificado, que se aplica ao dimensionamento e análise de vigas de concreto estrutural solicitadas à torção e esforços combinados (COLLINS e MITCHELL, 1980).

A Figura 2.8 ilustra o conceito básico do modelo da treliza para torção pura, onde a seção transversal da viga é admitida como funcionando de modo similar a um tubo de paredes finas, onde se tem um fluxo de tensões tangenciais resistidas pelas armaduras transversais e longitudinais da seção. As fissuras nos painéis são inclinadas de um ângulo θ , o ângulo de inclinação das tensões de compressão nas bielas ” (SÁNCHEZ,1999).

Nesse modelo o fluxo de tensões obtido por meio da Teoria de Bredt é dado por:

$$q = \tau t = \frac{T}{2A_0} \quad (2.14)$$

onde

A_0 – área da seção contida entre as seções médias dos painéis.

O modelo da Treliza Espacial Generalizada é uma associação da Teoria de Bredt com o modelo do painel fissurado, que é a formulação básica do modelo da treliza plana para análise da força cortante (Figura 2.8).

O equilíbrio das forças longitudinais dos painéis que formam a seção fornece:

$$R_e = \sum A_{sl} f_{yl} = \frac{T u}{2 A_0} \cot g \alpha \quad (2.15)$$

$$u = 2(x_1 + y_1) \quad (2.16)$$

onde

A_{sl} – área das barras longitudinais;

f_{yl} – tensão de escoamento do aço que constitui as armaduras;

x_1 e y_1 – distâncias tomadas de eixo a eixo das barras longitudinais;

α – ângulo de inclinação das bielas;

A_0 – área da seção contida entre as seções médias dos painéis.

Para as forças de tração atuantes nos tirantes verticais tem-se:

$$B_k = A_{st} f_{yt} = q s t g \alpha \quad (2.17)$$

onde

A_{st} – área de escoamento do aço que compõe os estribos;

f_{yt} – tensão de escoamento do aço que compõe os estribos;

s – espaçamento dos estribos.

Combinando-se as expressões 2.15 e 2.17 tem-se o ângulo de inclinação das bielas dado por:

$$t g \alpha = \sqrt{\frac{A_{st} f_{yt}}{A_{sl} f_{yl}} \cdot \frac{u}{s}} \quad (2.18)$$

Eliminando-se o ângulo α na expressão 2.18 tem-se para o momento torçor resistente:

$$T = 2 A_0 \sqrt{\frac{A_{st} f_{yt} A_{sl} f_{yl}}{u s}} \quad (2.19)$$

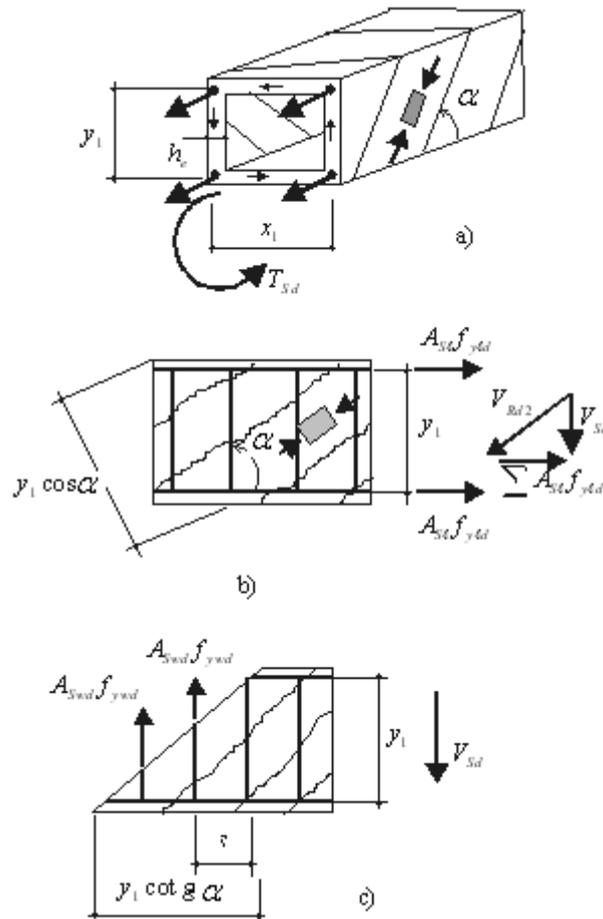


Figura 2.8 – Modelo da Treliza Espacial Generalizada: a) viga suposta funcionando como um tubo de paredes finas; b) painel fissurado solicitado por uma força proveniente do fluxo de tensões tangenciais; c) tirantes compostos pelos estribos verticais; adaptada de HSU (1984).

2.6 PRESCRIÇÕES DA NBR-6118/2003

2.6.1 Torção de equilíbrio

2.6.1.1 Introdução

Admite-se para a inclinação das bielas flexo-comprimidas o intervalo $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$.

O momento torçor aplicado será resistido por estribos verticais fechados e pela armadura longitudinal distribuída ao longo do perímetro efetivo da seção.

O dimensionamento à torção de equilíbrio deve atender às seguintes condições:

$$T_{sd} \leq T_{Rd,2} \quad (2.20)$$

$$T_{sd} \leq T_{Rd,3} \quad (2.21)$$

$$T_{sd} \leq T_{Rd,4} \quad (2.22)$$

onde

T_{sd} – momento torçor solicitante de projeto;

$T_{Rd,2}$ – momento torçor resistido pelas bielas flexo-comprimidas;

$T_{Rd,3}$ – momento torçor resistido pela armadura transversal;

$T_{Rd,4}$ – momento torçor resistido pela armadura longitudinal.

2.6.1.2 Espessura equivalente da parede da seção

Para seções maciças ou compostas de retângulos admite-se que essas se comportem como um tubo de paredes finas, possibilitando a aplicação da Teoria de Bredt, definindo-se uma espessura equivalente para a parede desses tubos.

A espessura equivalente é dada por:

$$h_e \leq \frac{A}{u} \quad (2.23)$$

onde

A – área da seção maciça;

u – perímetro da seção maciça.

A espessura equivalente deve atender ao seguinte limite:

$$h_e \geq 2c_1 \quad (2.24)$$

onde

c_1 – distância entre o eixo da armadura longitudinal e a face da seção (Figura 2.9).

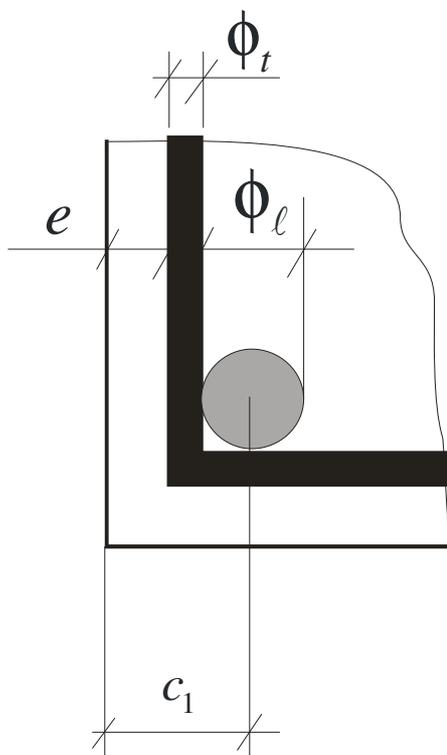


Figura 2.9 – Parâmetros da seção retangular.

Para seções vazadas tem-se:

$$h_e \leq \frac{A}{u} \quad (2.25)$$

$$h_e \leq h_{real} \quad (2.26)$$

Para seções compostas de retângulos têm-se as parcelas do momento torçor solicitante distribuídas em função de sua rigidez elástica, dada por:

$$T_{sdi} = T_{sd} \frac{a_i^3 b_i}{\sum a_i^3 b_i} \quad (2.27)$$

onde

a_i – menor lado do retângulo genérico;

b_i – maior lado do retângulo genérico.

2.6.1.3 Verificação da resistência das bielas

Este parâmetro consta do Eurocode 2 (1992) e foi adaptado para a NBR 6118/2003 de forma inadequada. O Eurocode 2 (1992) fornece as seguintes expressões para o fator de efetividade do concreto:

a) força cortante:

$$v = 0,7 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0,50 \quad (2.28)$$

b) torção:

$$\nu = 0,7 \left(0,7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \geq 0,35 \quad (2.29)$$

com f_{ck} em MPa.

Como a biela é flexo-comprimida aplica-se uma redução de 30% no valor do fator de efetividade para a torção. Para o dimensionamento à força cortante a biela é comprimida.

A biela flexo-comprimida se deforma e assume a configuração de uma superfície de dupla curvatura (parabolóide hiperbólico).

A NBR-6118/2003 prescreve para o fator de efetividade do concreto para a força cortante e torção somente uma expressão:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (2.30)$$

com f_{ck} em MPa.

O Modelo da Treliza Clássica para a força cortante fornece a resistência da biela comprimida:

$$V = 0,5 \sigma_c z b_w \quad (2.31)$$

onde

z – braço de alavanca interna;

σ_c – resistência à compressão do concreto.

A NBR-6118/2003 prescreve para a força cortante resistida pelas bielas:

$$V_{Rd2} = 0,27\alpha_{V2}f_{cd}b_w d \quad (2.32)$$

$$\sigma_c = \alpha_{V2}f_{cd} \quad (2.33)$$

$$z = 0,54d \quad (2.34)$$

sendo d a altura útil da seção.

Para a Treliça Generalizada tem-se:

$$V_{Rd2} = 0,54\alpha_{V2}f_{cd}b_w d \sin^2 \alpha (\cot g \beta + \cot g \alpha) \quad (2.35)$$

sendo β o ângulo de inclinação da armadura transversal.

Com o Modelo da Treliça Espacial Generalizada tem-se as seguintes expressões:

$$T = \sigma_c 2A_0 h_e \cos \alpha \sin \alpha \quad (2.36)$$

$$\sigma_c = \alpha_{V2}f_{cd} \quad (2.37)$$

$$A_0 = A_e \quad (2.38)$$

A NBR-6118/2003 prescreve:

$$T_{Rd,2} = 0,50\alpha_{V2}f_{cd}A_e h_e \sin 2\alpha \quad (2.39)$$

2.6.1.4 Armaduras mínimas

As taxas geométricas das armaduras longitudinal e transversal são dadas no item 17.5.1.2 da NBR-6118/2003 que fornece as seguintes expressões:

$$\rho_{sl} = \rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w s} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (2.40)$$

$$f_{ctm} = 0,3\sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (2.41)$$

onde

A_{sw} – área da armadura transversal composta de estribos verticais;

b_w – largura da seção;

s – espaçamento longitudinal dos estribos;

f_{ywk} – tensão de escoamento do aço da armadura transversal;

f_{ctm} – resistência média à tração direta do concreto.

Os valores de f_{ck} das expressões 2.40 e 2.41 são dados em MPa.

Ao se considerar cada face do elemento como um painel fissurado, tem-se para a largura dos painéis a espessura equivalente do tubo de paredes finas da Teoria de Bredt:

a) taxa geométrica da armadura longitudinal:

$$\rho_{sl} = \frac{a_{sl}}{h_e} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{y\ell k}} \quad (2.42)$$

b) taxa geométrica da armadura transversal:

$$\rho_{sw} = \frac{a_{sw}}{h_e} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (2.43)$$

O momento torçor último é influenciado pela taxa volumétrica de armadura total da seção, que é dada pela soma da armadura transversal e armadura longitudinal:

$$\rho_{total} = \rho_w + \rho_\ell = \frac{A_{90}u_e}{A_e s} + \frac{A_{s\ell} s}{A_e s} \quad (2.44)$$

onde ρ_ℓ e ρ_w são as taxas volumétricas.

Segundo HSU (1984) o volume do trecho da viga é dado por:

$$V = A_e s \quad (2.45)$$

Os ensaios realizados por HSU (1984) mostram que a taxa volumétrica total deve ser superior a 1%, para garantir a ductilidade das vigas, e desse modo evitar que a ruptura ocorra logo após o momento torçor de fissuração. Concluindo-se que o momento torçor de ruptura deverá ser pelo menos 20% superior ao momento torçor de fissuração.

Quando a relação entre o comprimento do elemento e sua altura h for menor do que $2h$, ocorrem perturbações de tensões, portanto, deve-se adotar a armadura mínima prescrita, sendo a força cortante resistida pela biela limitada a $V_{sd} \leq 0,7V_{Rd2}$, e desse modo garantir um comportamento plástico para esse elemento.

2.6.1.5 Armadura longitudinal

Com o Modelo da Trelça Espacial tem-se para a área da armadura longitudinal total, distribuída ao longo do perímetro equivalente da seção:

$$A_{s\ell} = \frac{T_{sd} u_e}{2A_e f_{y\ell d}} \cot g\alpha \quad (2.46)$$

onde

$f_{y\ell d}$ – tensão de escoamento do aço da armadura longitudinal;

A_e – área da seção efetiva;

u_e – perímetro da seção efetiva.

Adotando-se uma área da armadura longitudinal por unidade de comprimento tem-se:

$$a_{s\ell} = \frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{sd}}{2A_e f_{yld}} \cot g\alpha \quad (2.47)$$

A expressão 2.47 mostra que a distribuição das barras longitudinais se dá ao longo do perímetro dos estribos, e deve atender aos seguintes limites:

$$s_\ell = 350 \text{ mm} \quad (2.48)$$

$$s_\ell = 0,7d \quad (2.49)$$

sendo s_ℓ o espaçamento medido eixo a eixo das barras longitudinais. A altura útil d pode ser assumida como a distância y_1 (Figura 2.10).

Essas limitações buscam evitar a abertura excessiva das fissuras.

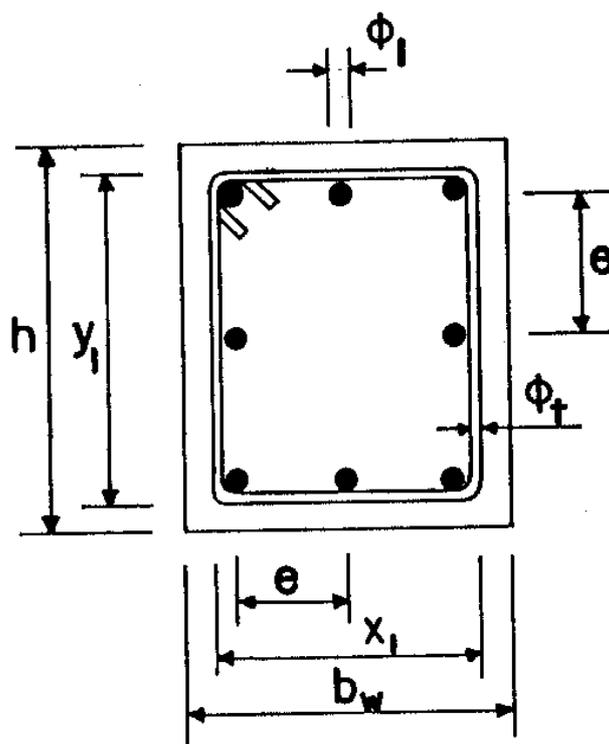


Figura 2.10 – Parâmetros da seção retangular; adaptada de SÁNCHEZ (1999).

2.6.1.6 Armadura transversal

A expressão fornecida pelo Modelo da Treliça Espacial para a área dos estribos por unidade de comprimento é dada por:

$$a_{sw} = \frac{A_{90}}{s} = \frac{T_{sd}}{2A_e f_{ywd}} \operatorname{tg} \alpha \quad (2.50)$$

onde

s – espaçamento dos estribos;

A_{90} – área de um tramo do estribo vertical;

f_{ywd} – tensão de escoamento do elo da armadura transversal.

Após alteração da notação usada na definição das armaduras mínimas onde foi adotado A_{sw} tem-se:

$$A_{s\ell} = \left(\frac{A_{90}}{s} \right) u_e \left(\frac{f_{ywd}}{f_{yld}} \right) \cot g^2 \alpha \quad (2.51)$$

Essa expressão relaciona as armaduras transversal e longitudinal com a inclinação da biela.

A prescrição $f_{ywd} \leq 435 \text{MPa}$ para os estribos de torção tem como intuito limitar as aberturas das fissuras.

2.6.1.7 Flexão e torção

As solicitações combinadas de torção e flexão, simples ou composta, são dimensionadas separadamente, calculando-se cada uma das armaduras, e somando-se as armaduras tracionadas na flexão com as armaduras longitudinais de torção da mesma região.

A NBR-6118/2003 prescreve que no banzo comprimido à flexão pode-se reduzir a armadura de torção em função das solicitações de compressão que atuam na espessura efetiva h_e do Modelo da Treliza Espacial Generalizada.

Na zona comprimida devida à flexão deve-se manter a maior das armaduras, a armadura de flexão ou a armadura de torção.

A resistência máxima do concreto não deve superar $0,85f_{cd}$ tal como na teoria da flexão. A solicitação de torção em conjunto com solicitações normais origina um estado plano de tensões. Neste cálculo deve-se considerar as tensões tangenciais provenientes da torção:

$$\tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e h_e} \quad (2.52)$$

2.6.1.8 Força cortante e torção

As solicitações combinadas de força cortante e torção devem ser analisadas admitindo-se o mesmo ângulo de inclinação para as bielas, de modo a se manter a consistência do modelo adotado.

A resistência da biela para a solicitação concomitante de força cortante e torção deve atender à seguinte expressão (Figura 2.11):

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \quad (2.53)$$

onde V_{sd} e T_{sd} são os valores das solicitações de cálculo.

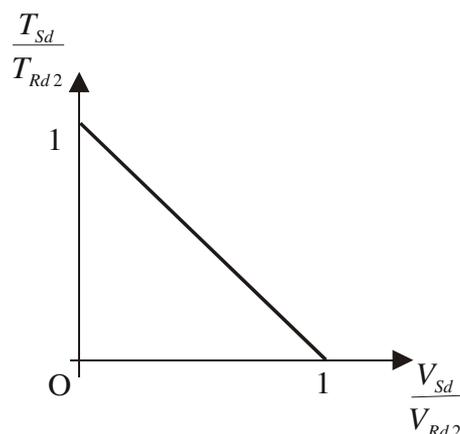


Figura 2.11 – Interação entre a força cortante e o momento torçor em seções maciças e vazadas de acordo com a NBR 6118/2003.

2.6.1.9 Detalhamento

“As armaduras transversal e longitudinal devem ser minuciosamente estudadas e distribuídas, para garantir o efetivo funcionamento da seção como concebido no modelo da Treliça Espacial Generalizada.

Após a fissuração o equilíbrio interno das forças atuantes nos estribos e nas bielas origina um sistema mecânico que tente expulsar o capeamento do concreto junto às arestas da seção. Isto ocorre com o aumento da sollicitação até o torçor de ruptura.

Essa fragmentação afeta o torçor de fissuração, sendo que um maior cobrimento de armadura aumenta o valor do torçor de fissuração.

Para evitar uma ruptura local nos vértices das seções, os estribos devem ser colocados perpendicularmente ao eixo da viga, ancorados com ganchos dobrados a 45°. Deve-se adotar um comprimento mínimo de ancoragem igual a $16\phi_t$, e um raio de dobramento mínimo igual a $6\phi_t$ ” (SÀNCHEZ, 2004).

Os diâmetros dos estribos devem ter:

- a) $\phi_t \geq 5 \text{ mm}$, $\phi_t \leq 0,1b_w$;
- b) $\phi_t \leq 12 \text{ mm}$ para barras lisas;
- c) $\phi_t \leq 4,2 \text{ mm}$ para telas soldadas.

A força resistida pela biela V_{Rd2} deve atender aos seguintes limites:

$$\text{a) } V_{sd} \leq 0,67V_{Rd2} \Rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,6d \leq 300 \text{ mm};$$

$$\text{b) } V_{sd} > 0,67V_{Rd2} \Rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,3d \leq 200 \text{ mm}.$$

Na normalização internacional têm-se as seguintes prescrições:

$$s \leq \frac{u_e}{8} \quad (2.54)$$

$$s \leq 300 \text{ mm} \quad (2.55)$$

A armadura longitudinal tradicional deve ser bem ancorada.

A Figura 2.12 ilustra a transferência de uma parcela da força de compressão da biela para a armadura longitudinal num painel que compõe a seção, a qual é empurrada para fora (*spalling*). Isso pode ser evitado por meio da adoção de uma rigidez adequada para as barras longitudinais adotando-se $\phi_{\min} \geq 10 \text{ mm}$.

A armadura $a_{sl} = \frac{a_{sl}}{u_e}$ deve ser distribuída uniformemente ao longo do perímetro interno dos estribos, com pelo menos uma barra em cada vrtice da seção poligonal, com espaçamento entre as barras de $s_l \leq 350 \text{ mm}$.

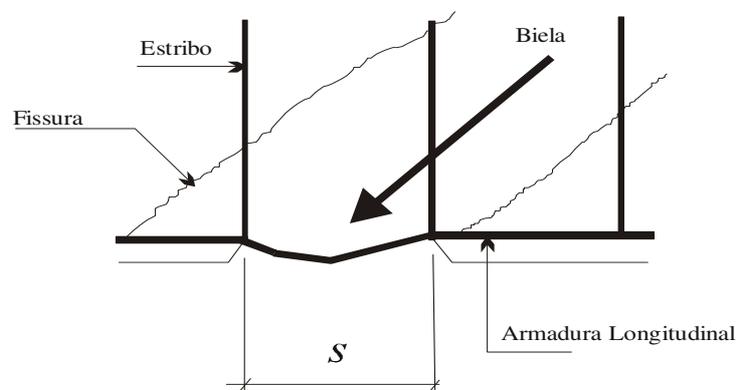


Figura 2.12 – Transferência da força da biela num painel que compõe a seção para a armadura longitudinal; adaptada de SÁNCHEZ (2004).

2.6.2 Torção em perfis abertos de paredes finas

A NBR-6118/2003 prescreve para as vigas de concreto estrutural com seção em perfis abertos de paredes finas, que as mesmas devem ser não dimensionadas à torção uniforme ou à flexo-torção. Para a rigidez à torção uniforme após a fissuração prescreve:

$$(GJ_T)_{CR} = 0,15GJ_T \quad (2.56)$$

onde

GJ_T – rigidez à torção;

J_T – momento de inércia à torção;

G – módulo de elasticidade transversal do material.

Para a solicitação de flexo-torção a NBR-6118/2003 prescreve uma rigidez para a fase fissurada igual a 50% da rigidez na fase elástica-linear (SÁNCHEZ, 1999).

Os perfis de paredes opostas, compostos de seções em **I**, **Z**, π , têm a rigidez à torção uniforme em regime elástico dada por:

$$GJ_T = \frac{T}{\alpha} \quad (2.57)$$

$$\alpha = \frac{a_1 + a_2}{z} \quad (2.58)$$

onde

T – momento de torção;

α – rotação da seção produzida pela flexão;

a_1 – flecha oriunda da parede 1 devida à força $F = \frac{T}{z}$;

a_2 – flecha na parede 2 devida à força $F = \frac{T}{z}$;

z – distância entre os eixos das paredes.

