

ADILSON RABELLO DALBONE

**ESTUDO PARA A NORMALIZAÇÃO BRASILEIRA PARA DIMENSIONAMENTO  
DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Tecnologia da Construção

Orientador: Prof. EMIL DE SOUZA SÁNCHEZ FILHO, D. Sc

NITERÓI  
2012

X XXX Dalbone, Adilson Rabello

Estudo da normalização brasileira para dimensionamento de fundações de máquinas.

– Niterói: [s.n.], 2012.

XXX f.: il., XXcm.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Análise e dimensionamento das estruturas)

– Universidade Federal Fluminense, 2012.

1. Análise Dinâmica. 2. Fundações de Equipamentos Industriais. 3. Solo. 4. Análise da Normalização de Fundações de Máquinas. 5. Estudo de caso. I. Título.

XXXXXXXXXXXXXX

ADILSON RABELLO DALBONE

**ESTUDO PARA A NORMALIZAÇÃO BRASILEIRA PARA DIMENSIONAMENTO  
DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Tecnologia da Construção

Aprovado em julho de 2012:

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Emil de Souza Sánchez Filho, D. Sc. – Orientador.  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho, D. Sc.  
Pontifícia Universidade Católica -RIO

---

Prof. Osvaldo Luiz de Carvalho Souza, D. Sc.  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Niterói  
2012

Dedico esse trabalho  
à minha esposa Maria Cristina,  
aos meus filhos Michelle e Ryan (genro), Mark e Marcel,  
e à minha neta Chloe.

## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho foi concluído graças à ajuda de muitas pessoas, de forma direta ou indireta, a quem devo meus sinceros agradecimentos, muitas não citadas aqui.

Ao professor Emil de Souza Sánchez Filho pela dedicação, amizade, paciência e orientação, estando sempre presente em todas as fases de elaboração desta dissertação.

Aos amigos Alexandre de Souza Amaral, Mario Fonseca, Flávia Gandra Machado, Esdras Pereira de Oliveira, José Carlos Martins Barra, Sergio Hampshire de Carvalho Santos, Irani Vilela, Adriana B. Ferraz Cavalcanti, Marco Carcamo, Iporan Figueiredo Guerrante e outros não citados aqui.

Aos professores José Murilo Ferraz Saraiva, Mauro Schulz, Fathi Aref Ibrahim, Mara Salles, Plácido Barbosa, Carlos Alberto Lidízia Soarez, que nos conduziram durante o curso do mestrado.

A todos os funcionários da secretária do PPGEC da UFF.

Aos meus amigos e familiares que se mostraram disponíveis para ouvir, incentivar e ajudar.

Ao meu irmão Antônio Carlos Rabello Dalbone e família.

Aos meus pais Algemiro e Cilda.

À minha esposa Maria Cristina Sant'Ana de Almeida Dalbone e meus filhos Michelle Almeida Dalbone, Mark Almeida Dalbone e Marcel Almeida Dalbone.

A todos os professores que compuseram a banca.

A Deus.

## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>4</b>
<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>5</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>8</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>10</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES</b> .....	<b>12</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>19</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>20</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>21</b>
1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	23
1.2 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA .....	23
1.3 RELEVÂNCIA DO ESTUDO .....	23
<b>2 METODOLOGIA</b> .....	<b>24</b>
<b>3 ANÁLISE DINÂMICA</b> .....	<b>25</b>
3.1 NOTAS INICIAIS .....	25
3.2 VIBRAÇÃO LIVRE .....	26
<b>3.2.1 Sistema massa mola sem amortecimento – 1GDL</b> .....	<b>26</b>
3.2.1.1 Sistema massa-mola com movimento de translação .....	26
3.2.1.2 Sistema 1GDL – mola com rigidez de rotação conectada à base do bloco .....	31
3.2.1.3 Sistema 1GDL – mola com rigidez torcional conectada à base do bloco .....	32
<b>3.2.2 Sistemas equivalentes de um grau de liberdade</b> .....	<b>33</b>
<b>3.2.3 Sistema de amortecimento</b> .....	<b>39</b>
3.3 VIBRAÇÃO FORÇADA .....	43
<b>3.3.1 Vibração forçada com amortecimento</b> .....	<b>43</b>
<b>3.3.2 Vibração forçada sem amortecimento</b> .....	<b>45</b>
3.3.2.1 Sistema tendo rigidez de translação e força dinâmica externamente aplicada .....	45
3.3.2.2 Sistema tendo rigidez rotacional e momento dinâmico externamente aplicado.....	46
3.4 RESSONÂNCIA .....	47
3.5 SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE .....	48
3.6 SISTEMA COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE .....	48
<b>3.6.1 Vibrações livres</b> .....	<b>48</b>
<b>3.6.2 Vibrações forçadas</b> .....	<b>51</b>
<b>4 FUNDAÇÕES DE EQUIPAMENTOS INDUSTRIAIS</b> .....	<b>52</b>
4.1 NOTAS INICIAIS .....	52