Para o cálculo das flechas adota-se 50% da rigidez elástica das paredes, onde b_f é a largura de colaboração associada a cada parede (Figura 2.13).

A resistência à flexo-torção é calculada por meio das resistências à flexão das paredes opostas, seguindo-se:

$$T_{Rd} = \Delta F_{Rd, \min} z \quad (2.59)$$

$$\Delta F_{Rd, \min} = (F_{Rd} - F_{sd})_{\min} \quad (2.60)$$

onde

F_{Rd} – força transversal;

F_{sd} – parcela da força transversal total aplicada.

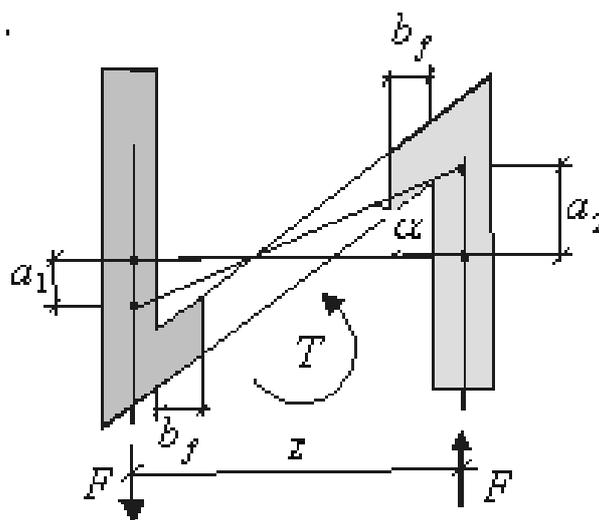


Figura 2.13 – Flexo-torção de perfis abertos de paredes finas; adaptada da norma NBR 6118/2003.

2.6.3 Considerações finais

A NBR 6118/2003 não apresenta expressões ou recomendações detalhadas para a rigidez à torção. Não menciona a variação dessa rigidez nos estágios elástico linear e fissurado.

Observa-se que sob esse aspecto falta à normalização brasileira, que está fundamentada no Eurocode 2 (1992), prescrições que permitam uma abordagem consistente da análise das deformações em vigas sujeitas à torção.

3 RIGIDEZ À TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

3.1 NOTAS INICIAIS

O ACI 318/2002 adotou em sua versão de 1995 o modelo da Treliza Espacial Generalizada para o dimensionamento à torção de vigas de concreto estrutural.

Esta norma considera a redução da resistência à torção na pós-fissuração, pois a fissuração da viga diminui sua rigidez.

Para se calcular a distribuição dos momentos torçores nas estruturas hiperestáticas é necessário analisar a estrutura considerando-se a redução da rigidez à torção devido ao acréscimo do momento torçor.

A rigidez à torção (GC) de uma seção de concreto armado na fase pré-fissuração é calculada pela teoria de Saint-Venant. Após a fissuração a rigidez à torção torna-se uma fração da rigidez (GC).

A rigidez à torção pós-fissuração de uma seção retangular de concreto armado foi estudada por LAMPERT (1973), que fundamentou sua formulação teórica baseada na Teoria de Bredt.

Baseado na analogia da Treliza Espacial, (HSU & BURTON (1974), HSU (1984)) desenvolveu uma teoria para o estudo de GC , e obteve uma expressão para a rigidez à torção pós-fissuração, usando um conceito de módulo de cisalhamento pós-fissuração. Sua teoria é geralmente aplicada para uma seção transversal arbitrária, incluindo-se a seção retangular e a seção circular.

Existem diversas sistemáticas de análise para se calcular com boa precisão a rigidez à torção de elementos de concreto armado. Essas sistemáticas são fundamentadas em processos computacionais. No entanto alguns desses processos são caros e consomem tempo para se executar as interações exigidas.

O método de HSU (1974) é um procedimento simples para se calcular a rigidez à torção.

Esse método é baseado na rigidez secante à torção, partindo-se da hipótese da seção não fissurada, e analisando-se a viga para vários estágios de solicitação até a fase de ruptura.

Esta rigidez à torção é usada para desenvolver a relação momento torçor x ângulo de torção por unidade de comprimento ($T \times \theta$) para o estado elástico não fissurado, e para a ruptura. No estado não fissurado a teoria de Saint-Venant é usada, enquanto no estado pós-fissuração a rigidez à torção é obtida por meio do modelo da Treliça Espacial.

3.2 RIGIDEZ À TORÇÃO ANTES DA FISSURAÇÃO

Antes da fissuração o comportamento do elemento de concreto armado sujeito à torção pode ser previsto pela teoria elástica de Saint-Venant.

A rigidez à torção a seção transversal não fissurada $(GC)_g$ é mostrada na Figura 3.1. De acordo com a teoria de Saint-Venant esta rigidez, para uma seção retangular, é dada por:

$$(GC)_g = G_c \beta_c x^3 y \quad (3.1)$$

onde

G_c – módulo de elasticidade transversal do concreto;

E_c – módulo de elasticidade do concreto;

ν – coeficiente de Poisson.

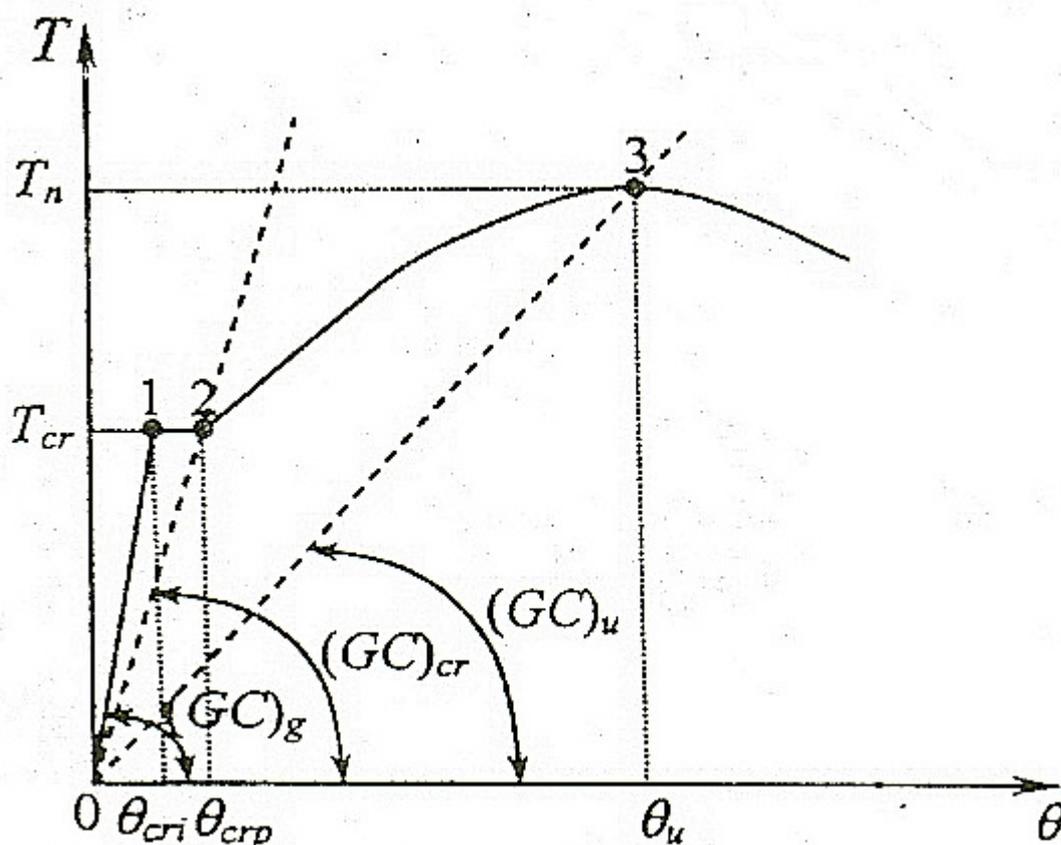


Figura 3.1 – Curva $T \times \theta$ para vigas de concreto armado; adaptada TAVIO e TENG (2004).

3.3 RIGIDEZ Á TORÇÃO PÓS-FISSURAÇÃO

3.3.1 Modelo de Lampert (1973)

Após a fissuração a rigidez à torção do elemento de concreto armado torna-se apenas uma fração da rigidez elástica. Essa redução é de grande magnitude.

LAMPERT (1973) concebeu uma formulação para a rigidez á torção pós-fissuração baseada no modelo da Treliça Espacial. Para a torção pós-fissuração propôs a expressão:

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{4E_s A_2^3}{p_2^2 \left(\frac{4n\lambda A_2}{p_2 t_i} + \frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_t} \right)} \quad (3.2)$$

onde

$G_{cr}C_{cr}$ – rigidez à torção pós-fissuração;

E_s – módulo de elasticidade do aço;

A_2 – área entre as linhas do centro a centro das barras longitudinais (Figura 3.2);

p_2 – perímetro da linha do centro ao canto da barra longitudinal;

$n = \frac{E_s}{E_c}$ – relação entre os módulos de elasticidades;

λ – coeficiente adimensional;

t_i – espessura da parede da seção vazada, ou espessura da parede da seção sólida;

x_2 – menor dimensão centro-centro do canto da barra longitudinal (Figura 3.2);

$\rho_\ell = \frac{A_\ell}{A_{cp}}$ – taxa volumétrica da armadura longitudinal;

A_ℓ – área total da seção transversal da armadura longitudinal;

A_{cp} – área do perímetro externo da seção transversal de concreto;

$\rho_t = \frac{A_t p_1}{A_{cp} s}$ – taxa volumétrica da armadura transversal;

A_t – área da seção transversal de um tramo do estribo;

p_1 – perímetro do centro da linha do estribo (Figura 3.2);

s – espaçamento dos estribos.

LAMPERT(1973) introduziu o coeficiente λ para considerar o empenamento da parede do tubo pois esta se deforma e é assimilada a um parabolóide-hiperbólico, pois a biela assume a forma de uma superfície de dupla curvatura, sendo flexo-comprimida. A compressão no concreto não permanece constante ao longo da espessura da parede, pois o valor de E_c decresce sob solicitação constante, logo a deformação específica do concreto varia ao longo da espessura da parede.

De acordo com observações das curvas $T \times \theta$, LAMPERT (1973) concluiu que o valor $\lambda = 3$ é um valor adequado para sua formulação. Porém, para simplificar a expressão 3.2 sugeriu o valor $\lambda = 0$, logo:

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{4E_s A_2^2}{p_2^2 \left(\frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_t} \right)} \quad (3.3)$$

Esta simplificação gera valores elevados para a rigidez à torção.

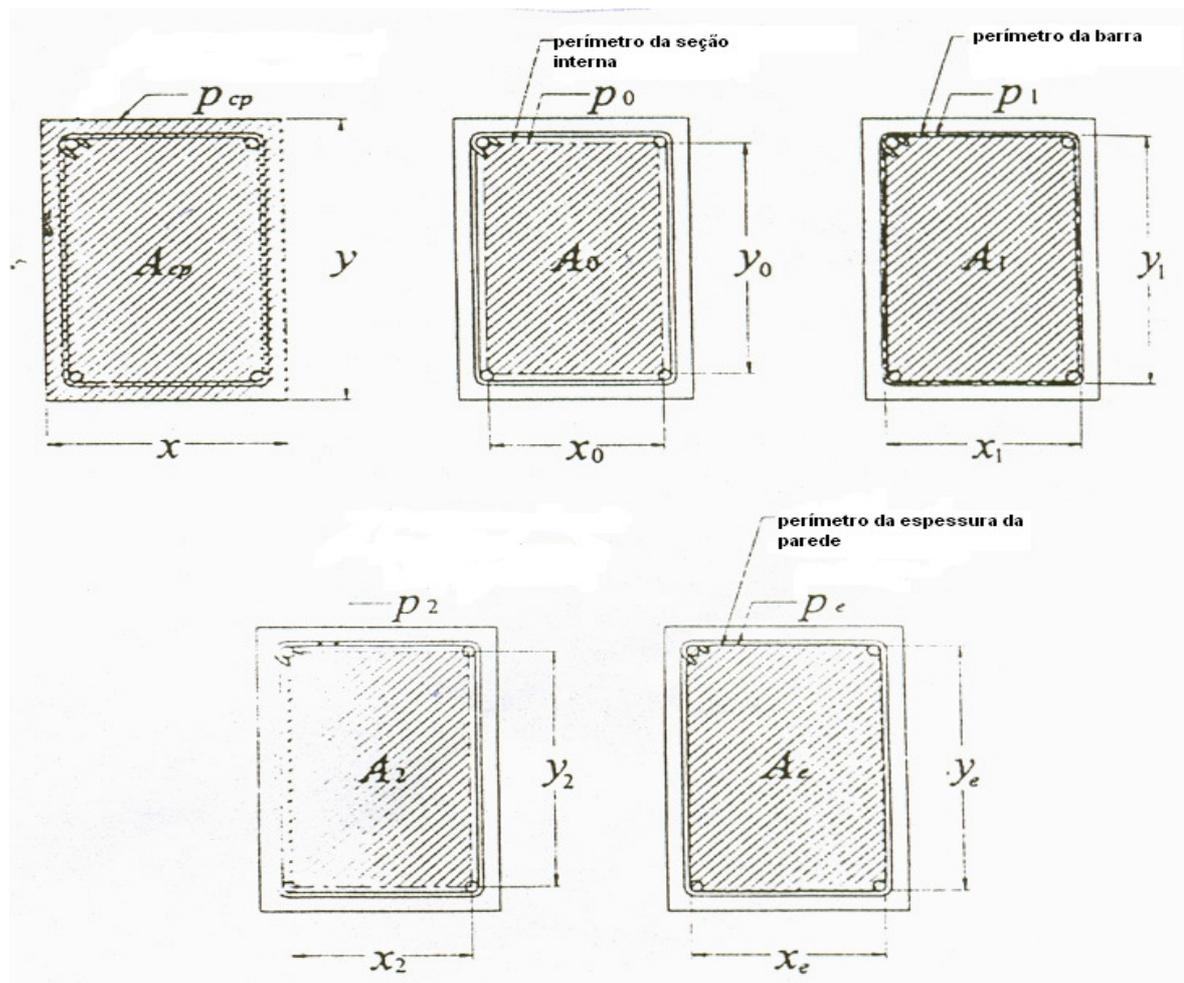


Figura 3.2 – Propriedades da seção retangular; adaptada de TAVIO (2004).

3.3.2 Modelo de Hsu (1974,1984)

HSU (1974,1984) desenvolveu uma teoria para rigidez à torção pós-fissuração usando o conceito de módulo de torção pós-fissuração, com a rigidez à torção dada por:

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{4E_s A_e^2 A_{cp}}{p_e^2 \left(\frac{4nA_{cp}}{p_e t_e} + \frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_t} \right)} \quad (3.4)$$

onde

A_e – área da linha média da seção, considerando-se o eixo da espessura efetiva da parede;

p_e – perímetro efetivo da seção A_c .

A espessura da parede do tubo obtida por meio de dados experimentais é dada por:

$$t_e = 1,4(\rho_\ell + \rho_t)x \quad (3.5)$$

sendo x a menor dimensão da seção.

Para o cálculo da rigidez à torção pós-fissuração de um elemento de concreto armado, faz-se uso da teoria de Bredt, admitindo-se a espessura da parede do tubo uniforme. Nessa teoria a tensão de cisalhamento τ é dada por:

$$\tau = \frac{T}{2Ah} \quad (3.6)$$

onde

A – área da seção média do tubo;

h – espessura da parede do tubo;

T – momento torçor.

A tensão de cisalhamento no concreto é calculada por intermédio da Treliça Espacial (Figura 3.3), onde as forças nas barras longitudinais e na biela são X, Y e D , respectivamente. Essas forças são consideradas constantes em todo o tubo, logo:

$$X = Y = \frac{D}{\sqrt{2}} = F = \tau s h \quad (3.7)$$

onde

X, Y – forças nas barras;

D – força na biela;

F – força de tração

s – espaçamento dos estribos.

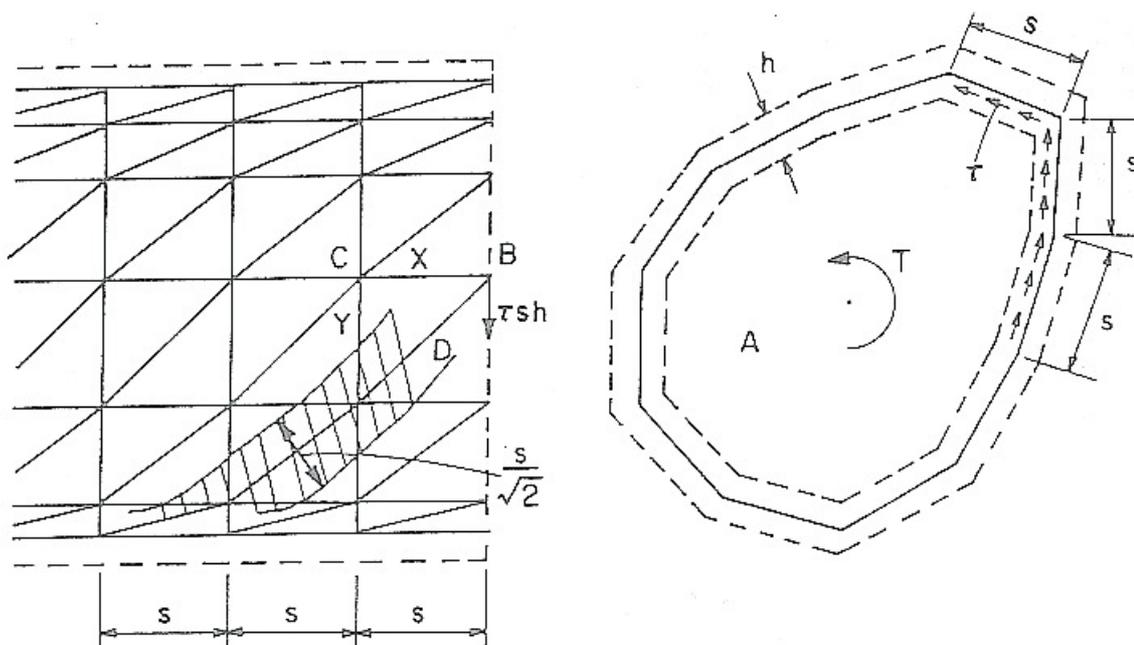


Figura 3.3 – Treliça Espacial; adaptada de HSU (1984).

Utilizando-se a expressão 2.2 tem-se, respectivamente, para a tensão na biela σ_c , para a tensão nas barras longitudinais σ_ℓ , e para a tensão nos estribos σ_h :

$$\sigma_c = \frac{D}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)h} = \frac{\sqrt{2}\tau sh}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)h} = 2\tau \quad (3.8)$$

$$\sigma_\ell = \frac{X}{A_\ell} = \frac{\tau sh}{A_\ell} = \frac{\tau}{r_\ell} \quad (3.9)$$

$$\sigma_h = \frac{y}{A_t} = \frac{\tau sh}{A_t} = \frac{\tau}{rh} \quad (3.10)$$

$$r_\ell = \frac{A_\ell}{sh} \quad (3.11)$$

$$r_h = \frac{A_t}{sh} \quad (3.12)$$

onde

A_t – área da barra longitudinal;

A_s – área de um tramo do estribo.

As deformações específicas na biela de concreto e nas barras de aço são dadas por:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{2\tau}{E_c} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_\ell = \frac{\sigma_\ell}{E_s} = \frac{\tau}{E_s r_\ell} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_h = \frac{\sigma_h}{E_s} = \frac{\tau}{E_s r_h} \quad (3.15)$$

onde ε_c , ε_ℓ e ε_h são as deformações específicas no concreto, armadura longitudinal e armadura transversal, respectivamente. Os parâmetros E_c e E_s são o módulo de elasticidade do concreto e do aço, respectivamente.

A distorção de cisalhamento γ do elemento ABCD, e a deformação específica do concreto ε_c são mostradas na Figura 3.4.a. A deformação da biela é indicada por \overline{CB} tornando-se \overline{CE} . O valor de \overline{BE} é $\overline{BE} = \varepsilon_c (\sqrt{2}s)$. Para se manter a compatibilidade da biela com as barras de aço, \overline{CE} deve girar sobre o ponto C, e \overline{AB} deve girar sobre o ponto A até os pontos E e B encontrarem o ponto F. Quando a deformação for pequena \overline{EF} é perpendicular a \overline{CE} , e \overline{BF} perpendicular a \overline{AB} . Da geometria tem-se $\overline{BF} = \sqrt{2}\overline{BE} = 2\varepsilon_c s$. Após a deformação o elemento torna-se um paralelogramo, e a sua distorção de cisalhamento é dada por:

$$\gamma_c = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \frac{2\varepsilon_c s}{S} = 2\varepsilon_c \quad (3.16)$$

A distorção γ_ℓ é devido ao alongamento da barra longitudinal, e a distorção γ_h é devido ao alongamento do estribo (Figuras 3.4.b e 3.4.c), logo:

$$\gamma_\ell = \frac{\varepsilon_\ell s}{S} = \varepsilon_\ell \quad (3.17)$$

$$\gamma_h = \frac{\varepsilon_h s}{S} = \varepsilon_h \quad (3.18)$$

A distorção de cisalhamento total será:

$$\gamma = \gamma_c + \gamma_\ell + \gamma_h = 2\varepsilon_c + \varepsilon_\ell + \varepsilon_h \quad (3.19)$$

Substituindo-se as expressões 3.13 e 3.14 na expressão 3.19 encontra-se:

$$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{E_s}{\left(4\eta + \frac{1}{r_\ell} + \frac{1}{r_h}\right)} \quad (3.20)$$

$$\eta = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.21)$$

A Lei de Hooke é dada por:

$$G_{cr} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (3.22)$$

onde G_{cr} é o módulo de cisalhamento pós-fissuração.

Combinando-se as expressões 3.20 e 3.22 tem-se para o módulo de elasticidade transversal na fase pós-fissuração:

$$G_{cr} = \frac{E_s}{\left(4\eta + \frac{1}{r_\ell} + \frac{1}{r_h}\right)} \quad (3.23)$$

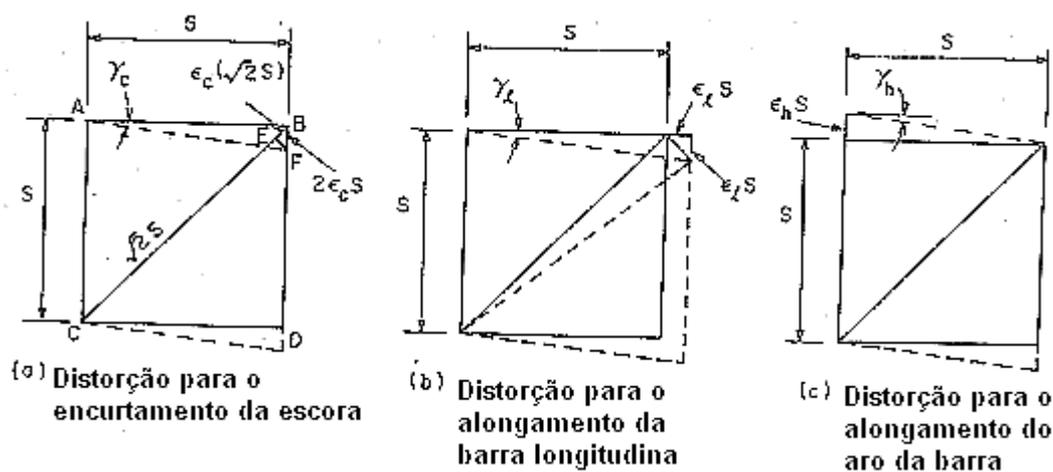


Figura 3.4 – Compatibilidade das deformações específicas devida à distorção proveniente da torção; adaptada por HSU (1984).

Para as taxas geométricas das armaduras tem-se:

$$\rho_\ell = \frac{\hat{A}_\ell}{A_c} = \left(\frac{uh}{A_c}\right)r_\ell \quad (3.24)$$

$$\rho_h = \frac{A_h u}{A_c s} = \left(\frac{uh}{A_c}\right)r_h \quad (3.25)$$

onde

\hat{A}_ℓ – área total da seção transversal do aço longitudinal;

A_c – área externa da seção transversal de concreto;

u – perímetro da área da linha central da barra;

A_h – área da seção transversal de um estribo.

Substituindo-se r_ℓ e r_h por ρ_ℓ e ρ_h na expressão 3.21 tem-se;

$$G_{cr} = \left(\frac{E_s}{4\eta + \frac{uh}{A_c \rho_\ell} + \frac{uh}{A_c \rho_h}} \right) \quad (3.26)$$

Para o momento de inércia à torção pós-fissuração C_{cr} tem-se:

$$C_{cr} = \frac{4A_\ell^2 h}{u} \quad (3.27)$$

Combinando-se as expressões 3.26 e 3.27 tem-se:

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{4E_s A_\ell^2 A_c}{u^2 \left(\frac{4\eta A_c}{uh} + \frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_h} \right)} \quad (3.28)$$

Para a seção circular tem-se:

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} \quad (3.29)$$

$$A_\ell = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad (3.30)$$

$$u = \pi d_1 \quad (3.31)$$

então

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{E_s \pi d_1^2 d^2}{\frac{\eta d^2}{d_1 h} + \frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_h}} \quad (3.32)$$

onde d e d_1 são, respectivamente, o diâmetro da seção transversal do concreto e o diâmetro do círculo formado pela linha central do estribo.

Para seção retangular tem-se:

$$A_c = xy \quad (3.33)$$

$$A_1 = x_1 y_1 \quad (3.34)$$

$$u = 2(x_1 + y_1) \quad (3.35)$$

donde

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{E_s x_1^2 y_1^2 x y}{(x_1 + y_1)^2 \left[\frac{2\eta x y}{(x_1 + y_1)h} + \frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_h} \right]} \quad (3.36)$$

sendo x e y a menor e maior dimensão da seção, e x_1 e y_1 são menor e maior dimensão do estribo.

3.3.2.1 Interseção vertical

A Figura 3.5 mostra uma curva $T \times \theta$ onde se observam três estágios de comportamento mecânico. Antes do início da fissuração o ângulo da curva representa a rigidez à torção de Saint-Venant $G_c C$, e após a fissuração a curva inicialmente reta tenderá tornar-se horizontal, o que ocorrerá quando o momento torçor atingir seu valor máximo. O ângulo de inclinação da reta representa a rigidez à torção pós-fissuração, calculada na teoria de HSU (1984) pela expressão 3.36, usando-se a espessura da parede efetiva h_e (expressão 3.5).

Para o momento torçor resistido pelo concreto tem-se:

$$T_c = \left(x^2 \frac{y}{3} \right) (2,4 \sqrt{f_c}) \quad (3.37)$$

A relação $T \times \theta$ pós-fissuração é dada por:

$$T = \eta T_c + G_{cr} C_{cr} \theta \quad (3.38)$$

O coeficiente η é avaliado por três séries dos testes realizados na PCA – Portland Cement Association, sendo as vigas executadas com os mesmos materiais e dimensões, variando-se a espessura da parede. A primeira série teve a relação $\frac{h}{x} = 0,5$, e para a segunda e para a terceira essa relação foi $\frac{h}{x} = 0,25$ e $\frac{h}{x} = 0,15$ respectivamente, onde h é a espessura da parede, e x é a menor dimensão da seção transversal.

A curva $T \times \theta$ de três vigas com mesma armadura e diferentes espessuras de parede é mostrada na Figura 3.6, onde se verifica que a rigidez à torção é a mesma, mas o momento torçor aumenta com a espessura da parede. Logo, admite-se a seguinte proporcionalidade $\eta \propto \frac{h}{x}$. Para as três séries da viga desses ensaios tem-se:

$$\eta = 0,57 + 2,86 \frac{h}{x} \quad (3.39)$$

Para uma seção maciça verificou-se que $\eta = 2$.

Os resultados experimentais mostram que o núcleo da seção transversal de concreto não tem influência significativa no momento torçor último. No entanto a expressão 3.39 indica que o núcleo do concreto influencia o comportamento da torção pós-fissuração.

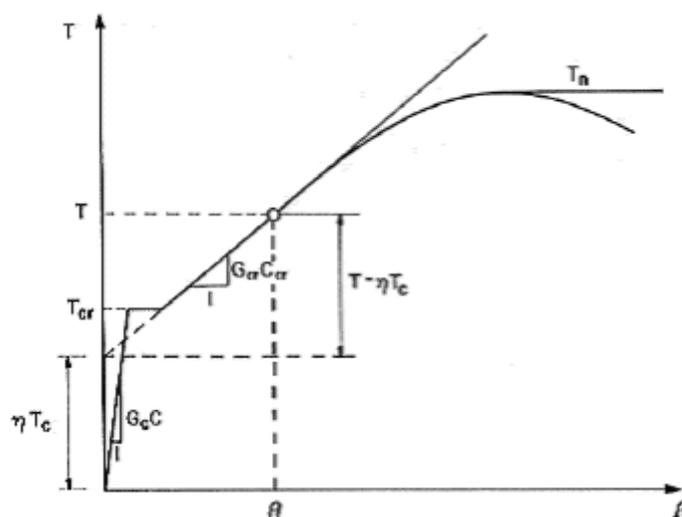


Figura 3.5 – Diagrama momento x ângulo de torção por unidade de comprimento ($T \times \theta$); adaptada de HSU (1984).

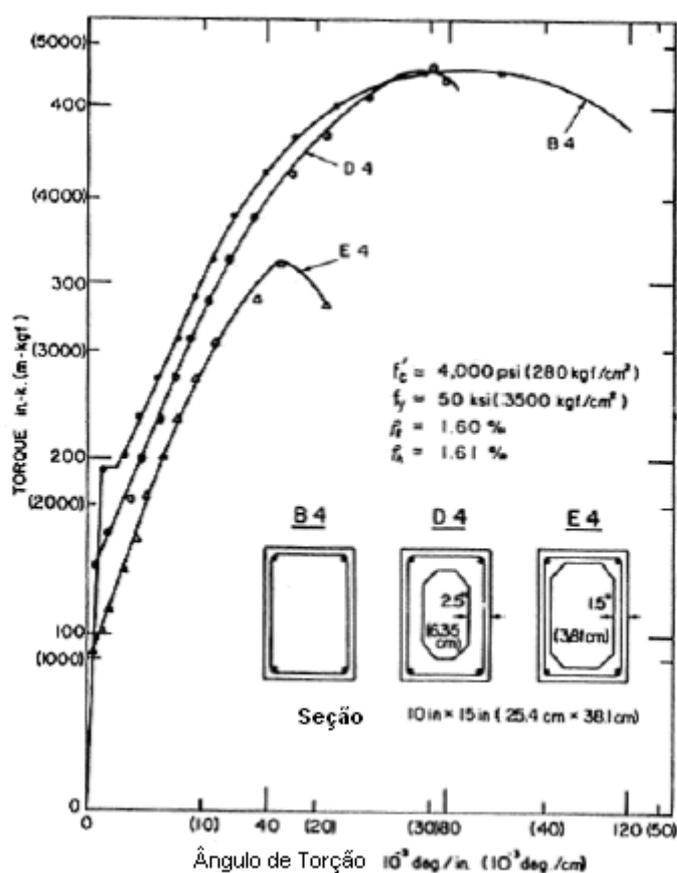


Figura 3.6 – Curva $T \times \theta$ para vigas B4, D4 e E4 dos ensaios realizados na PCA; adaptada de HSU (1984).

3.3.2.2 Resumo da rigidez à torção

a) Antes da fissuração ($T \leq T_{cr}$):

$$G_c C = \frac{T}{\theta} \quad (3.40)$$

$$G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \quad (3.41)$$

onde

G_c – módulo de elasticidade transversal do concreto;

C – momento de inércia à torção.

b) Após a fissuração ($T \geq T_{cr}$):

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{T - \eta T_c}{\theta} \quad (3.42)$$

$$G_{cr} = \frac{E_s}{\left(4\eta + \frac{ut_e}{A_c \rho_1} + \frac{ut_e}{A_c \rho_h}\right)} \quad (3.43)$$

$$C_{cr} = \frac{4A_1^2 t_e}{u} \quad (3.44)$$

sendo t_e e η dados pelas expressões 3.5 e 3.39, respectivamente.

O momento torçor pode ser calculado pela teoria de Lessig (Teoria da Flexão Esconça), ou pela teoria da Treliça Espacial. A teoria de Lessig não será abordada nesta dissertação. Ressalta-se apenas que a aplicação da teoria da Flexão Esconça

aplicada para seções maciças e seções vazadas, fornece para seção retangular o momento torçor de fissuração:

$$T_{cr} = 6(x^2 + 10)y \sqrt[3]{f_c} \left(\frac{4h}{x} \right) \quad (3.45)$$

onde $h \leq \frac{x}{4}$ (usar $h = \frac{x}{4}$ quando $h > \frac{x}{4}$), sendo essas fórmulas expressas em unidades norte-americanas (U.S. Customary).

Utilizando-se a Teoria da Treliza Espacial tem-se a formulação apresentada a seguir, onde se assume que $h \leq \frac{x}{4}$, então:

$$T_{cr} = 2 x_1 y_1 h f_t \quad (3.46)$$

e

$$f_t = 5\sqrt{f_c} \quad (3.47)$$

sendo essas fórmulas expressas em unidades norte americanas (U.S. Customary).

No caso de espessura de parede não uniforme, a espessura da parede mínima pode ser considerada para o cálculo de h nas expressões 3.45 e 3.46.

A rigidez à torção pode ser simplificada usando-se duas suposições:

1) admitir $\eta = 0$, logo a curva $T \times \theta$ passa pela origem, donde a expressão 3.42 torna-se:

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{T}{\theta} \quad (3.48)$$

2) abandonar a contribuição da biela de concreto para rigidez a torção, isto é, abandonar o primeiro termo do denominador da expressão 3.42 donde:

$$G_{cr} = \frac{E_s}{h_e \left(\frac{u}{\hat{A}_\ell} + \frac{s}{A_t} \right)} \quad (3.49)$$

Com a expressão 3.49 e a expressão 3.44 tem-se:

$$G_{cr} C_{cr} = \frac{4E_s A_1^2}{u \left(\frac{u}{\hat{A}_\ell} + \frac{s}{A_t} \right)} \quad (3.50)$$

A Figura 3.8 mostra uma comparação entre essas expressões.

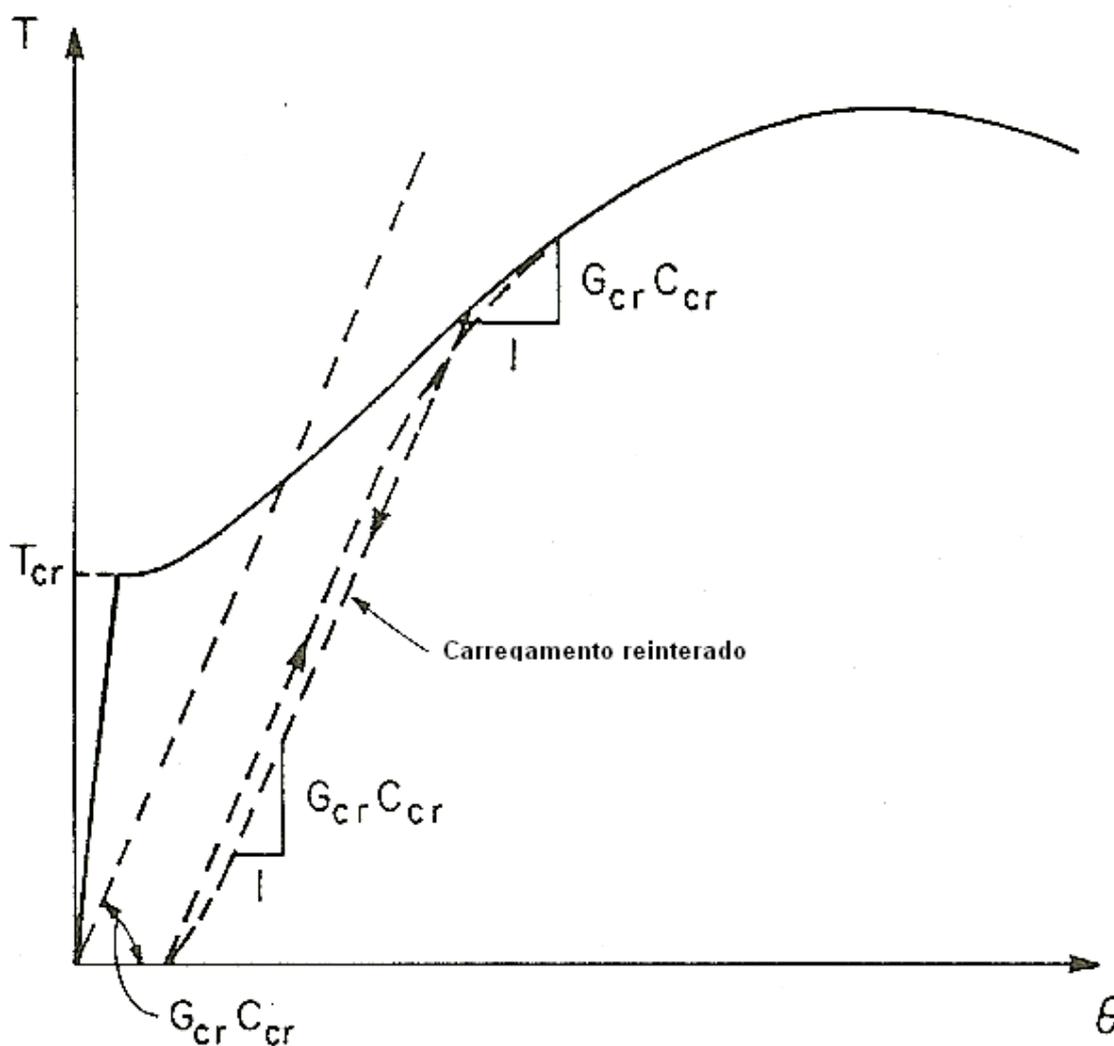


Figura 3.7– Rigidez à torção simplificada; adaptada de HSU (1984).

3.3.3 Modelo de Tavio e Susanto Teng (2004)

Esses autores simplificaram a formulação de HSU (1974), e introduziram algumas variáveis apresentando a seguinte expressão:

$$(GC)_{cr} = \frac{4\mu E_s A_0^2 A_{cp}}{p_0^2 \left(\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_t} \right)} \quad (3.51)$$

onde

$(GC)_{cr}$ – rigidez á torção na fissuração;

A_0 – área delimitada pelo do fluxo de cisalhamento;

μ – coeficiente adimensional;

p_0 – perímetro de A_0 .

Propuseram para o coeficiente adimensional μ o valor de $\mu = 1,5$ em função da análise de dados experimentais obtidos na literatura.

Para adequar o modelo proposto aos resultados experimentais, modificaram a expressão 3.4 incluindo o coeficiente λ , logo:

$$(GC)_u = \frac{4E_s A_0^2 A_{cp}}{p_0^2 \left(\frac{4n\lambda A_{cp}}{p_0 t_d} + \frac{1}{\rho_\ell} + \frac{1}{\rho_t} \right)} \quad (3.52)$$

onde

$(GC)_u$ – rigidez à torção de ruptura;

t_d – espessura da parede do tubo.

Recomendam adotar $\lambda = 4$. Essa abordagem teórica assume a espessura efetiva t_d (Figura 3.2) em vez de t_e (Figura 3.9), dada por :

$$t_d = \frac{A_0 \xi^2}{p_0 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (3.53)$$

onde

ξ – coeficiente de abrandamento de tensões;

α – ângulo de inclinação da biela.

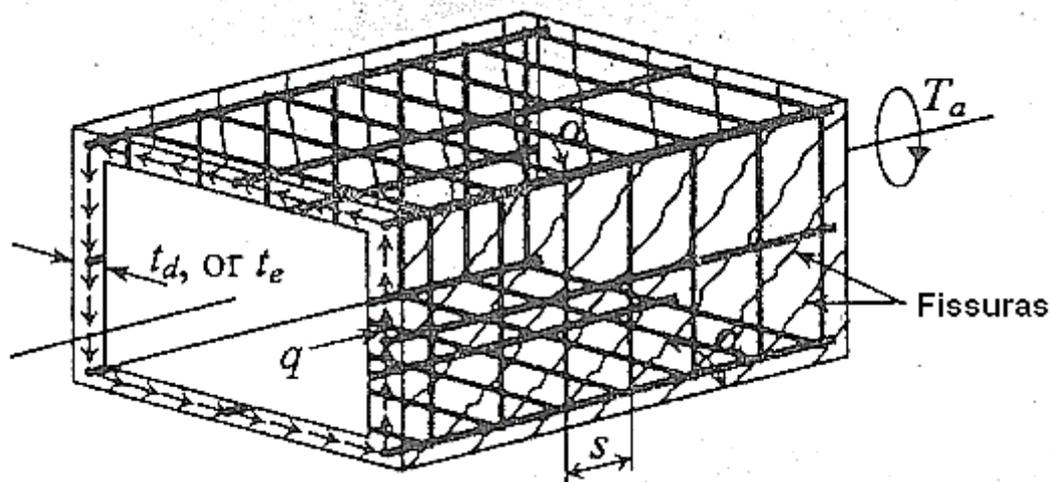


Figura 3.8 – Viga de concreto sujeita à torção na fase pós-fissuração; adaptada de TAVIO e SUSANTO TENG (2004).

Por meio do modelo da Trelça Espacial tem-se :

$$t_e = t_d = \frac{4T_u}{A_{cp}f_c} \quad (3.54)$$

onde

T_u – momento torçor;

f_c – resistência à compressão do concreto.

Inserindo-se a expressão 3.54 nas expressões 3.51 e 3.52 tem-se :

$$A_o = A_{cp} - \frac{2T_u p_{cp}}{A_{cp}f_c} \quad (3.55)$$

onde

p_{cp} – perímetro externo da seção de concreto.

O momento torçor de fissuração T_{cr} pode ser estimado baseado no modelo da Treliza Espacial. De acordo com as prescrições do ACI 318/2003, tem-se :

$$T_{cr} = \frac{1}{3} \sqrt{f_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \quad (3.56)$$

Esses autores fundamentados em resultados experimentais, propõem para o momento torçor de fissuração a seguinte expressão:

$$T_{cr} = \frac{1}{2} \sqrt{f_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \quad (3.57)$$

A diferença entre as expressões 3.56 e 3.57 deve-se aos ajustes de resultados experimentais do parâmetro referente à resistência do concreto.

Quando do escoamento da armadura transversal tem-se:

$$T_n = \frac{A_t f_{ty} \cot g \alpha}{s} (2A_0) \quad (3.58)$$

onde f_{ty} é a tensão de escoamento dessa armadura.

Substituindo-se a área A_0 dada pela expressão 3.55 na expressão 3.58 tem-se:

$$T_n = T_y = \frac{2A_{cp}^2}{\frac{p_\ell}{\rho_t f_{ty} \cos \alpha} + \frac{4p_{cp}}{f_c}} \quad (3.59)$$

Na fase pré-fissuração o ângulo de torção é dado por:

$$\theta_a = \frac{T_a}{(GC)_g} \quad (3.60)$$

O ângulo de torção quando da fissuração é dado por (Figura 3.1, ponto 1):

$$\theta_{cri} = \frac{T_{cr}}{(GC)_g} \quad (3.61)$$

Na fase fissurada tem-se para o ângulo de torção (Figura 3.1, ponto 2):

$$\theta_{crp} = \frac{T_{cr}}{(GC)_{cr}} \quad (3.62)$$

O ângulo de torção para o momento torçor último T_n é calculado por (Figura 3.1, ponto 3):

$$\theta_u = \frac{T_n}{(GC)_u} \quad (3.63)$$

A relação $T \times \theta$ é linear antes da fissuração, e em fase fissurada ocorre uma redução na rigidez à torção, donde:

– para $0 \leq \theta_a \leq \theta_{cri}$

$$T_a = \left(\frac{\theta_a}{\theta_{cri}} \right) T_{cr} \quad (3.64)$$

– para $\theta_{cri} \leq \theta_a \leq \theta_{crp}$

$$T_a = T_{cr} \quad (3.65)$$

Na fase pós-fissuração tem-se:

– para $\theta_{crp} \leq \theta_a \leq \theta_u$

$$T_a = \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{crp}} \right)^\phi T_{cr} + \left[1 - \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{crp}} \right)^\phi \right] T_n \quad (3.66)$$

– para $\theta_{crp} \leq \theta_a \leq \theta_u$

$$T_a = T_n - (T_n - T_{cr}) \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{crp}} \right)^\phi \quad (3.67)$$

Reescrevendo-se as expressões anteriores seguem-se:

$$\theta_a = \theta_u - (\theta_u - \theta_{crp}) \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}} \right)^{1/\phi} \quad (3.68)$$

$$\theta_a = \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}} \right)^{1/\phi} \theta_{crp} + \left[1 - \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}} \right)^{1/\phi} \right] \theta_u \quad (3.69)$$

Por meio da adequação aos resultados experimentais esses autores recomendam adotar $\phi = 2$, então:

$$(GC)_e = \frac{T_a}{\theta_a} \quad (3.70)$$

Substituindo-se a expressão 3.70 nas expressões 3.68 e 3.69, obtém-se a equação da rigidez à torção:

$$(GC)_e = \frac{T_a}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{crp}) \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}} \right)^{1/2}} \quad (3.71)$$

$$(GC)_e = \frac{T_a}{\left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}}\right)^{1/2} \theta_{crp} + \left[1 - \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}}\right)^{1/2}\right] \theta_u} \quad (3.72)$$

4 FORMULAÇÃO PROPOSTA

4.1 ENSAIOS DE FANG E SHIAU (2004)

As pesquisas experimentais de vigas de concreto armado de alta resistência sujeitas à torção são em número reduzido. O estudo experimental de FANG e SHIAU (2004) mostrou as diferenças entre as resistências à fissuração, a resistência final, a ductilidade, a rigidez à torção, e a tensão de compressão nas bielas das vigas de concreto de alta resistência e das vigas de concreto normal sujeitas à torção pura.

Esses autores ensaiaram 16 vigas de concreto armado com seção transversal 350 mm x 500 mm, com cobrimento de armadura de 20 mm, e comprimento de 3100 mm. Os ensaios foram realizados aplicando-se um momento torçor no meio das vigas, a aproximadamente 1600 mm dos apoios. As vigas foram dimensionadas de acordo com as prescrições do ACI 318/02, de modo a se evitar a ruptura prematura das mesmas. A taxa das armaduras longitudinal e transversal variou de 1,2% a 4,0%. Os dados e detalhes das vigas são mostrados na Tabela 4.1 e na Figura 4.1.

As resistências à compressão das vigas de concreto de alta resistência e as vigas de concreto com resistência normal variaram de 35 MPa a 70 MPa .

Os detalhes do esquema de ensaio dessa pesquisa estão ilustrados na Figura 4.2.

Durante os ensaios a força foi inicialmente aplicada no sistema estrutural com incrementos que originaram um momento torçor de 10 kNm, e quando se atingiu 80% da força final, essa foi reduzida para produzir um momento torçor equivalente de aproximadamente 5 kNm até que a viga rompesse. Foram marcadas as fissuras e foram medidas as deformações do concreto.

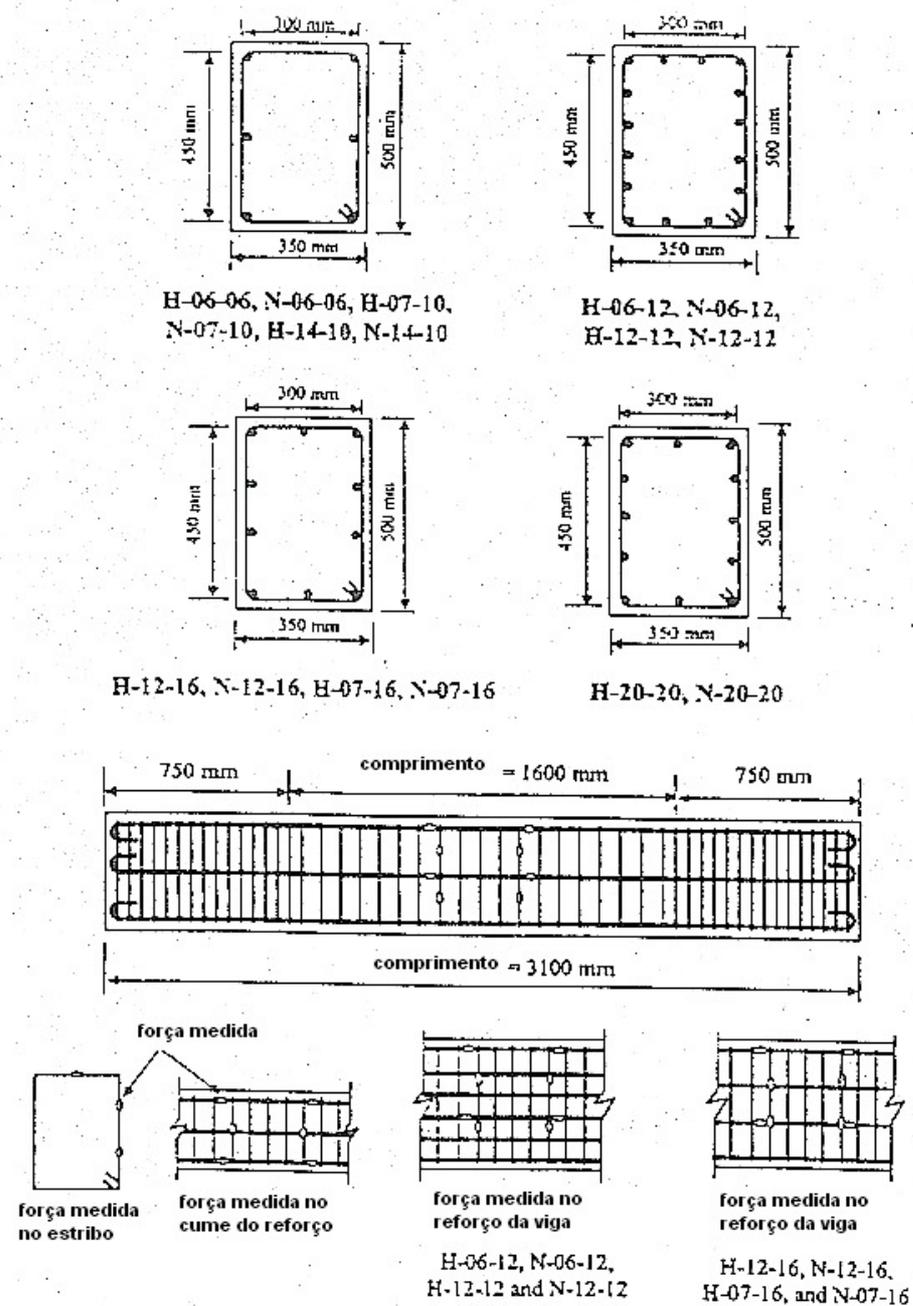


Figura 4.1 – Detalhes das vigas ensaiadas; por FANG e SHIAU (2004).

Tabela 4.1 – Características das vigas ensaiadas por FANG e SHIAU (2004).

Viga	f'_c (MPa)	s (mm)	A_t	f_{ty} (MPa)	A_ℓ	$f_{\ell y}$ (MPa)	ρ_t (%)	ρ_ℓ (%)
H-06-06	78,5	100	# 3	440	6 # 5	440	0,6	0,6
H-06-12	78,5	100	# 3	440	16 # 4	410	0,6	1,2
H-12-12	78,5	50	# 3	440	16 # 4	410	1,2	1,2
H-12-16	78,5	50	# 3	440	10 # 6	520	1,2	1,6
H-20-20	78,5	55	# 4	440	12 # 6	560	2,0	2,0
H-07-10	68,4	90	# 3	420	6 # 6	500	0,7	1,0
H-14-10	68,4	80	# 4	360	6 # 6	500	1,4	1,0
H-07-16	68,4	90	# 3	420	10 # 6	500	0,7	1,6
N-06-06	35,5	100	# 3	440	6 # 5	440	0,6	0,6
N-06-12	35,5	100	# 3	440	16 # 4	410	0,6	1,2
N-12-12	35,5	50	# 3	440	16 # 4	410	1,2	1,2
N-12-16	35,5	50	# 3	440	10 # 6	520	1,2	1,6
N-20-20	35,5	55	# 4	440	12 # 6	560	2,0	2,0
N-07-10	33,5	90	# 3	420	6 # 6	500	0,7	1,0
N-14-10	33,5	80	# 4	360	6 # 6	500	1,4	1,0
N-07-16	33,5	90	#. 3	420	10 # 6	500	0,7	1,6

As curvas $T \times \theta$ para vigas de concreto de alta resistência e vigas de concreto de resistência normal são mostradas na Figura 4.3.a e 4.3.b, respectivamente.

Para uma seção retangular de viga de concreto armado sujeita a torção pura, a tensão máxima de cisalhamento ocorre no centro da face de acordo com a Teoria da Elasticidade. A fissuração inicia quando a tensão principal máxima atinge o valor da tensão de tração do concreto.

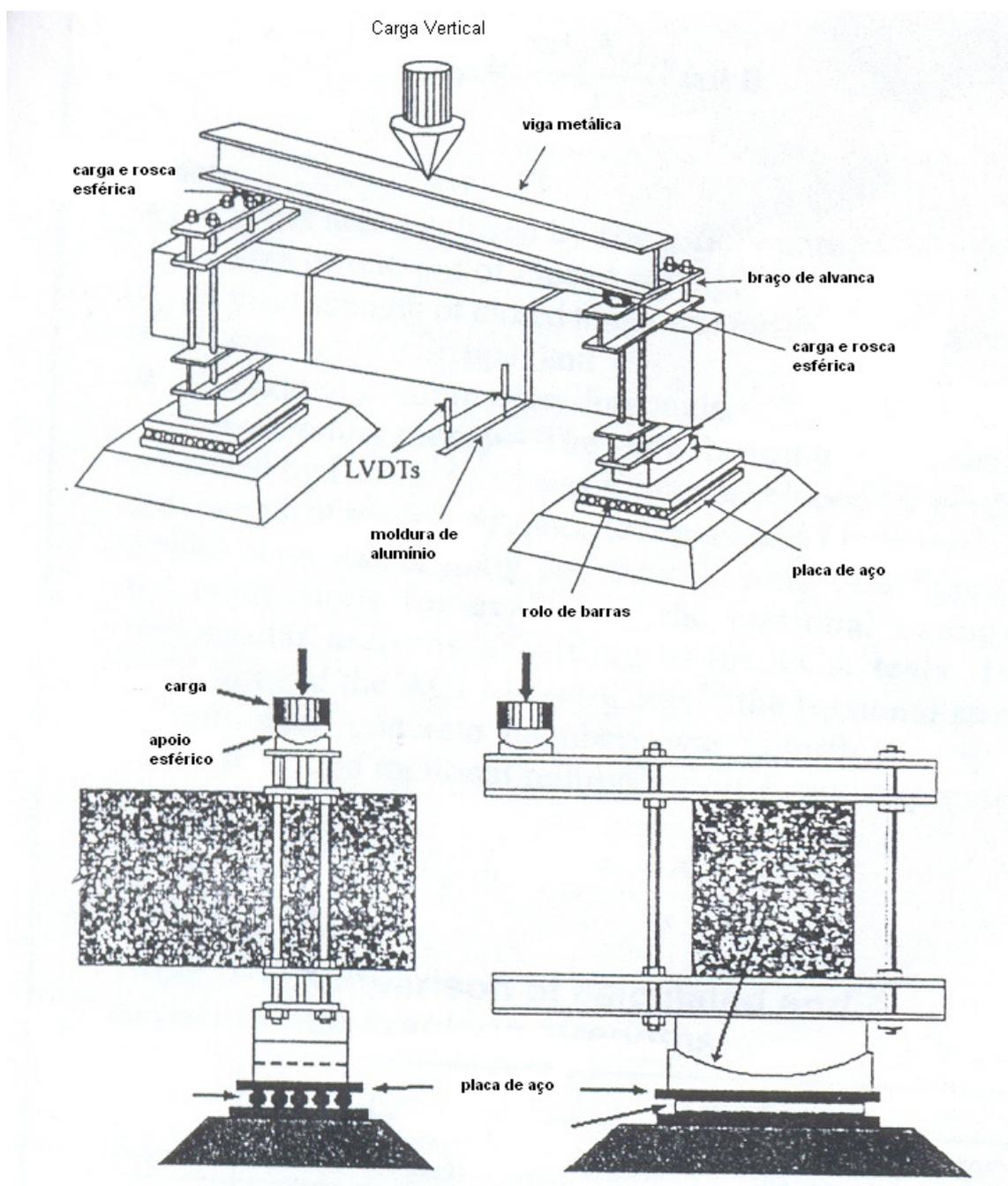


Figura 4.2 – Detalhes do esquema de ensaio por de FANG e SHIAU (2004).

Esses autores mostram que para as prescrições do ACI 318/2003 o momento torçor de fissuração dado pela Teoria da Elasticidade é subestimado, e o valor dado pela Teoria da Flexão Esconça é superestimado.

No Modelo da Treliza Espacial Generalizada a torção é resistida pela flexo-compressão diagonal das bielas de concreto, situadas entre as fissuras que surgem ao redor da viga, admitindo-se que tenham um ângulo constante, porém, variável para os diversos estágios de solitação. Neste modelo admitiu-se para a relação constitutiva do concreto a curva $\sigma \times \varepsilon$ baseada nos ensaios de corpos-de-prova cilíndricos:

$$\sigma_d = f_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

onde

σ_d – tensão de compressão da biela;

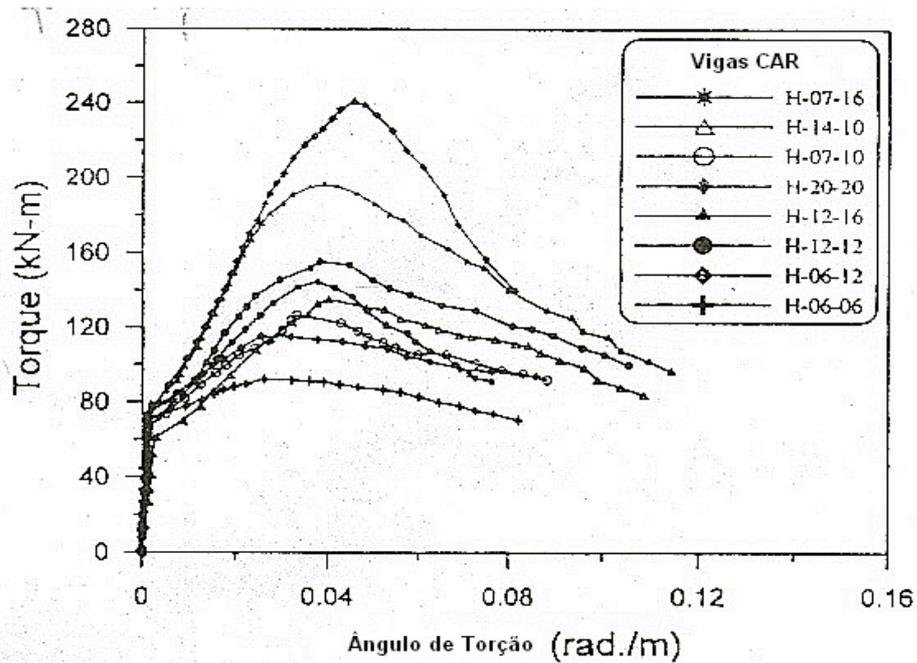
ε_d – deformação específica na biela de concreto;

ε_0 – deformação específica máxima de compressão;

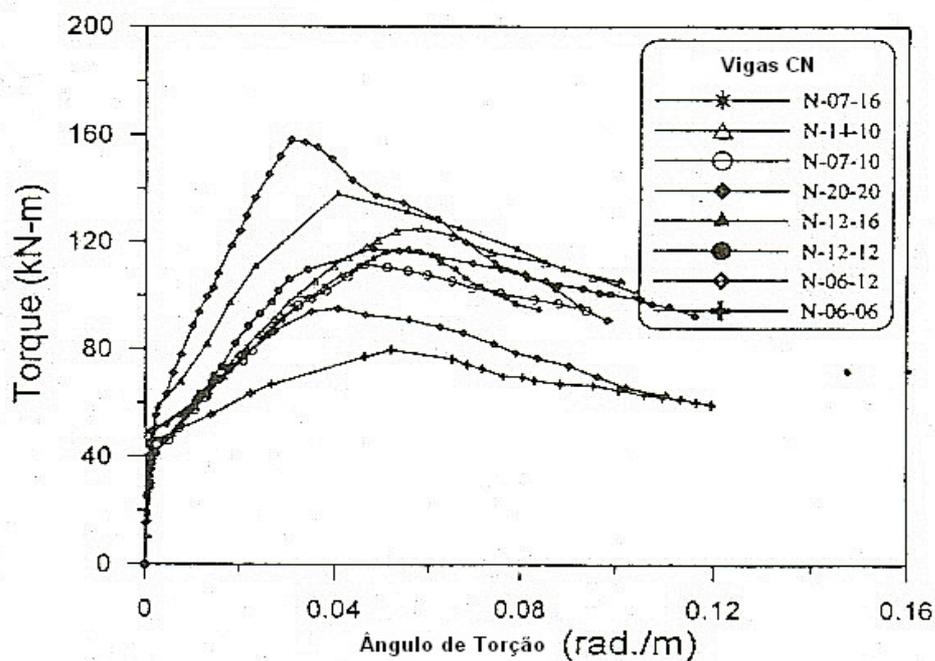
f_c – tensão máxima de compressão do concreto.

4.1.1 O modelo da treliza espacial generalizada com abrandamento de tensões no concreto

Este modelo é um aperfeiçoamento do Modelo da Treliza Espacial Generalizada, no qual considera-se o abrandamento das tensões no concreto (*Concerte Softness*).



(a) VIGAS CAR



(b) VIGAS CN

Figura 4.3 – Relação $T \times \theta$ para vigas de concreto normal; adaptada de FANG e SHIAU (2004).

Este modelo foi desenvolvido de acordo com os princípios fundamentais da Mecânica dos Sólidos, onde devem ser consideradas as equações de equilíbrio, as equações de compatibilidade, e as relações constitutivas dos materiais, adotando-se uma curva $\sigma \times \varepsilon$ para o concreto admitindo-se o abrandamento de tensões.

A Tabela 4.2 mostra os valores do momento torçor último para as vigas de concreto normal e concreto de alta resistência, em função das taxas volumétricas das armaduras transversal e longitudinal. Esses dados indicam que o aumento de $\rho_t + \rho_l$ para uma relação constante entre as resistências à compressão dos concretos de resistência normal e de alta resistência acarreta um acréscimo na relação entre os momentos torçores últimos das vigas executadas com esses tipos de concreto.

Tabela 4.2 – Dados das vigas CAR e CN adaptadas dos ensaios de FANG e SHIAU (2004).

Viga	T_{cr} , kN-m	θ_{cr} , rad/m	T_u , kn-m	θ_u , rad/m	k_{un} , kN-m ²	k_{cr} , kN-m ²	$\frac{k_{un}(HSC)}{k_{un}(NSC)}$	$\frac{k_{cr}(HSC)}{k_{cr}(NSC)}$
H-06-06	70,6	0,0012	92,0	0,0261	58,833	860	1,91	1,35
N-06-06	43,2	0,0014	79,7	0,0566	30,857	638		
H-06-12	75,0	0,0015	115,1	0,0254	50,000	1678	1,93	1,48
N-06-12	51,8	0,0020	95,2	0,0403	25,900	1133		
H-12-12	77,1	0,0013	155,3	0,0378	59,308	2142	1,93	1,45
N-12-12	49,3	0,0016	116,8	0,0474	30,813	1473		
H-12-16	79,3	0,0016	196,0	0,0393	49,563	3059	1,91	1,45
N-12-16	57,1	0,0021	138,0	0,0402	25,955	2129		
H-20-20	76,0	0,0016	239,0	0,0465	47,500	2514	1,90	1,44
N-20-20	55,0	0,0022	158,0	0,0432	25,000	1235		
H-07-10	70,5	0,0016	126,7	0,0332	44,063	1778	2,01	1,33
N-07-10	41,6	0,0019	111,7	0,0544	21,895	1335		
H-14-10	61,8	0,0015	135,2	0,0381	41,200	2005	2,07	1,37
N-14-10	41,8	0,0021	125,0	0,0588	19,905	1467		
H-07-16	65,3	0,0015	144,5	0,0375	43,533	2200	2,07	1,46
N-07-16	40,0	0,0019	117,3	0,0532	21,053	1506		
						Média	1,97	1,41

4.1.2 Torção pura

A Figura 4.3 ilustra as relações $T \times \theta$ das vigas ensaiadas por esses autores. Essas curvas são lineares antes da fissuração. Isto mostra que a torção no estágio pré-fissuração pode ser determinada usando-se a Teoria da Elasticidade.

Para a fase não fissurada tem-se para a torção pura:

$$K_{un} = \frac{T_{cr}}{\theta_{cr}} \quad (4.2)$$

$$K_{cr} = \frac{T_u - T_{cr}}{\theta_u - \theta_{cr}} \quad (4.3)$$

onde

T_{cr} – momento torçor de fissuração;

θ_{cr} – ângulo de torção quando da fissuração;

T_u – momento torçor último;

θ_u – ângulo de torção máximo.

A Tabela 4.3 mostra os dados das vigas para o estágio não fissurado e estágio fissurado para a solicitação de torção pura das vigas de concreto de alta resistência e das vigas de concreto de resistência normal. Para a fase não fissurada tem-se o valor médio entre as rizezas $k_{un}(HSC)/k_{un}(NSC)$ igual a 1,97, enquanto para a fase fissurada tem-se o valor médio $k_{cr}(HSC)/k_{cr}(NSC)$ igual a 1,41.

4.1.3 Ductilidade

A Figura 4.3 (a) e (b) mostram as curvas $T \times \theta$ para as vigas de concreto de alta resistência e para as vigas de concreto de resistência normal. Em geral a viga

de concreto de alta resistência tem um comportamento dúctil similar ao da viga de concreto de resistência normal. A viga H-20-20 tem uma maior taxa de armadura total ($\rho_\ell + \rho_t = 4,0\%$) que a viga H-12-16, e ambas foram executadas com concreto de mesma resistência à compressão.

As Figuras 4.4 (a) até (f) mostram as curvas $T \times \theta$ usadas para se comparar as características de ductilidade das vigas de concreto de alta resistência e das vigas de concreto de resistência normal para a torção de mesma magnitude.

Para descrever a ductilidade da torção esses autores utilizaram a relação $\theta_{0,85} / \theta_y$, representando a variação do ângulo de torção por unidade de comprimento quando do escoamento do aço θ_y , e para o momento torçor igual a 85% do momento torçor último $\theta_{0,85}$.

Os valores de $\theta_{0,85}$, θ_y e a relação $\theta_{0,85} / \theta_y$ são listados na Tabela 4.3, onde se observa que os valores de $\theta_{0,85} / \theta_y$ para as vigas de concreto de alta resistência foram maiores do que para as vigas de concreto de resistência normal.

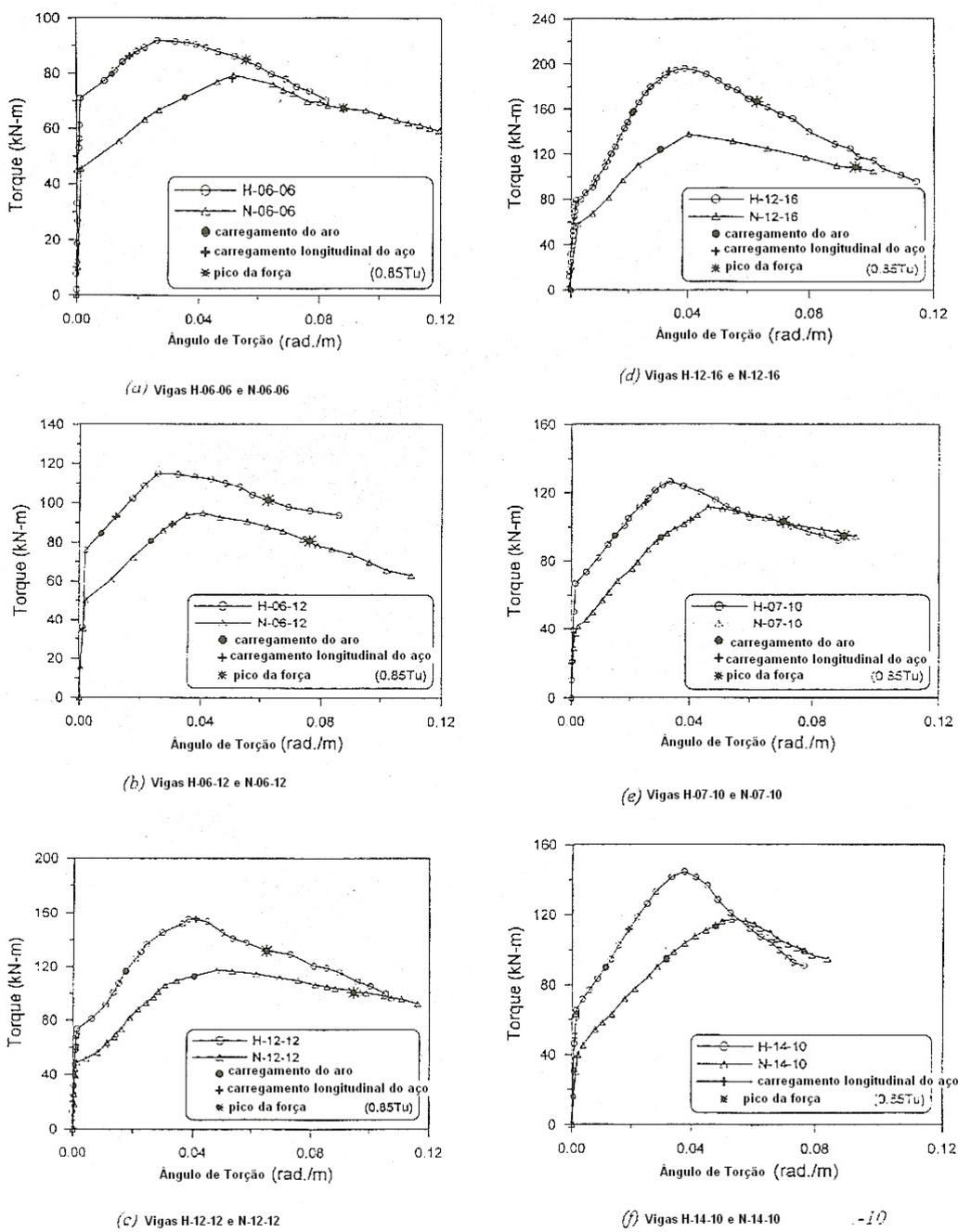


Figura 4.4 – Ductilidade das vigas; adaptada de FANG e SHIAU (2004).

Tabela 4.3 – Resultados dos testes; adaptada de FANG e SHIAU (2004)

Vigas	T_{cr} ,	T_y ,	T_u ,	θ_{cr} ,	θ_y ,	θ_u ,	$\theta_{0,85}$,	$\theta_{0,85} / \theta_y$
	kN-m	kN-m	kN-m	rad/m	rad/m	rad/m	rad/m	
H-06-06	70,6	79,7	92,0	0,0012	0,0116	0,0261	0,0702	6,05
H-06-12	75,0	83,5	115,1	0,0015	0,0128	0,0254	0,0644	5,03
H-12-12	77,1	116,8	155,3	0,0013	0,0175	0,0378	0,0650	3,71
H-12-16	79,3	157,0	196,0	0,0016	0,0210	0,0393	0,0631	3,16
H-20-20	76,0	–	239,0	0,0016	–	0,0465	0,0610	–
H-07-10	70,5	91,1	126,7	0,0016	0,0132	0,0332	0,0705	5,34
H-14-10	61,8	100	135,2	0,0015	0,0210	0,0381	0,0717	3,41
H-07-16	65,3	90,3	144,5	0,0015	0,0143	0,0375	0,0502	3,51
N-06-06	43,2	71,5	79,7	0,0014	0,0351	0,0566	0,0880	2,51
N-06-12	51,8	80,9	95,2	0,0020	0,0232	0,0403	0,0762	3,28
N-12-12	49,3	113,0	116,8	0,0016	0,0400	0,0474	0,0944	2,36
N-12-16	57,1	125,0	138,0	0,0021	0,0306	0,0402	0,0952	3,11
N-20-20	55,0	–	158,0	0,0022	–	0,0432	0,0716	–
N-07-10	41,6	93,8	111,7	0,0019	0,0300	0,0544	0,0902	3,01
N-14-10	41,8	108,0	125,0	0,0021	0,0382	0,0588	0,0966	2,53
N-07-16	40,0	94,9	117,3	0,0019	0,0315	0,0532	0,0760	2,41

4.1.4 Ângulo da Biela

Depois de iniciada a fissuração da viga de concreto armado sujeita a torção pura ocorrem fissuras helicoidais inclinadas de 40° a 50° . O número de fissuras se eleva com o aumento do momento torçor aplicado.

Na fase fissurada admite-se que o ângulo das deformações específicas principais é aproximadamente igual ao ângulo de inclinação das tensões principais.

A inclinação da primeira fissura pode ser obtida por meio da inclinação da tensão principal (regime elástico), a qual é diferente da direção da tensão principal na fase pós-fissuração.

O ângulo das tensões principais depende das tensões nas armaduras longitudinal e transversal. Para as vigas com armadura longitudinal maior do que a armadura transversal, o ângulo da deformação específica principal irá variar, e diminuirá gradualmente durante o ensaio.

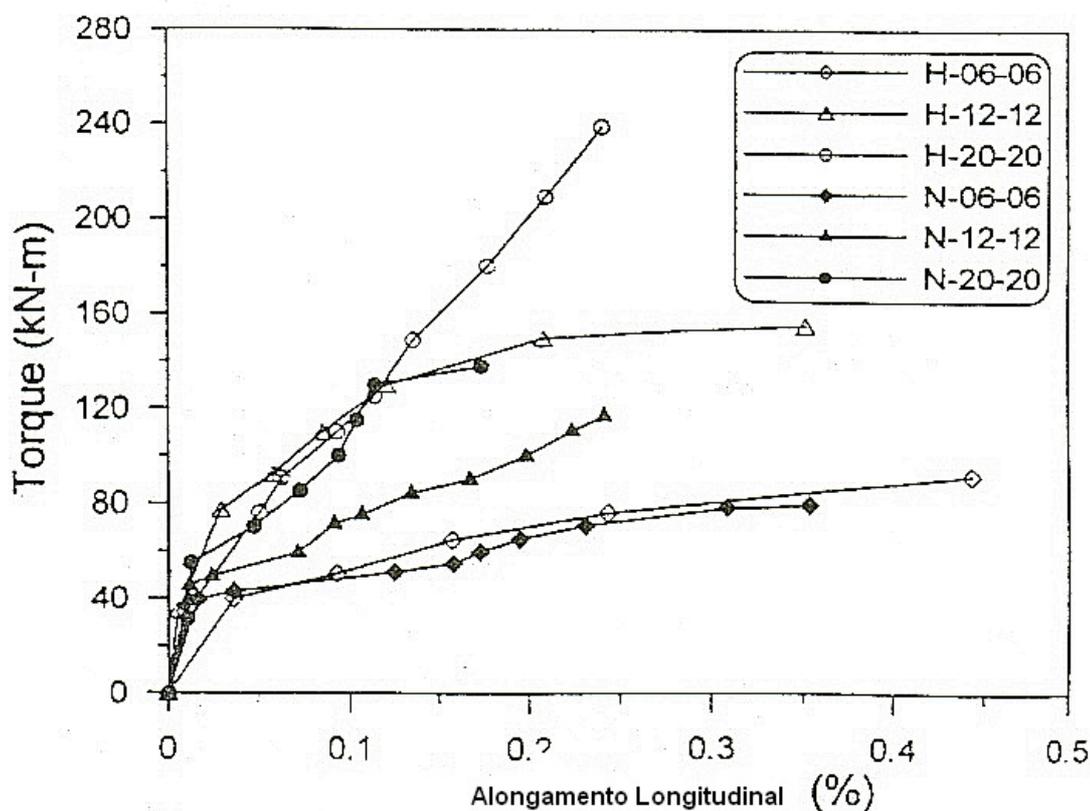
4.1.5 Alongamento Longitudinal das vigas

Com o acréscimo do momento torçor aplicado as fissuras aumentam e se propagam acarretando a um alongamento axial das vigas.

O alongamento longitudinal correspondente à torção máxima para a viga H-06-06 é aproximadamente 0,45%, enquanto para a viga N-06-06 é igual a 0,35%. Para as vigas H-12-12 e N-12-12 foram iguais a 0,35% e 0,25%, respectivamente.

O alongamento longitudinal para as vigas de concreto de alta resistência é maior do que o das vigas de concreto de resistência normal, mas as tensões longitudinais das vigas de concreto de alta resistência foram menores que das vigas de concreto de resistência normal, isto para momento torçor de mesma magnitude.

A Figura 4.5 mostra o gráfico do alongamento longitudinal das vigas *v.s.* momento torçor.



Fi

gura 4.5 – Alongamento longitudinal X momento torçor; por FANG e SHIAU (2004)

4.2 FORMULAÇÃO TEÓRICA

4.2.1 Fórmula Original

Os autores TAVIO e SUSANTO TENG propuseram uma formulação para o cálculo da rigidez e do momento torçor. As fórmulas desses autores são as apresentadas a seguir:

$$T = T_n - (T_n - T_{cr}) \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi \quad (4.4)$$

$$(GC)_e = \frac{T_a}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}} \right)^{1/\phi}} \quad (4.5)$$

$$(GC)_e = \frac{T_a}{\left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}}\right)^{1/\phi} \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_n - T_a}{T_n - T_{cr}}\right)^{1/\phi} \theta_u\right]} \quad (4.6)$$

4.2.2 Fórmula Modificada

Os valores dos ensaios realizados por FANG e SHIAU (2004) foram utilizados nas equações (4.4); (4.5) e (4.6). A partir dos resultados encontrados verificou-se a necessidade de um ajuste nas fórmulas dadas, visto que ocorreu uma discrepância elevada para os valores de torção e rigidez obtidos. Esses cálculos são encontrados no Anexo B, Anexo C e Anexo D.

Fundamentado no modelo de TAVIO e TENG (2004) foi proposto um novo modelo com algumas modificações na estrutura do modelo desses autores. As modificações introduzidas são:

- Exponente ϕ

Após realizadas algumas tentativas para determinação do valor de ϕ , chegou-se ao valor ideal, valor este que determina uma curva quase linear, passando a assumir o valor $\phi = 1,02$.

- Coeficiente φ

Para um melhor ajuste da fórmula de torção do modelo de TAVIO e TENG (2004) será introduzido um parâmetro ψ , que deve assumir valores diferentes para cada viga de modo a adequar os valores teóricos aos experimentais (Anexo A).

A fórmula para cálculo do momento torçor é dada por:

$$T = T_n - (T_n - T_{cr}) \psi \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1,02} \quad (4.7)$$

Após o cálculo do momento torçor efetua-se o cálculo da rigidez, introduzindo-se os valores encontrados para o momento torçor nas equações 4.5 e 4.6.

4.2.3 Cálculo da rigidez tangente

Para confirmar nossas indagações foi proposto o cálculo da rigidez tangente, calculada a partir da derivada da equação (4.4), encontrando-se as seguintes expressões:

– Cálculo da rigidez por meio da derivada para $\phi = 2$ (Anexo D):

$$GC = 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

– Cálculo da rigidez por meio da derivada para $\phi = 1,02$ (Anexo E):

$$GC = 1,02 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})}$$

4.3 ENSAIO DE SILVA FILHO (2005)

A viga ensaiada à torção pura no Laboratório de Estruturas e Materiais da PUC por SILVA FILHO (2005) em 09/11/05, com as características mostradas na Figura 4.6, Foto 4.1 e Foto 4.2, fornecem os seguintes resultados:

$$T_{cr} = 14,70 \text{ kN-m} \quad \text{e} \quad \theta_{cr} = 0,00244 \text{ rad/m}$$

$$T_y = 19,07 \text{ kN-m} \quad \text{e} \quad \theta_y = 0,02653 \text{ rad/m}$$

$$T_u = 21,57 \text{ kN-m} \quad \text{e} \quad \theta_u = 0,04 \text{ rad/m}$$

Os cálculos da adequação das curvas $T \times \theta$ dos resultados experimentais fornecem:

- Modelo de TAVIO e TENG (2004):

$$T = 20,687$$

$$(GC)_{\text{sec}} = 779,63$$

$$\frac{T_{\text{y teór}}}{T_{\text{y exp}}} = 8,48\%$$

- Novo Modelo

$$\psi = 1,036$$

$$T = 19,07$$

$$(GC)_{\text{sec}} = 731,82$$

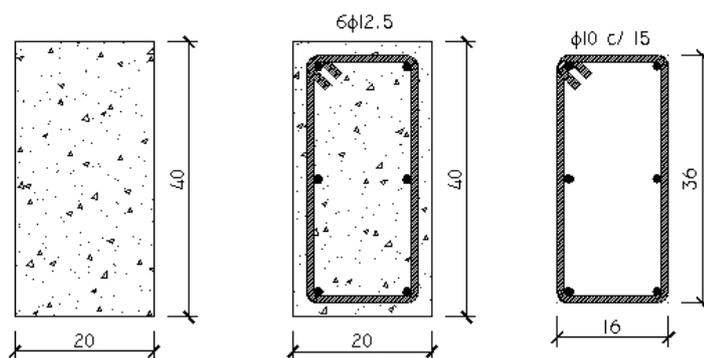


Figura 4.6 – Características da viga VR 20x40; adaptada de SILVA FILHO (2005)

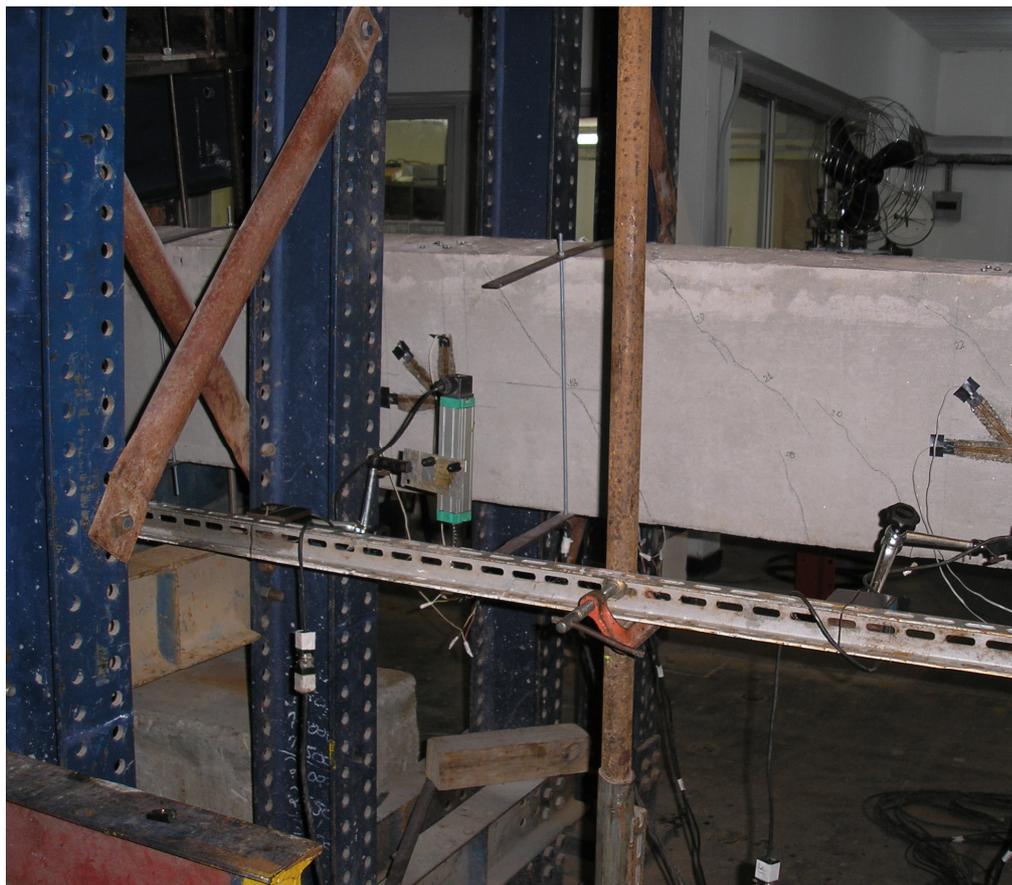


Foto 4.1 - Ensaio de Torção em viga de concreto armado, realizado por SILVA FIHO, 2005.



Foto 4.2 - Ensaio de Torção em viga de concreto armado, realizado por SILVA FIHO,2005.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Coeficiente ψ

Para o cálculo de ψ não foram utilizadas as vigas H-20-20 e N-20-20, pois estas vigas não têm os valores de T_y obtidos nos ensaios de FANG e SHIAU (2004).

O valor de T_{cr} é obtido pela experimentação; por isso o primeiro termo desse vetor deve ser abandonado, pelo fato do intervalo de variação dos valores de T relativos ao trecho não linear da curva $T \times \theta$ ficarem contidos num intervalo aberto à esquerda.

Para a adequação da curva não linear ao momento torçor de fissuração experimental o coeficiente adimensional ψ deve atender aos seguintes intervalos:

$$\psi < 1,0 \text{ para } T \leq T_{cr}$$

$$\psi = \text{variável para } T_{cr} < T \leq T_u$$

Vigas de concreto de Alta Resistência

Viga H-06-06

Os gráficos foram obtidos por meio dos pontos calculados com as curvas teóricas para $\phi = 2$; $\psi = 1,0$ e para $\phi = 1,02$; $\psi = \text{var.}$ (Anexo F)

O Gráfico 1.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 1.b $T \times \theta$ é praticamente linear no trecho $T_{cr} - T_u$, com o valor de $T_{y\text{exp}}$ contido na curva.

O Gráfico 1.c mostra a comparação das duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que a curva de TAVIO e TENG (2004) tem o valor de $T_{yteór}$ 6,33%, superior ao valor experimental, enquanto na curva calculada pelo modelo proposto esses valores são iguais.

No Gráfico 1.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0351\theta^2 + 1,8187\theta + 68,449$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9999$; no Gráfico 1.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0011\theta^2 + 0,8897\theta + 69,535$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$. O Gráfico 1.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga H-06-12

O Gráfico 2.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 2.b $T \times \theta$ é praticamente linear no trecho $T_{cr} - T_u$, com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 2.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 24,50% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto essa diferença é de 12,85%, ou seja, cerca de 52% menor.

No Gráfico 2.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0702\theta^2 + 3,5663\theta + 69,808$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 2.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0019\theta^2 + 1,7327\theta + 72,378$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$. O Gráfico 1.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga H-12-12

O Gráfico 3.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 3.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 3.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 12,85% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 3.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0587\theta^2 + 4,4375\theta + 71,431$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 3.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0137\theta^2 + 2,5724\theta + 76,718$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9951$. O Gráfico 3.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga H-12-16

O Gráfico 4.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 4.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 4.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004), $T_{yteór}$ é 7,33% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 4.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0821\theta^2 + 6,4537\theta + 69,184$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 4.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0518\theta^2 + 4,7978\theta + 83,147$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,958$. O Gráfico 4.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga H-20-20

A viga H-20-20 não foi analisada pois não tem os dados experimentais de $T \times \theta$ completos, visto faltar o valor experimental de T_y .

Viga H-07-10

O Gráfico 5.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 5.b $T \times \theta$ é praticamente linear no trecho $T_{cr} - T_u$, com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 5.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004), $T_{yteór}$ é 15,13% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 5.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0563\theta^2 + 3,7371\theta + 64,665$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 5.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0005\theta^2 + 1,8064\theta + 67,338$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9999$. O Gráfico 5.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga H-14-10

O Gráfico 6.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 6.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva

O Gráfico 6.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 17,80% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 6.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0548\theta^2 + 4,1753\theta + 55,66$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 6.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = 0,0031\theta^2 + 1,9241\theta + 57,878$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9993$. O Gráfico 6.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga H-07-16

O Gráfico 7.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 7.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva

O Gráfico 7.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 23,60% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 7.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0611\theta^2 + 4,5834\theta + 58,562$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 6.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = 0,0068\theta^2 + 2,0224\theta + 59,8$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9976$. O Gráfico 7.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Vigas de concreto de Alta Resistência

Viga N-06-06

O Gráfico 8.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 8.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva

O Gráfico 8.c mostra a comparação das duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que a curva de TAVIO e TENG (2004) tem o valor de $T_{yteór}$ 3,72%, que é superior ao valor experimental, enquanto na nova curva analisada esses valores são iguais.

No Gráfico 8.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,012\theta^2 + 1,356\theta + 41,325$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 8.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0104\theta^2 + 1,1541\theta + 45,696$

para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9343$. O Gráfico 8.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga N-06-12

O Gráfico 9.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 9.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva

O Gráfico 9.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 6,98% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto esses valores são iguais.

No Gráfico 9.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0296\theta^2 + 2,384\theta + 47,149$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 9.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0157\theta^2 + 1,677\theta + 51,751$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9743$. O Gráfico 9.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga N-12-12

O Gráfico 10.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 10.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 10.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 1,80% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 10.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0322\theta^2 + 3,0505\theta + 44,501$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 10.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste

$y = -0,0465\theta^2 + 3,4986\theta + 50,925$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9127$. O Gráfico 10.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga N-12-16

O Gráfico 11.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 11.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 11.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 6,29% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 11.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0557\theta^2 + 4,4808\theta + 47,936$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 11.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0427\theta^2 + 3,6917\theta + 55,242$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9683$. O Gráfico 11.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga N-20-20

A viga H-20-20 não foi analisada pois não tem os dados experimentais de $T \times \theta$ completos, visto faltar o valor experimental de T_y .

Viga N-07-10

O Gráfico 12.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 12.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 12.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 2,94% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 12.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = 1,3376\theta + 49,04$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9241$; no Gráfico 12.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = -0,0232\theta^2 + 2,3853\theta + 46,783$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9106$. O Gráfico 12.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga N-14-10

O Gráfico 13.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 13.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_{yexp} contido na curva.

O Gráfico 13.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 5,57% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 13.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0259\theta^2 + 3,0434\theta + 35,523$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 13.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = 0,0233\theta^2 + 2,6464\theta + 45,53$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,937$. O Gráfico 13.f mostra a comparação dessas duas curvas.

Viga N-07-16

O Gráfico 14.a $T \times \theta$ mostra uma curvatura nos trechos $T_{cr} - T_y$ e $T_y - T_u$.

O Gráfico 14.b $T \times \theta$ apresenta pequena curvatura nos pontos próximos ao valor de T_{cr} , com o valor de T_y contido na curva.

O Gráfico 14.c mostra a comparação entre as duas curvas $T \times \theta$, ressaltando-se que para a curva de TAVIO e TENG (2004) $T_{yteór}$ é 9,03% superior ao valor experimental, enquanto no modelo proposto os dois valores coincidem.

No Gráfico 14.d tem-se para o modelo de TAVIO e TENG (2004) a curva de ajuste $y = -0,0294\theta^2 + 3,1253\theta + 34,168$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 1$; no Gráfico 14.e para o modelo proposto tem-se a curva de ajuste $y = 0,0188\theta^2 + 2,3528\theta + 42,328$ para o trecho $T_{cr} - T_u$, com $R^2 = 0,9631$. O Gráfico 14.f mostra a comparação dessas duas curvas.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

O modelo proposto foi verificado com resultados experimentais obtidos na literatura.

Na bibliografia pesquisada não foram encontradas muitos resultados de vigas ensaiadas à torção pura com dados completos, isto é, com o par (T, θ) em tabelas.

Para as vigas de concreto de alta resistência verificou-se que o novo modelo é mais adequado para o ajuste da curva $T \times \theta$, visto conter o ponto $T_{y\text{exp}}$, o que não ocorre no modelo de TAVIO e TENG (2004). A quase linearidade da curva $T \times \theta$ no trecho $T_{cr} - T_u$, contendo o valor de $T_{y\text{exp}}$, representa de modo mais adequado o comportamento de vigas de concreto de alta resistência.

Para as vigas de concreto normal verifica-se que o modelo de TAVIO e TENG (2004) apresentou melhor adequação para os valores de T_y , quando comparado com os resultados obtidos pelo novo modelo para as vigas de concreto de alta resistência. Esse comportamento é explicado pelo fato da curva $\sigma \times \varepsilon$ do concreto de alta resistência ser praticamente linear, enquanto essa curva para o concreto normal é de 2º grau, e como o modelo de TAVIO e TENG (2004) é representado por uma expressão do 2º grau, isso explica essa melhor adequação aos valores das vigas de concreto normal.

6.1 RIGIDEZ SECANTE

6.1.1 Concreto de Alta Resistência

As curvas de ajuste dos valores de T_y para os dois modelos são aproximadas, pois tem-se apenas dois valores de f_c para o concreto de alta

resistência, o que leva a uma reta cujos pontos inicial e final são obtidos por meio do ajuste dos valores teóricos nesses extremos (ANEXO G).

O modelo de TAVIO e TENG (2004) indica uma maior inclinação da reta de ajuste, mostrando uma maior variabilidade de $(GC)_{sec}$. O novo modelo indica que $(GC)_{sec}$ pouco varia com f_c verifica-se a rigidez secante aumenta com a resistência do concreto f_c .

6.1.2 Concreto de Resistência Normal

As mesmas peculiaridades descritas para o concreto de alta resistência se aplicam aos ajustes das curvas para o concreto normal.

Par esse tipo de concreto o modelo de TAVIO e TENG (2004) fornece uma menor inclinação da reta de ajuste, mostrando menor variabilidade de $(GC)_{sec}$ do que a do novo modelo verifica-se a rigidez secante aumenta com o f_c .

Os ajustes das curvas teóricas não apresentam bons resultados de R^2 , visto que só existem pontos extremos do par $[f_c, (GC)_{sec}]$ para serem ajustados.

6.2 RIGIDEZ TANGENTE

Para a viga H-06-12 o modelo de TAVIO e TENG (2004) forneceu um resultado negativo para o valor de $(GC)_{tag}$. Pelas análises efetuadas verificou-se que os resultados obtidos com essa viga apresentaram discrepâncias em relação aos valores teóricos, sendo que no novo modelo esses dados levaram a um valor $T_{y teor}$ diferente do $T_{y exp}$ (ANEXO H).

Para o concreto normal observa-se que o modelo de TAVIO e TENG (2004) apresenta ligeiro decréscimo do valor da rigidez secante quando do aumento da resistência do concreto f_c , o que não é consistente.

Esses dados não são conclusivos pois o ajuste das curvas foram feitos apenas com pontos extremos do par $[f_c, (GC)_{sec}]$.

A análise dos resultados calculados com os dados de SILVA FILHO (2005) mostram que:

- a) o modelo de TAVIO e TENG (2004) fornece um valor de 8,40% superior para $T_{yteór}$ em relação ao valor experimental, e no novo modelo esses valores coincidem;
- b) a rigidez secante para o escoamento obtida com o modelo de TAVIO e TENG (2004) foi 779,63 kN-m², e o valor do novo modelo foi 731,82 kN-m², ou seja, 6,01% inferior.

Essa análise comprova que o novo modelo é mais eficaz, pois o dado fundamental para o cálculo de $(GC)_{sec}$, é o valor T_{yexp} , que não é alterado, e o valor obtido pelo modelo de TAVIO e TENG (2004), o que fica à favor da segurança.

O modelo proposto apresenta-se como mais adequado para representar a relação $T \times \theta$ e os valores da rigidez secante $(GC)_{sec}$.

Como continuação deste trabalho seria interessante a realização dos ensaios de série de vigas solicitadas à torção, com pelo menos seis vigas em cada série. Sendo que nesses ensaios seriam obtidas as rizezas de modo a se estabelecer uma formulação teórica mais consistente.

Uma outra possibilidade seria confrontar a formulação estudada para resultados de ensaios de concretos de alta resistência encontrados na literatura, visto ser esse o material atualmente usado em pontes e grandes estruturas, onde, em geral tem-se um momento torçor atuante de grande magnitude.

Uma outra análise que pode ser efetuada é comparar os resultados obtidos com os modelos de LAMPERT (1973) e de HSU (1984), de modo a se determinar a rigidez secante para o momento último de torção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI 318/2002 – "Building Code Requirements for structural Concrete" , Farmington hills, MI USA,2002.

ACI 318/2003 – "**Building Code Requirements for structural Concrete**" , Farmington hills, MI USA,2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. "**Projeto de Estruturas de Concreto, NBR – 6118 (2000)**". ABNT, Rio de Janeiro, 2000.

CHEN, W. F., & LUI, E. M., "**Structural Stability Theory and Implementation**". Elsevier,1987.

COLLINS, M. P., and MITCHELL, D., " **Diagonal Compression Field Theory A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion**", ACI Journal, Proceedings,1980.

Eurocode 2. "**Design of Concrete Structures**". Comité Euro-International du Béton, 1992.

FANG, I.K., E SHIAU, J.K., "**Torsional Behavior of Normal and High-Strength Concrete Beams**", ACI Structural Journal, Proceedings V.101, No.3, May-June 2004. p.304-313.

HSU, T.T.C. "**Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams**". Journal of Structural Division - ASCE, Vol. 94, No ST3, p. 485-510, 1968.

HSU, T.T.C. "**Unified Theory of Reinforced Concrete**". CRC Press, 1993.

HSU, T.T.C.; BURTON, K.T. "**Design of Reinforced Concrete Sprandel Beams**". Journal of Structural Division - ASCE, Vol. 100, No ST1 p. 209-229, 1974.

HSU, T.T.C., "**Torsion of Reinforced Concrete**", Van Nostrand Reinhold Company Inc; USA,1984.

KARLSSON, I., "**Torsionalstiffness of Reinforced Concrete Structures in Pure Torsion**". Division of Concrete Structures- Report 71-1, Chalmers University of Technology, 1971.

KARLSSON, I.; ELFGREN, L., **“Torsional Stiffness of Reinforced Concrete Members Subjected to Pure Torsion”**. Magazine of Concrete Research, v. 24, No 80, p. 149-156, 1972.

LAMPERT, P., **“Postcracking Stiffness of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending”**, Farming Hills, 1973.

NAWY, E. G., **“Reinforced Concrete A Fundamental Approach”**. Prentice-Hall Inc, 1985.

PARK, R., PAULAY, T., **“ Reinforced Concrete Structures”**, John Wiley & Sons, New York, 1975.

REGAN. **“Basic Design for Moment, Shear and Torsion”**. FIB Bulletin 2: Structural Concrete – Textbook on Behaviour, Design and Performance, vol.2, p. 156-169, 1999.

SÁNCHEZ, E., **“Dimensionamento à Torção : Novas Prescrições Normativas Brasileiras”**, Nova Normalização Brasileira para o Concreto Estrutural; Editora Interciência UFJF. p.155-185, 1999.

SÁNCHEZ, E., **“Some Remarks on the Warping Torsion of the Structural Concrete Beams”**, Ibracon, 2004.

SÁNCHEZ, E., **“As Prescrições da NB-1/2003 sobre Dimensionamento à Torção”**, 2004.

SILVA FILHO, J. H., **“ Estudo Teórico -Experimental de Vigas de Concreto Armado Solicitadas à Torção Reforçadas com Compósitos de Fibra de Carbono”** , Pontifca Católica do Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, 2005 (em andamento).

TAVIO E TENG, S., **“Effective Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Members”**, ACI Structural Journal, Proceedings V.101, No.2, March-April 2004. p.p.252-260.

ZIA, P. **“What Do We Know About Torsion in Concrete Members?”** Journal of Structural Division - ASCE, v. 96, No ST6, p. 1185-1199, 1970.

ANEXO A

Cálculo de ψ

Viga H-06-06

$$T_u := 92.0$$

$$T_{cr} := 70.6$$

$$\theta_u := 26.1$$

$$\theta_{cr} := 1.2$$

$$\theta_y := 11.6$$

$$T_{yexp} := 79.7$$

$$T_{yexp} = T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot (\psi) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.998$$

Viga H-06-12

$$T_u := 115.1$$

$$T_{cr} := 75.0$$

$$\theta_u := 25.4$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$\theta_y := 12.8$$

$$T_{yexp} := 83.5$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 1.514$$

Viga H-12-12

$$T_u := 155.3$$

$$T_{cr} := 77.1$$

$$\theta_u := 37.8$$

$$\theta_{cr} := 1.3$$

$$\theta_y := 17.5$$

$$T_{yexp} := 116.8$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.896$$

Viga H-12-16

$$T_u := 196.0$$

$$T_{cr} := 79.3$$

$$\theta_u := 39.3$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$\theta_y := 21.6$$

$$T_{yexp} := 157.6$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.698$$

Viga H-20-20

$$T_u := 239.6$$

$$T_{cr} := 76.6$$

$$\theta_u := 46.5$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$\theta_y := 0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 1.415$$

Viga H-07-10

$$T_u := 126.7$$

$$T_{cr} := 70.5$$

$$\theta_u := 33.2$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$\theta_y := 13.2$$

$$T_{yexp} := 91.1$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 1.01$$

Viga H-14-10

$$T_u := 135.2$$

$$T_{cr} := 61.8$$

$$\theta_u := 38.1$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$\theta_y := 21.6$$

$$T_{yexp} := 100.6$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 1.042$$

Viga H-07-16

$$T_u := 144.5$$

$$T_{cr} := 65.3$$

$$\theta_u := 37.5$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$\theta_y := 14.3$$

$$T_{yexp} := 90.3$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 1.071$$

Vigas de concreto de Resistência Normal

Viga N-06-06

$$T_u := 79.7$$

$$T_{cr} := 43.2$$

$$\theta_u := 56.6$$

$$\theta_{cr} := 1.4$$

$$\theta_y := 35.1$$

$$T_{yexp} := 71.5$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.588$$

Viga N-06-12

$$T_u := 95.2$$

$$T_{cr} := 51.8$$

$$\theta_u := 40.3$$

$$\theta_{cr} := 2.0$$

$$\theta_y := 23.2$$

$$T_{yexp} := 80.9$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.75$$

Viga N-12-12

$$T_u := 116.8$$

$$T_{cr} := 49.3$$

$$\theta_u := 47.4$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$\theta_y := 40.0$$

$$T_{yexp} := 113.0$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.361$$

Viga N-12-16

$$T_u := 138.0$$

$$T_{cr} := 57.1$$

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$\theta_y := 30.6$$

$$T_{yexp} := 125.0$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.656$$

Viga N-20-20

$$T_u := 158.0$$

$$T_{cr} := 55.0$$

$$\theta_u := 43.2$$

$$\theta_{cr} := 2.2$$

$$\theta_y := 0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 1.454$$

Viga N-07-10

$$T_u := 111.7$$

$$T_{cr} := 41.6$$

$$\theta_u := 54.4$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$\theta_y := 30.0$$

$$T_{yexp} := 93.8$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.558$$

Viga N-14-10

$$T_u := 125.0$$

$$T_{cr} := 41.8$$

$$\theta_u := 58.8$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$\theta_y := 38.2$$

$$T_{yexp} := 108.0$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.574$$

Viga N-07-16

$$T_u := 117.3$$

$$T_{cr} := 40.0$$

$$\theta_u := 53.2$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$\theta_y := 31.5$$

$$T_{yexp} := 94.5$$

$$\psi := \frac{T_{yexp} - T_u}{-(T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_y}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}}$$

$$\psi = 0.697$$

ANEXO B

Cálculo da Torção

Vigas de Concreto de Alta Resistência

Viga H-06-06

$$\theta_u := 26.1$$

$$\theta_{cr} := 1.2$$

$$T_u := 92.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 3.8 \\ 6.4 \\ 9.0 \\ 11.6 \\ 16.4 \\ 21.2 \\ 26.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 70.6$$

$$T_{yexp} := 79.7$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 70.6 \\ 74.836 \\ 78.605 \\ 81.907 \\ 84.743 \\ 88.752 \\ 91.171 \\ 92 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 84.743$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.063$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.998$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 70.643 \\ 72.915 \\ 75.182 \\ 77.443 \\ 79.697 \\ 83.836 \\ 87.932 \\ 92 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 79.697$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga H-06-12

$$\theta_u := 25.4$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.3 \\ 7.1 \\ 9.9 \\ 12.8 \\ 17.0 \\ 21.2 \\ 25.4 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 115.1$$

$$T_{cr} := 75.0$$

$$T_{yexp} := 83.5$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 75 \\ 83.845 \\ 91.59 \\ 98.234 \\ 103.955 \\ 110.147 \\ 113.862 \\ 115.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 103.955$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.245$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.0$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 75 \\ 79.786 \\ 84.559 \\ 89.318 \\ 94.228 \\ 101.298 \\ 108.294 \\ 115.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 94.228$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.128$$

Viga H-12-12

$$\theta_u := 37.8$$

$$\theta_{cr} := 1.3$$

$$T_u := 155.3$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 5.3 \\ 9.3 \\ 13.3 \\ 17.5 \\ 24.2 \\ 30.9 \\ 37.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 77.1$$

$$T_{\text{exp}} := 116.8$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 77.1 \\ 93.301 \\ 107.623 \\ 120.067 \\ 131.111 \\ 144.443 \\ 152.505 \\ 155.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 131.11$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.123$$

$$\phi := 1.0$$

$$\psi := 0.89$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 85.233 \\ 93.056 \\ 100.86 \\ 108.642 \\ 116.786 \\ 129.703 \\ 142.488 \\ 155.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 116.786$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga H-12-16

$$\theta_u := 39.2$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 196.0$$

$$T_{cr} := 79.3$$

$$T_{yexp} := 157.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 6.4 \\ 11.2 \\ 16.0 \\ 21.0 \\ 27.1 \\ 33.2 \\ 39.3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 79.3 \\ 107.125 \\ 131.166 \\ 151.424 \\ 168.503 \\ 183.779 \\ 192.945 \\ 196 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 168.50$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.073$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.698$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 114.543 \\ 125.108 \\ 135.641 \\ 146.139 \\ 157.028 \\ 170.228 \\ 183.291 \\ 196 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 157.028$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga H-20-20

$$\theta_u := 46.5$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 239.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 8.0 \\ 14.4 \\ 20.8 \\ 27.2 \\ 33.6 \\ 40.0 \\ 46.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 76.0$$

$$T_{\text{exp}} := 0$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 76 \\ 119.156 \\ 155.688 \\ 185.598 \\ 208.883 \\ 225.545 \\ 235.584 \\ 239 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.0$$

$$T := Tu - (Tu - Tcr) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 76 \\ 99.663 \\ 123.247 \\ 146.737 \\ 170.109 \\ 193.323 \\ 216.298 \\ 239 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-10

$$\theta_u := 33.2$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$Tu := 126.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4.5 \\ 7.4 \\ 10.3 \\ 13.2 \\ 19.8 \\ 26.4 \\ 33.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 70.5$$

$$T_{yexp} := 91.1$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 70.5 \\ 80.342 \\ 89.237 \\ 97.186 \\ 104.188 \\ 116.594 \\ 124.098 \\ 126.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 104.188$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.144$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.01$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 69.938 \\ 75.246 \\ 80.544 \\ 85.83 \\ 91.102 \\ 103.04 \\ 114.855 \\ 126.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 91.102$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga H-14-10

$$\theta_u := 38.1$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 135.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 6.3 \\ 11.1 \\ 15.9 \\ 21.0 \\ 26.7 \\ 32.4 \\ 38.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 61.8$$

$$T_{\text{exp}} := 100.0$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 61.8 \\ 79.79 \\ 95.255 \\ 108.195 \\ 119.178 \\ 128.079 \\ 133.42 \\ 135.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 119.178$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.192$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.042$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 58.717 \\ 68.934 \\ 79.121 \\ 89.27 \\ 100.006 \\ 111.927 \\ 123.724 \\ 135.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 100.006$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga H-07-16

$$\theta_u := 37.5$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 144.5$$

$$T_{cr} := 65.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.7 \\ 7.9 \\ 11.1 \\ 14.3 \\ 22.0 \\ 29.7 \\ 37.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 90.3$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 65.3 \\ 78.754 \\ 90.957 \\ 101.908 \\ 111.608 \\ 129.818 \\ 140.782 \\ 144.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 111.608$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.236$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.071$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 59.677 \\ 67.36 \\ 75.029 \\ 82.681 \\ 90.314 \\ 108.589 \\ 126.675 \\ 144.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 112.72'$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.248$$

Vigas de Concreto de Resistência Normal

Viga N-06-06

$$\theta_u := 56.6$$

$$\theta_{cr} := 1.4$$

$$T_u := 79.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.4 \\ 9.8 \\ 18.2 \\ 26.6 \\ 35.1 \\ 42.2 \\ 49.3 \\ 56.6 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 43.2$$

$$T_{\text{exp}} := 71.5$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 43.2 \\ 53.463 \\ 62.036 \\ 68.919 \\ 74.163 \\ 77.216 \\ 79.062 \\ 79.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 74.163$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.037$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.588$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 58.238 \\ 61.564 \\ 64.878 \\ 68.177 \\ 71.497 \\ 74.25 \\ 76.974 \\ 79.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 71.497$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga N-06-12

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.0$$

$$T_u := 95.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.0 \\ 7.3 \\ 12.6 \\ 17.9 \\ 23.2 \\ 28.9 \\ 34.6 \\ 40.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 51.8$$

$$T_{yexp} := 80.9$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 51.8 \\ 62.98 \\ 72.499 \\ 80.355 \\ 86.549 \\ 91.355 \\ 94.239 \\ 95.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 86.549$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.07$$

$$\phi := 1.07$$

$$\psi := 0.75$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 62.65 \\ 67.238 \\ 71.811 \\ 76.366 \\ 80.9 \\ 85.743 \\ 90.537 \\ 95.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 80.9$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga N-12-12

$$\theta_u := 47.4$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 116.8$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 11.2 \\ 20.8 \\ 30.4 \\ 40.0 \\ 42.4 \\ 44.8 \\ 47.4 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 49.3$$

$$T_{\text{exp}} := 113.0$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 49.3 \\ 74.631 \\ 94.031 \\ 107.5 \\ 115.038 \\ 115.996 \\ 116.582 \\ 116.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 115.038$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.018$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.361$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr})\psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 92.433 \\ 97.63 \\ 102.801 \\ 107.933 \\ 113.004 \\ 114.255 \\ 115.494 \\ 116.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 113.004$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga N-12-16

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.1 \\ 9.2 \\ 16.3 \\ 23.4 \\ 30.6 \\ 33.8 \\ 37.0 \\ 40.2 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 138.0$$

$$T_{cr} := 57.1$$

$$T_{yexp} := 125.0$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 57.1 \\ 84.442 \\ 106.166 \\ 122.27 \\ 132.864 \\ 135.717 \\ 137.429 \\ 138 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 132.86$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.063$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.65$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 84.93 \\ 94.997 \\ 105.018 \\ 114.979 \\ 124.992 \\ 129.398 \\ 133.758 \\ 138 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 124.99$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

Viga N-20-20

$$\theta_u := 43.2$$

$$\theta_{cr} := 2.2$$

$$T_u := 158.0$$

$$T_{cr} := 55.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.2 \\ 8.0 \\ 13.8 \\ 19.6 \\ 25.4 \\ 31.2 \\ 37.0 \\ 43.2 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 55 \\ 82.08 \\ 105.038 \\ 123.873 \\ 138.586 \\ 149.177 \\ 155.645 \\ 158 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.0$$

$$T := Tu - (Tu - Tcr) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 55 \\ 69.84 \\ 84.631 \\ 99.364 \\ 114.023 \\ 128.585 \\ 143.002 \\ 158 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-10

$$\theta_u := 54.4$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$Tu := 111.7$$

$$Tcr := 41.6$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 8.9 \\ 15.9 \\ 22.9 \\ 30.0 \\ 38.1 \\ 46.2 \\ 54.4 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 93.8$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 41.6 \\ 59.047 \\ 74.002 \\ 86.464 \\ 96.558 \\ 104.943 \\ 109.99 \\ 111.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 96.558$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.029$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.558$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 72.584 \\ 77.897 \\ 83.192 \\ 88.469 \\ 93.797 \\ 99.836 \\ 105.813 \\ 111.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 99.127$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.057$$

Viga N-14-10

$$\theta_u := 58.8$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$T_u := 125.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.1 \\ 20.1 \\ 29.1 \\ 38.2 \\ 45.0 \\ 51.8 \\ 58.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.8$$

$$T_{\text{exp}} := 108.0$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 41.8 \\ 66.116 \\ 86.24 \\ 102.172 \\ 114.018 \\ 120.071 \\ 123.732 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 114.018$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.056$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.574$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 77.243 \\ 84.962 \\ 92.652 \\ 100.306 \\ 107.997 \\ 113.701 \\ 119.346 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 113.388$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1.05$$

Viga N-07-16

$$\theta_u := 53.2$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 117.3$$

$$T_{cr} := 40.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 9.3 \\ 16.7 \\ 24.1 \\ 31.5 \\ 38.7 \\ 45.9 \\ 53.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 94.9$$

$$\phi := 2$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 40 \\ 60.693 \\ 78.168 \\ 92.427 \\ 103.469 \\ 111.124 \\ 115.735 \\ 117.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{yteórico} := 103.469$$

$$\frac{T_{yteórico}}{T_{yexp}} = 1.09$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.697$$

$$T := T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta_a}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^\phi$$

$$T = \begin{pmatrix} 63.422 \\ 71.337 \\ 79.226 \\ 87.082 \\ 94.898 \\ 102.451 \\ 109.926 \\ 117.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{teórico}} := 94.898$$

$$\frac{T_{\text{teórico}}}{T_{\text{exp}}} = 1$$

ANEXO C

Cálculo da Rigidez

Vigas de Concreto de Alta Resistência

Viga H-06-06

$$\theta_u := 26.1$$

$$\theta_{cr} := 1.2$$

$$T_u := 92.0$$

$$T_{cr} := 70.6$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 70.6 \\ 74.836 \\ 78.605 \\ 81.907 \\ 84.743 \\ 88.752 \\ 91.171 \\ 92 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 79.7$$

$$\beta := 0.5$$

$$\phi := 2$$

$$i := 0..7$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5.883 \times 10^4 \\ 1.969 \times 10^4 \\ 1.228 \times 10^4 \\ 9.101 \times 10^3 \\ 7.305 \times 10^3 \\ 5.412 \times 10^3 \\ 4.301 \times 10^3 \\ 3.525 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 5.883 \times 10^4 \\ 1.969 \times 10^4 \\ 1.228 \times 10^4 \\ 9.101 \times 10^3 \\ 7.305 \times 10^3 \\ 5.412 \times 10^3 \\ 4.301 \times 10^3 \\ 3.525 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 0.998$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 70.6 \\ 72.915 \\ 75.182 \\ 77.443 \\ 79.697 \\ 83.836 \\ 87.932 \\ 92 \end{pmatrix}$$

$$\beta := 0.9804$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5.883 \times 10^4 \\ 1.897 \times 10^4 \\ 1.168 \times 10^4 \\ 8.573 \times 10^3 \\ 6.853 \times 10^3 \\ 5.106 \times 10^3 \\ 4.146 \times 10^3 \\ 3.525 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 5.883 \times 10^4 \\ 1.897 \times 10^4 \\ 1.168 \times 10^4 \\ 8.573 \times 10^3 \\ 6.853 \times 10^3 \\ 5.106 \times 10^3 \\ 4.146 \times 10^3 \\ 3.525 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-06-12

$$\theta_u := 25.4$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 115.1$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 75 \\ 83.845 \\ 91.59 \\ 98.234 \\ 103.955 \\ 110.147 \\ 113.862 \\ 115.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 75.0$$

$$T_{yexp} := 83.5$$

$$\beta := 0.5$$

$$\phi := 2$$

$$i := 0..7$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5 \times 10^4 \\ 1.95 \times 10^4 \\ 1.29 \times 10^4 \\ 9.923 \times 10^3 \\ 8.121 \times 10^3 \\ 6.479 \times 10^3 \\ 5.371 \times 10^3 \\ 4.531 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 5 \times 10^4 \\ 1.95 \times 10^4 \\ 1.29 \times 10^4 \\ 9.923 \times 10^3 \\ 8.121 \times 10^3 \\ 6.479 \times 10^3 \\ 5.371 \times 10^3 \\ 4.531 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.9802$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 75 \\ 79.786 \\ 84.559 \\ 89.318 \\ 94.228 \\ 101.298 \\ 108.294 \\ 115.1 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 1$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5 \times 10^4 \\ 1.855 \times 10^4 \\ 1.191 \times 10^4 \\ 9.022 \times 10^3 \\ 7.362 \times 10^3 \\ 5.959 \times 10^3 \\ 5.108 \times 10^3 \\ 4.531 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 5 \times 10^4 \\ 1.855 \times 10^4 \\ 1.191 \times 10^4 \\ 9.022 \times 10^3 \\ 7.362 \times 10^3 \\ 5.959 \times 10^3 \\ 5.108 \times 10^3 \\ 4.531 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-12-12

$$\theta_u := 37.8$$

$$\theta_{cr} := 1.3$$

$$T_u := 155.3$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 77.1 \\ 93.301 \\ 107.623 \\ 120.067 \\ 131.111 \\ 144.443 \\ 152.505 \\ 155.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 77.1$$

$$T_{yexp} := 116.8$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5.931 \times 10^4 \\ 1.76 \times 10^4 \\ 1.157 \times 10^4 \\ 9.028 \times 10^3 \\ 7.492 \times 10^3 \\ 5.969 \times 10^3 \\ 4.936 \times 10^3 \\ 4.108 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 5.931 \times 10^4 \\ 1.76 \times 10^4 \\ 1.157 \times 10^4 \\ 9.028 \times 10^3 \\ 7.492 \times 10^3 \\ 5.969 \times 10^3 \\ 4.936 \times 10^3 \\ 4.108 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$T_{a_i} := \begin{pmatrix} 77.1 \\ 93.056 \\ 100.86 \\ 108.642 \\ 116.786 \\ 129.703 \\ 142.488 \\ 155.3 \end{pmatrix}$$

$$\beta := 0.9804$$

$$\psi := 0.896$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5.931 \times 10^4 \\ 1.08 \times 10^4 \\ 8.261 \times 10^3 \\ 6.876 \times 10^3 \\ 5.967 \times 10^3 \\ 5.069 \times 10^3 \\ 4.509 \times 10^3 \\ 4.108 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 5.931 \times 10^4 \\ 1.08 \times 10^4 \\ 8.261 \times 10^3 \\ 6.876 \times 10^3 \\ 5.967 \times 10^3 \\ 5.069 \times 10^3 \\ 4.509 \times 10^3 \\ 4.108 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-12-16

$$\theta_u := 39.3$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 196.0$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 79.3 \\ 107.125 \\ 131.166 \\ 151.424 \\ 168.503 \\ 183.779 \\ 192.945 \\ 196 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 79.3$$

$$T_{yexp} := 157.0$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.956 \times 10^4 \\ 1.674 \times 10^4 \\ 1.171 \times 10^4 \\ 9.464 \times 10^3 \\ 8.024 \times 10^3 \\ 6.782 \times 10^3 \\ 5.812 \times 10^3 \\ 4.987 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 4.956 \times 10^4 \\ 1.674 \times 10^4 \\ 1.171 \times 10^4 \\ 9.464 \times 10^3 \\ 8.024 \times 10^3 \\ 6.782 \times 10^3 \\ 5.812 \times 10^3 \\ 4.987 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.9802$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 79.3 \\ 125.108 \\ 135.641 \\ 146.139 \\ 157.028 \\ 170.228 \\ 183.291 \\ 196 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 0.69\xi$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.956 \times 10^4 \\ 7.735 \times 10^3 \\ 6.939 \times 10^3 \\ 6.376 \times 10^3 \\ 5.94 \times 10^3 \\ 5.541 \times 10^3 \\ 5.235 \times 10^3 \\ 4.987 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.956 \times 10^4 \\ 7.735 \times 10^3 \\ 6.939 \times 10^3 \\ 6.376 \times 10^3 \\ 5.94 \times 10^3 \\ 5.541 \times 10^3 \\ 5.235 \times 10^3 \\ 4.987 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-20-20

$$\theta_u := 46.5$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 239.0$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 76 \\ 119.156 \\ 155.688 \\ 185.598 \\ 208.883 \\ 225.545 \\ 235.584 \\ 239 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 76.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.75 \times 10^4 \\ 1.489 \times 10^4 \\ 1.081 \times 10^4 \\ 8.923 \times 10^3 \\ 7.68 \times 10^3 \\ 6.713 \times 10^3 \\ 5.89 \times 10^3 \\ 5.14 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 4.75 \times 10^4 \\ 1.489 \times 10^4 \\ 1.081 \times 10^4 \\ 8.923 \times 10^3 \\ 7.68 \times 10^3 \\ 6.713 \times 10^3 \\ 5.89 \times 10^3 \\ 5.14 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.9802$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 76 \\ 99.663 \\ 123.247 \\ 146.737 \\ 170.109 \\ 193.323 \\ 216.298 \\ 239 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 1$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.75 \times 10^4 \\ 1.246 \times 10^4 \\ 8.559 \times 10^3 \\ 7.055 \times 10^3 \\ 6.254 \times 10^3 \\ 5.754 \times 10^3 \\ 5.407 \times 10^3 \\ 5.14 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.75 \times 10^4 \\ 1.246 \times 10^4 \\ 8.559 \times 10^3 \\ 7.055 \times 10^3 \\ 6.254 \times 10^3 \\ 5.754 \times 10^3 \\ 5.407 \times 10^3 \\ 5.14 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-10

$$\theta_u := 33.2$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 126.7$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 70.5 \\ 80.342 \\ 89.237 \\ 97.186 \\ 104.188 \\ 116.594 \\ 124.098 \\ 126.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 70.5$$

$$T_{yexp} := 91.1$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.406 \times 10^4 \\ 1.785 \times 10^4 \\ 1.206 \times 10^4 \\ 9.435 \times 10^3 \\ 7.893 \times 10^3 \\ 5.889 \times 10^3 \\ 4.701 \times 10^3 \\ 3.816 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 4.406 \times 10^4 \\ 1.785 \times 10^4 \\ 1.206 \times 10^4 \\ 9.435 \times 10^3 \\ 7.893 \times 10^3 \\ 5.889 \times 10^3 \\ 4.701 \times 10^3 \\ 3.816 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.9802$$

$$\psi := 1.01$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 70.5 \\ 75.246 \\ 80.544 \\ 85.83 \\ 91.102 \\ 103.04 \\ 114.855 \\ 126.7 \end{pmatrix}$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - Tcr} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.406 \times 10^4 \\ 1.784 \times 10^4 \\ 1.127 \times 10^4 \\ 8.518 \times 10^3 \\ 7.006 \times 10^3 \\ 5.239 \times 10^3 \\ 4.362 \times 10^3 \\ 3.816 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - Tcr} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - Tcr} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.406 \times 10^4 \\ 1.784 \times 10^4 \\ 1.127 \times 10^4 \\ 8.518 \times 10^3 \\ 7.006 \times 10^3 \\ 5.239 \times 10^3 \\ 4.362 \times 10^3 \\ 3.816 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-14-10

$$\theta_u := 38.1$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 135.2$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 61.8 \\ 79.79 \\ 95.255 \\ 108.195 \\ 119.178 \\ 128.079 \\ 133.42 \\ 135.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 61.8$$

$$T_{yexp} := 100.0$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0.7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.12 \times 10^4 \\ 1.267 \times 10^4 \\ 8.582 \times 10^3 \\ 6.805 \times 10^3 \\ 5.675 \times 10^3 \\ 4.797 \times 10^3 \\ 4.118 \times 10^3 \\ 3.549 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - Tcr} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{Tu - Ta_i}{Tu - Tcr} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.12 \times 10^4 \\ 1.267 \times 10^4 \\ 8.582 \times 10^3 \\ 6.805 \times 10^3 \\ 5.675 \times 10^3 \\ 4.797 \times 10^3 \\ 4.118 \times 10^3 \\ 3.549 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\psi := 1.042$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 61.8 \\ 68.934 \\ 79.121 \\ 89.27 \\ 100.006 \\ 111.927 \\ 123.724 \\ 135.2 \end{pmatrix}$$

$$\beta := 0.9804$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.12 \times 10^4 \\ 1.381 \times 10^4 \\ 7.921 \times 10^3 \\ 5.957 \times 10^3 \\ 4.927 \times 10^3 \\ 4.267 \times 10^3 \\ 3.846 \times 10^3 \\ 3.549 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.12 \times 10^4 \\ 1.381 \times 10^4 \\ 7.921 \times 10^3 \\ 5.957 \times 10^3 \\ 4.927 \times 10^3 \\ 4.267 \times 10^3 \\ 3.846 \times 10^3 \\ 3.549 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-16

$$\theta_u := 37.5$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 144.5$$

$$T_{cr} := 65.3$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 65.3 \\ 78.754 \\ 90.957 \\ 101.908 \\ 111.608 \\ 129.818 \\ 140.782 \\ 144.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 90.3$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.353 \times 10^4 \\ 1.676 \times 10^4 \\ 1.151 \times 10^4 \\ 9.181 \times 10^3 \\ 7.805 \times 10^3 \\ 5.901 \times 10^3 \\ 4.74 \times 10^3 \\ 3.853 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.353 \times 10^4 \\ 1.676 \times 10^4 \\ 1.151 \times 10^4 \\ 9.181 \times 10^3 \\ 7.805 \times 10^3 \\ 5.901 \times 10^3 \\ 4.74 \times 10^3 \\ 3.853 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 65.3 \\ 67.36 \\ 75.029 \\ 82.681 \\ 90.314 \\ 108.589 \\ 126.675 \\ 144.5 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 1.071$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_i}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.353 \times 10^4 \\ 2.785 \times 10^4 \\ 1.285 \times 10^4 \\ 8.925 \times 10^3 \\ 7.119 \times 10^3 \\ 5.19 \times 10^3 \\ 4.345 \times 10^3 \\ 3.853 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 4.353 \times 10^4 \\ 2.785 \times 10^4 \\ 1.285 \times 10^4 \\ 8.925 \times 10^3 \\ 7.119 \times 10^3 \\ 5.19 \times 10^3 \\ 4.345 \times 10^3 \\ 3.853 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Vigas de Concreto Resistência Normal

Viga N-06-06

$$\theta_u := 56.6$$

$$\theta_{cr} := 1.4$$

$$T_u := 79.7$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 43.2 \\ 53.463 \\ 62.036 \\ 68.919 \\ 74.163 \\ 77.216 \\ 79.062 \\ 79.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 43.2$$

$$T_{yexp} := 71.5$$

$$\beta := 0.5$$

$$\phi := 2$$

$$i := 0..7$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.086 \times 10^4 \\ 5.456 \times 10^3 \\ 3.409 \times 10^3 \\ 2.591 \times 10^3 \\ 2.113 \times 10^3 \\ 1.83 \times 10^3 \\ 1.604 \times 10^3 \\ 1.408 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 3.086 \times 10^4 \\ 5.456 \times 10^3 \\ 3.409 \times 10^3 \\ 2.591 \times 10^3 \\ 2.113 \times 10^3 \\ 1.83 \times 10^3 \\ 1.604 \times 10^3 \\ 1.408 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$\psi := 0.588$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 43.2 \\ 61.564 \\ 64.878 \\ 68.177 \\ 71.497 \\ 74.25 \\ 76.974 \\ 79.7 \end{pmatrix}$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_i}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.086 \times 10^4 \\ 2.138 \times 10^3 \\ 1.92 \times 10^3 \\ 1.758 \times 10^3 \\ 1.631 \times 10^3 \\ 1.545 \times 10^3 \\ 1.473 \times 10^3 \\ 1.408 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 3.086 \times 10^4 \\ 2.138 \times 10^3 \\ 1.92 \times 10^3 \\ 1.758 \times 10^3 \\ 1.631 \times 10^3 \\ 1.545 \times 10^3 \\ 1.473 \times 10^3 \\ 1.408 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-06-12

$$\theta_u := 40.3$$

$$\theta_{cr} := 2.0$$

$$T_u := 95.2$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 51.8 \\ 62.98 \\ 72.499 \\ 80.355 \\ 86.549 \\ 91.355 \\ 94.239 \\ 95.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 51.8$$

$$T_{yexp} := 80.9$$

$$\beta := 0.5$$

$$\phi := 2$$

$$i := 0..7$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.59 \times 10^4 \\ 8.628 \times 10^3 \\ 5.754 \times 10^3 \\ 4.489 \times 10^3 \\ 3.731 \times 10^3 \\ 3.161 \times 10^3 \\ 2.724 \times 10^3 \\ 2.362 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.59 \times 10^4 \\ 8.628 \times 10^3 \\ 5.754 \times 10^3 \\ 4.489 \times 10^3 \\ 3.731 \times 10^3 \\ 3.161 \times 10^3 \\ 2.724 \times 10^3 \\ 2.362 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$\psi := 0.75$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 51.8 \\ 67.238 \\ 71.811 \\ 76.366 \\ 80.9 \\ 85.743 \\ 90.537 \\ 95.2 \end{pmatrix}$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_i}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.59 \times 10^4 \\ 4.363 \times 10^3 \\ 3.7 \times 10^3 \\ 3.263 \times 10^3 \\ 2.952 \times 10^3 \\ 2.705 \times 10^3 \\ 2.515 \times 10^3 \\ 2.362 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.59 \times 10^4 \\ 4.363 \times 10^3 \\ 3.7 \times 10^3 \\ 3.263 \times 10^3 \\ 2.952 \times 10^3 \\ 2.705 \times 10^3 \\ 2.515 \times 10^3 \\ 2.362 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-12-12

$$\theta_u := 47.4$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 116.8$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 49.3 \\ 74.631 \\ 94.031 \\ 107.5 \\ 115.038 \\ 115.996 \\ 116.582 \\ 116.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 49.3$$

$$T_{yexp} := 113.0$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.081 \times 10^4 \\ 6.664 \times 10^3 \\ 4.521 \times 10^3 \\ 3.536 \times 10^3 \\ 2.876 \times 10^3 \\ 2.736 \times 10^3 \\ 2.602 \times 10^3 \\ 2.464 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 3.081 \times 10^4 \\ 6.664 \times 10^3 \\ 4.521 \times 10^3 \\ 3.536 \times 10^3 \\ 2.876 \times 10^3 \\ 2.736 \times 10^3 \\ 2.602 \times 10^3 \\ 2.464 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 49.3 \\ 97.63 \\ 102.801 \\ 107.933 \\ 113.004 \\ 114.255 \\ 115.494 \\ 116.8 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 0.361$$

$$GC_1 := \frac{Ta_1 \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_1}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.081 \times 10^4 \\ 2.866 \times 10^3 \\ 2.734 \times 10^3 \\ 2.624 \times 10^3 \\ 2.529 \times 10^3 \\ 2.508 \times 10^3 \\ 2.487 \times 10^3 \\ 2.464 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 3.081 \times 10^4 \\ 2.866 \times 10^3 \\ 2.734 \times 10^3 \\ 2.624 \times 10^3 \\ 2.529 \times 10^3 \\ 2.508 \times 10^3 \\ 2.487 \times 10^3 \\ 2.464 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-12-16

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$T_u := 138.0$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 57.1 \\ 84.442 \\ 106.166 \\ 122.27 \\ 132.864 \\ 135.717 \\ 137.429 \\ 138 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 57.1$$

$$T_{yexp} := 125.0$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.719 \times 10^4 \\ 9.179 \times 10^3 \\ 6.513 \times 10^3 \\ 5.225 \times 10^3 \\ 4.342 \times 10^3 \\ 4.015 \times 10^3 \\ 3.714 \times 10^3 \\ 3.433 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.719 \times 10^4 \\ 9.179 \times 10^3 \\ 6.513 \times 10^3 \\ 5.225 \times 10^3 \\ 4.342 \times 10^3 \\ 4.015 \times 10^3 \\ 3.714 \times 10^3 \\ 3.433 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 57.1 \\ 94.997 \\ 105.018 \\ 114.979 \\ 124.992 \\ 129.398 \\ 133.758 \\ 138 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 0.656$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_i}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.719 \times 10^4 \\ 4.823 \times 10^3 \\ 4.306 \times 10^3 \\ 3.953 \times 10^3 \\ 3.692 \times 10^3 \\ 3.598 \times 10^3 \\ 3.512 \times 10^3 \\ 3.433 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.719 \times 10^4 \\ 4.823 \times 10^3 \\ 4.306 \times 10^3 \\ 3.953 \times 10^3 \\ 3.692 \times 10^3 \\ 3.598 \times 10^3 \\ 3.512 \times 10^3 \\ 3.433 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-20-20

$$\theta_u := 43.2$$

$$\theta_{cr} := 2.2$$

$$T_u := 158.0$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 55.0 \\ 82.08 \\ 105.038 \\ 123.873 \\ 138.586 \\ 149.177 \\ 155.645 \\ 158 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 55.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^4 \\ 1.026 \times 10^4 \\ 7.611 \times 10^3 \\ 6.32 \times 10^3 \\ 5.456 \times 10^3 \\ 4.781 \times 10^3 \\ 4.207 \times 10^3 \\ 3.657 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^4 \\ 1.026 \times 10^4 \\ 7.611 \times 10^3 \\ 6.32 \times 10^3 \\ 5.456 \times 10^3 \\ 4.781 \times 10^3 \\ 4.207 \times 10^3 \\ 3.657 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 55 \\ 69.84 \\ 84.631 \\ 99.364 \\ 114.023 \\ 128.585 \\ 143.002 \\ 158 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 1.0$$

$$GC_1 := \frac{Ta_1 \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_1}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^4 \\ 8.73 \times 10^3 \\ 6.133 \times 10^3 \\ 5.07 \times 10^3 \\ 4.489 \times 10^3 \\ 4.121 \times 10^3 \\ 3.865 \times 10^3 \\ 3.657 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^4 \\ 8.73 \times 10^3 \\ 6.133 \times 10^3 \\ 5.07 \times 10^3 \\ 4.489 \times 10^3 \\ 4.121 \times 10^3 \\ 3.865 \times 10^3 \\ 3.657 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-10

$$\theta_u := 54.4$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 111.7$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 41.6 \\ 59.047 \\ 74.002 \\ 86.464 \\ 96.558 \\ 104.943 \\ 109.99 \\ 111.7 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.6$$

$$T_{yexp} := 93.8$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.189 \times 10^4 \\ 6.635 \times 10^3 \\ 4.654 \times 10^3 \\ 3.776 \times 10^3 \\ 3.219 \times 10^3 \\ 2.754 \times 10^3 \\ 2.381 \times 10^3 \\ 2.053 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.189 \times 10^4 \\ 6.635 \times 10^3 \\ 4.654 \times 10^3 \\ 3.776 \times 10^3 \\ 3.219 \times 10^3 \\ 2.754 \times 10^3 \\ 2.381 \times 10^3 \\ 2.053 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 41.6 \\ 77.897 \\ 83.192 \\ 88.469 \\ 93.797 \\ 99.836 \\ 105.813 \\ 111.7 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 0.558$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_i}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.189 \times 10^4 \\ 2.712 \times 10^3 \\ 2.546 \times 10^3 \\ 2.416 \times 10^3 \\ 2.309 \times 10^3 \\ 2.209 \times 10^3 \\ 2.126 \times 10^3 \\ 2.053 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.189 \times 10^4 \\ 2.712 \times 10^3 \\ 2.546 \times 10^3 \\ 2.416 \times 10^3 \\ 2.309 \times 10^3 \\ 2.209 \times 10^3 \\ 2.126 \times 10^3 \\ 2.053 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-14-10

$$\theta_u := 58.8$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$T_u := 125.0$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 41.8 \\ 66.116 \\ 86.24 \\ 102.172 \\ 114.018 \\ 120.071 \\ 123.732 \\ 125.0 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.8$$

$$T_{yexp} := 108.6$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.99 \times 10^4 \\ 5.956 \times 10^3 \\ 4.291 \times 10^3 \\ 3.511 \times 10^3 \\ 2.985 \times 10^3 \\ 2.668 \times 10^3 \\ 2.389 \times 10^3 \\ 2.126 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 1.99 \times 10^4 \\ 5.956 \times 10^3 \\ 4.291 \times 10^3 \\ 3.511 \times 10^3 \\ 2.985 \times 10^3 \\ 2.668 \times 10^3 \\ 2.389 \times 10^3 \\ 2.126 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 41.8 \\ 84.962 \\ 92.652 \\ 100.306 \\ 107.997 \\ 113.701 \\ 119.346 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 0.574$$

$$GC_1 := \frac{Ta_i \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_i}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.99 \times 10^4 \\ 2.73 \times 10^3 \\ 2.549 \times 10^3 \\ 2.413 \times 10^3 \\ 2.305 \times 10^3 \\ 2.239 \times 10^3 \\ 2.18 \times 10^3 \\ 2.126 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 1.99 \times 10^4 \\ 2.73 \times 10^3 \\ 2.549 \times 10^3 \\ 2.413 \times 10^3 \\ 2.305 \times 10^3 \\ 2.239 \times 10^3 \\ 2.18 \times 10^3 \\ 2.126 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-16

$$\theta_u := 53.2$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 117.3$$

$$T_{cr} := 40.0$$

$$T_a := \begin{pmatrix} 40.0 \\ 60.693 \\ 78.168 \\ 92.427 \\ 103.469 \\ 111.124 \\ 115.735 \\ 117.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 94.5$$

$$\beta := 0.5$$

$$i := 0..7$$

$$\phi := 2$$

$$GC_1 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.105 \times 10^4 \\ 6.526 \times 10^3 \\ 4.681 \times 10^3 \\ 3.835 \times 10^3 \\ 3.285 \times 10^3 \\ 2.871 \times 10^3 \\ 2.521 \times 10^3 \\ 2.205 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_1} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_1}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC2 = \begin{pmatrix} 2.105 \times 10^4 \\ 6.526 \times 10^3 \\ 4.681 \times 10^3 \\ 3.835 \times 10^3 \\ 3.285 \times 10^3 \\ 2.871 \times 10^3 \\ 2.521 \times 10^3 \\ 2.205 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\phi := 1.02$$

$$\beta := 0.980$$

$$Ta := \begin{pmatrix} 40.0 \\ 71.337 \\ 79.226 \\ 87.082 \\ 94.898 \\ 102.451 \\ 109.926 \\ 117.3 \end{pmatrix}$$

$$\psi := 0.697$$

$$GC_1 := \frac{Ta_1 \cdot 1000}{\theta_u - (\theta_u - \theta_{cr}) \cdot \left(\frac{T_u - Ta_1}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.105 \times 10^4 \\ 3.187 \times 10^3 \\ 2.873 \times 10^3 \\ 2.657 \times 10^3 \\ 2.499 \times 10^3 \\ 2.381 \times 10^3 \\ 2.287 \times 10^3 \\ 2.205 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$GC_1^2 := \frac{T_{a_i} \cdot 1000}{\left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \cdot \theta_{cr} + \left[1 - \left(\frac{T_u - T_{a_i}}{T_u - T_{cr}} \right)^\beta \right] \cdot \theta_u}$$

$$GC_2 = \begin{pmatrix} 2.105 \times 10^4 \\ 3.187 \times 10^3 \\ 2.873 \times 10^3 \\ 2.657 \times 10^3 \\ 2.499 \times 10^3 \\ 2.381 \times 10^3 \\ 2.287 \times 10^3 \\ 2.205 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

ANEXO D

Cálculo da Rigidez por meio da derivada para $\phi=2$

$$T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^2$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^2 \right]$$

$$2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

Viga H-06-06

$$\theta_u := 26.1$$

$$\theta_{cr} := 1.2$$

$$T_u := 92.0$$

$$T_{cr} := 70.6$$

$$\theta := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 3.8 \\ 6.4 \\ 9.0 \\ 11.6 \\ 16.4 \\ 21.2 \\ 26.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 79.7$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.998$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.719 \times 10^3 \\ 1.539 \times 10^3 \\ 1.36 \times 10^3 \\ 1.18 \times 10^3 \\ 1.001 \times 10^3 \\ 669.602 \\ 338.253 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Viga H-06-12

$$\theta_u := 25.4$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.3 \\ 7.1 \\ 9.9 \\ 12.8 \\ 17.0 \\ 21.2 \\ 25.4 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 115.1$$

$$T_{cr} := 75.0$$

$$T_{yexp} := 83.5$$

$$\psi := 1$$

$$\phi := 2$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.398 \times 10^3 \\ 3.033 \times 10^3 \\ 2.668 \times 10^3 \\ 2.303 \times 10^3 \\ 1.938 \times 10^3 \\ 1.264 \times 10^3 \\ 589.696 \\ -98.283 \end{pmatrix}$$

Viga H-12-12

$$\theta_u := 37.8$$

$$\theta_{cr} := 1.3$$

$$T_u := 155.3$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 5.3 \\ 9.3 \\ 13.3 \\ 17.5 \\ 24.2 \\ 30.9 \\ 37.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 77.1$$

$$T_{yexp} := 116.8$$

$$\psi := 0.896$$

$$\phi := 2$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.297 \times 10^3 \\ 3.991 \times 10^3 \\ 3.686 \times 10^3 \\ 3.381 \times 10^3 \\ 3.076 \times 10^3 \\ 2.512 \times 10^3 \\ 1.949 \times 10^3 \\ 1.374 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-12-16

$$\theta_u := 39.3$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 196.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 6.4 \\ 11.2 \\ 16.0 \\ 21.0 \\ 27.1 \\ 33.2 \\ 39.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 79.3$$

$$T_{yexp} := 157.6$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.698$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 6.257 \times 10^3 \\ 5.83 \times 10^3 \\ 5.403 \times 10^3 \\ 4.976 \times 10^3 \\ 4.549 \times 10^3 \\ 3.761 \times 10^3 \\ 2.972 \times 10^3 \\ 2.168 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-20-20

$$\theta_u := 46.5$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 239.6$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 8.0 \\ 14.4 \\ 20.8 \\ 27.2 \\ 33.6 \\ 40.0 \\ 46.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 76.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 7.325 \times 10^3 \\ 6.905 \times 10^3 \\ 6.484 \times 10^3 \\ 6.064 \times 10^3 \\ 5.644 \times 10^3 \\ 4.867 \times 10^3 \\ 4.091 \times 10^3 \\ 3.299 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-10

$$\theta_u := 33.2$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 126.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4.5 \\ 7.4 \\ 10.3 \\ 13.2 \\ 19.8 \\ 26.4 \\ 33.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 70.5$$

$$T_{yexp} := 91.1$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1.01$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.602 \times 10^3 \\ 3.309 \times 10^3 \\ 3.017 \times 10^3 \\ 2.724 \times 10^3 \\ 2.431 \times 10^3 \\ 1.891 \times 10^3 \\ 1.351 \times 10^3 \\ 799.191 \end{pmatrix}$$

Viga H-14-10

$$\theta_u := 38.1$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 135.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 6.3 \\ 11.1 \\ 15.9 \\ 21.0 \\ 26.7 \\ 32.4 \\ 38.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 61.8$$

$$T_{yexp} := 100.6$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1.042$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.044 \times 10^3 \\ 3.759 \times 10^3 \\ 3.474 \times 10^3 \\ 3.189 \times 10^3 \\ 2.904 \times 10^3 \\ 2.378 \times 10^3 \\ 1.852 \times 10^3 \\ 1.315 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-16

$$\theta_u := 37.5$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 144.5$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.7 \\ 7.9 \\ 11.1 \\ 14.3 \\ 22.0 \\ 29.7 \\ 37.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 65.3$$

$$T_{yexp} := 90.3$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1.071$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.437 \times 10^3 \\ 4.119 \times 10^3 \\ 3.801 \times 10^3 \\ 3.483 \times 10^3 \\ 3.166 \times 10^3 \\ 2.579 \times 10^3 \\ 1.992 \times 10^3 \\ 1.393 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Vigas de Concreto de Resistência Normal

Viga N-06-06

$$\theta_u := 56.6$$

$$\theta_{cr} := 1.4$$

$$T_u := 79.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.4 \\ 9.8 \\ 18.2 \\ 26.6 \\ 35.1 \\ 42.2 \\ 49.3 \\ 56.6 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 43.2$$

$$T_{yexp} := 71.5$$

$$\psi := 0.588$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.327 \times 10^3 \\ 1.265 \times 10^3 \\ 1.203 \times 10^3 \\ 1.14 \times 10^3 \\ 1.078 \times 10^3 \\ 963.099 \\ 848.102 \\ 730.709 \end{pmatrix}$$

Viga N-06-12

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.0$$

$$T_u := 95.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.0 \\ 7.3 \\ 12.6 \\ 17.9 \\ 23.2 \\ 28.9 \\ 34.6 \\ 40.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 51.8$$

$$T_{yexp} := 80.9$$

$$\psi := 0.75$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.314 \times 10^3 \\ 2.16 \times 10^3 \\ 2.006 \times 10^3 \\ 1.852 \times 10^3 \\ 1.698 \times 10^3 \\ 1.414 \times 10^3 \\ 1.13 \times 10^3 \\ 840.254 \end{pmatrix}$$

Viga N-12-12

$$\theta_u := 47.4$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 116.8$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 11.2 \\ 20.8 \\ 30.4 \\ 40.0 \\ 42.4 \\ 44.8 \\ 47.4 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 49.3$$

$$T_{yexp} := 113.6$$

$$\psi := 0.361$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.973 \times 10^3 \\ 2.806 \times 10^3 \\ 2.639 \times 10^3 \\ 2.471 \times 10^3 \\ 2.304 \times 10^3 \\ 1.995 \times 10^3 \\ 1.686 \times 10^3 \\ 1.371 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-12-16

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.1 \\ 9.2 \\ 16.3 \\ 23.4 \\ 30.6 \\ 33.8 \\ 37.0 \\ 40.2 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 138.0$$

$$T_{cr} := 57.1$$

$$T_{yexp} := 125.0$$

$$\psi := 0.650$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 4.347 \times 10^3 \\ 4.057 \times 10^3 \\ 3.767 \times 10^3 \\ 3.478 \times 10^3 \\ 3.188 \times 10^3 \\ 2.653 \times 10^3 \\ 2.118 \times 10^3 \\ 1.572 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-20-20

$$\theta_u := 43.2$$

$$\theta_{cr} := 2.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.2 \\ 8.0 \\ 13.8 \\ 19.6 \\ 25.4 \\ 31.2 \\ 37.0 \\ 43.2 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 158.0$$

$$T_{cr} := 55.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 5.147 \times 10^3 \\ 4.828 \times 10^3 \\ 4.51 \times 10^3 \\ 4.191 \times 10^3 \\ 3.872 \times 10^3 \\ 3.284 \times 10^3 \\ 2.696 \times 10^3 \\ 2.096 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-10

$$\theta_u := 54.4$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 111.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 8.9 \\ 15.9 \\ 22.9 \\ 30.0 \\ 38.1 \\ 46.2 \\ 54.4 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.6$$

$$T_{yexp} := 93.8$$

$$\psi := 0.558$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.706 \times 10^3 \\ 2.574 \times 10^3 \\ 2.442 \times 10^3 \\ 2.309 \times 10^3 \\ 2.177 \times 10^3 \\ 1.933 \times 10^3 \\ 1.689 \times 10^3 \\ 1.44 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-14-10

$$\theta_u := 58.8$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$T_u := 125.6$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.1 \\ 20.1 \\ 29.1 \\ 38.2 \\ 45.0 \\ 51.8 \\ 58.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.8$$

$$T_{yexp} := 108.6$$

$$\psi := 0.574$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.981 \times 10^3 \\ 2.847 \times 10^3 \\ 2.712 \times 10^3 \\ 2.578 \times 10^3 \\ 2.443 \times 10^3 \\ 2.195 \times 10^3 \\ 1.946 \times 10^3 \\ 1.693 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-16

$$\theta_u := 53.2$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 117.3$$

$$T_{cr} := 40.6$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 9.3 \\ 16.7 \\ 24.1 \\ 31.5 \\ 38.7 \\ 45.9 \\ 53.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 94.5$$

$$\psi := 0.697$$

$$GC := 2 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \frac{(\theta_u - \theta) \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})^2}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.055 \times 10^3 \\ 2.902 \times 10^3 \\ 2.749 \times 10^3 \\ 2.597 \times 10^3 \\ 2.444 \times 10^3 \\ 2.162 \times 10^3 \\ 1.88 \times 10^3 \\ 1.592 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

ANEXO E

Cálculo da Rigidez por meio da derivada para $\phi=1.02$

$$T_u - (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \left(\frac{\theta_u - \theta}{\theta_u - \theta_{cr}} \right)^{1.02}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[1.02 (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]$$

$$GC := 1.02 (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})}$$

Vigas de Concreto de Alta Resistência

Viga H-06-06

$$\theta_u := 26.1$$

$$\theta_{cr} := 1.2$$

$$T_u := 92.0$$

$$\theta := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 3.8 \\ 6.4 \\ 9.0 \\ 11.6 \\ 16.4 \\ 21.2 \\ 26.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 70.6$$

$$T_{yexp} := 79.7$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.998$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 874.873 \\ 872.946 \\ 870.784 \\ 868.323 \\ 865.463 \\ 858.532 \\ 846.886 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Viga H-06-12

$$\theta_u := 25.4$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.3 \\ 7.1 \\ 9.9 \\ 12.8 \\ 17.0 \\ 21.2 \\ 25.4 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 115.1$$

$$T_{cr} := 75.0$$

$$T_{yexp} := 83.5$$

$$\psi := 1$$

$$\phi := 2$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.712 \times 10^3 \\ 1.708 \times 10^3 \\ 1.704 \times 10^3 \\ 1.699 \times 10^3 \\ 1.693 \times 10^3 \\ 1.678 \times 10^3 \\ 1.653 \times 10^3 \\ 1.592 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-12-12

$$\theta_u := 37.8$$

$$\theta_{cr} := 1.3$$

$$T_u := 155.3$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 5.3 \\ 9.3 \\ 13.3 \\ 17.5 \\ 24.2 \\ 30.9 \\ 37.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 77.1$$

$$T_{yexp} := 116.8$$

$$\psi := 0.89\epsilon$$

$$\phi := 2$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})} \cdot 1000}{(\theta_u - \theta_{cr})}$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.958 \times 10^3 \\ 1.955 \times 10^3 \\ 1.952 \times 10^3 \\ 1.949 \times 10^3 \\ 1.945 \times 10^3 \\ 1.937 \times 10^3 \\ 1.927 \times 10^3 \\ 1.914 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-12-16

$$\theta_u := 39.3$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 196.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 6.4 \\ 11.2 \\ 16.0 \\ 21.0 \\ 27.1 \\ 33.2 \\ 39.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 79.3$$

$$T_{yexp} := 157.0$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.69\xi$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.204 \times 10^3 \\ 2.201 \times 10^3 \\ 2.198 \times 10^3 \\ 2.194 \times 10^3 \\ 2.19 \times 10^3 \\ 2.182 \times 10^3 \\ 2.172 \times 10^3 \\ 2.158 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-20-20

$$\theta_u := 46.5$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 239.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 8.0 \\ 14.4 \\ 20.8 \\ 27.2 \\ 33.6 \\ 40.0 \\ 46.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 76.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 3.704 \times 10^3 \\ 3.699 \times 10^3 \\ 3.695 \times 10^3 \\ 3.69 \times 10^3 \\ 3.684 \times 10^3 \\ 3.673 \times 10^3 \\ 3.661 \times 10^3 \\ 3.645 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-10

$$\theta_u := 33.2$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 126.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4.5 \\ 7.4 \\ 10.3 \\ 13.2 \\ 19.8 \\ 26.4 \\ 33.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 70.5$$

$$T_{yexp} := 91.1$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1.01$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.833 \times 10^3 \\ 1.83 \times 10^3 \\ 1.826 \times 10^3 \\ 1.822 \times 10^3 \\ 1.818 \times 10^3 \\ 1.809 \times 10^3 \\ 1.797 \times 10^3 \\ 1.778 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-14-10

$$\theta_u := 38.1$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 135.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 6.3 \\ 11.1 \\ 15.9 \\ 21.0 \\ 26.7 \\ 32.4 \\ 38.1 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 61.8$$

$$T_{yexp} := 100.6$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1.042$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.132 \times 10^3 \\ 2.129 \times 10^3 \\ 2.125 \times 10^3 \\ 2.122 \times 10^3 \\ 2.118 \times 10^3 \\ 2.109 \times 10^3 \\ 2.099 \times 10^3 \\ 2.084 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga H-07-16

$$\theta_u := 37.5$$

$$\theta_{cr} := 1.5$$

$$T_u := 144.5$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.7 \\ 7.9 \\ 11.1 \\ 14.3 \\ 22.0 \\ 29.7 \\ 37.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 65.3$$

$$T_{yexp} := 90.3$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1.071$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.404 \times 10^3 \\ 2.4 \times 10^3 \\ 2.396 \times 10^3 \\ 2.392 \times 10^3 \\ 2.388 \times 10^3 \\ 2.378 \times 10^3 \\ 2.366 \times 10^3 \\ 2.349 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Vigas de Concreto de Resistência Normal

Viga N-06-06

$$\theta_u := 56.6$$

$$\theta_{cr} := 1.4$$

$$T_u := 79.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.4 \\ 9.8 \\ 18.2 \\ 26.6 \\ 35.1 \\ 42.2 \\ 49.3 \\ 56.6 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 43.2$$

$$T_{yexp} := 71.5$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.588$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 396.609 \\ 396.228 \\ 395.828 \\ 395.407 \\ 394.963 \\ 394.073 \\ 393.072 \\ 391.903 \end{pmatrix}$$

Viga N-06-12

$$\theta_u := 40.3$$

$$\theta_{cr} := 2.0$$

$$T_u := 95.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.0 \\ 7.3 \\ 12.6 \\ 17.9 \\ 23.2 \\ 28.9 \\ 34.6 \\ 40.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 51.8$$

$$T_{yexp} := 80.9$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.75$$

$$GC := 1.02 \cdot (T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 867.225 \\ 866.033 \\ 864.754 \\ 863.375 \\ 861.879 \\ 858.729 \\ 854.888 \\ 849.834 \end{pmatrix}$$

Viga N-12-12

$$\theta_u := 47.4$$

$$\theta_{cr} := 1.6$$

$$T_u := 116.8$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 11.2 \\ 20.8 \\ 30.4 \\ 40.0 \\ 42.4 \\ 44.8 \\ 47.4 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 49.3$$

$$T_{yexp} := 113.6$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.361$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 542.777 \\ 542.148 \\ 541.482 \\ 540.773 \\ 540.015 \\ 538.463 \\ 536.654 \\ 534.436 \end{pmatrix}$$

Viga N-12-16

$$\theta_u := 40.2$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.1 \\ 9.2 \\ 16.3 \\ 23.4 \\ 30.6 \\ 33.8 \\ 37.0 \\ 40.2 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 138.0$$

$$T_{cr} := 57.1$$

$$T_{yexp} := 125.0$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.65\phi$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.421 \times 10^3 \\ 1.419 \times 10^3 \\ 1.417 \times 10^3 \\ 1.415 \times 10^3 \\ 1.413 \times 10^3 \\ 1.407 \times 10^3 \\ 1.401 \times 10^3 \\ 1.393 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-20-20

$$\theta_u := 43.2$$

$$\theta_{cr} := 2.2$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.2 \\ 8.0 \\ 13.8 \\ 19.6 \\ 25.4 \\ 31.2 \\ 37.0 \\ 43.2 \end{pmatrix}$$

$$T_u := 158.0$$

$$T_{cr} := 55.0$$

$$T_{yexp} := 0$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 1$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 2.564 \times 10^3 \\ 2.56 \times 10^3 \\ 2.557 \times 10^3 \\ 2.553 \times 10^3 \\ 2.549 \times 10^3 \\ 2.541 \times 10^3 \\ 2.531 \times 10^3 \\ 2.518 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-10

$$\theta_u := 54.4$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 111.7$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 8.9 \\ 15.9 \\ 22.9 \\ 30.0 \\ 38.1 \\ 46.2 \\ 54.4 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.6$$

$$T_{yexp} := 93.8$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.558$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 760.165 \\ 759.404 \\ 758.603 \\ 757.759 \\ 756.866 \\ 755.067 \\ 753.031 \\ 750.629 \end{pmatrix}$$

Viga N-14-10

$$\theta_u := 58.8$$

$$\theta_{cr} := 2.1$$

$$T_u := 125.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.1 \\ 20.1 \\ 29.1 \\ 38.2 \\ 45.0 \\ 51.8 \\ 58.8 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} := 41.8$$

$$T_{yexp} := 108.0$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.574$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 859.388 \\ 858.594 \\ 857.763 \\ 856.89 \\ 855.972 \\ 854.138 \\ 852.088 \\ 849.712 \end{pmatrix}$$

Viga N-07-16

$$\theta_u := 53.2$$

$$\theta_{cr} := 1.9$$

$$T_u := 117.5$$

$$T_{cr} := 40.0$$

$$\theta_a := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 9.3 \\ 16.7 \\ 24.1 \\ 31.5 \\ 38.7 \\ 45.9 \\ 53.2 \end{pmatrix}$$

$$T_{yexp} := 94.5$$

$$\phi := 2$$

$$\psi := 0.697$$

$$GC := 1.02(T_u - T_{cr}) \cdot \psi \cdot \frac{\left[\frac{(\theta_u - \theta)}{(\theta_u - \theta_{cr})} \right]^{(2 \cdot 10^{-2})}}{(\theta_u - \theta_{cr})} \cdot 1000$$

$$GC = \begin{pmatrix} 1.072 \times 10^3 \\ 1.07 \times 10^3 \\ 1.069 \times 10^3 \\ 1.068 \times 10^3 \\ 1.067 \times 10^3 \\ 1.064 \times 10^3 \\ 1.061 \times 10^3 \\ 1.058 \times 10^3 \end{pmatrix}$$