4.2	TIPOS DE MÁQUINAS .....	52
4.3	TIPOS DE FUNDAÇÃO .....	53
4.4	PARÂMETROS DE PROJETO .....	55
4.5	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS .....	55
<b>4.5.1</b>	<b>Centro de gravidade .....</b>	<b>55</b>
<b>4.5.2</b>	<b>Momento de inércia na área da base .....</b>	<b>56</b>
<b>4.5.3</b>	<b>Momento de inércia da massa .....</b>	<b>56</b>
4.6	CARGAS DAS FUNDAÇÕES E EQUIPAMENTOS .....	56
<b>4.6.1</b>	<b>Cargas estáticas .....</b>	<b>57</b>
4.6.1.1	Peso próprio .....	57
4.6.1.2	Sobrecargas .....	57
4.6.1.3	Cargas de vento .....	57
4.6.1.4	Cargas sísmicas .....	57
4.6.1.5	Cargas estáticas de operação .....	57
4.6.1.6	Cargas especiais para fundações elevadas .....	58
4.6.1.7	Cargas de manutenção e construção .....	59
4.6.1.8	Cargas térmicas .....	59
<b>4.6.2</b>	<b>Cargas de máquinas rotativas .....</b>	<b>59</b>
4.6.2.1	Cargas dinâmicas devido a massas desequilibradas .....	59
4.6.2.2	Carga dinâmica determinada por fórmula empírica .....	62
4.6.2.3	Carga de desequilíbrio determinada por desligamento automático .....	62
4.6.2.4	Cargas de múltiplas máquinas rotativas .....	63
<b>4.6.3</b>	<b>Cargas de máquinas alternativas .....</b>	<b>63</b>
4.6.3.1	Cargas alternativas primárias e secundárias .....	63
4.6.3.2	Cargas de compressores de gás .....	66
<b>4.6.4</b>	<b>Cargas de máquinas de impacto .....</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>SOLO .....</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DA NORMALIZAÇÃO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS .....</b>	<b>73</b>
6.1	ESCOPO DAS NORMAS .....	73
6.2	DADOS BÁSICOS PARA O PROJETO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS .....	74
6.3	FUNDAÇÕES TÍPICAS PARA MÁQUINAS .....	78
6.4	FAIXAS DE SEVERIDADE DE VIBRAÇÃO .....	79
6.5	PARÂMETROS PRELIMINARES DO SISTEMA SOLO-FUNDAÇÃO .....	82
6.6	RAIOS EQUIVALENTES .....	84
6.7	CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DE UMA ESTACA .....	85
6.8	CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DE UMA FUNDAÇÃO DIRETA .....	87
6.9	CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DE FUNDAÇÃO EM ESTACAS .....	90
6.10	FREQUÊNCIAS NATURAIS .....	95
6.11	ACOPLAMENTO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO .....	98
6.12	FREQUÊNCIAS NATURAIS ACOPLADAS .....	99
6.13	AMPLITUDES DE OSCILAÇÃO .....	103
6.14	VELOCIDADES EFETIVAS .....	108
6.15	OUTROS REQUISITOS GERAIS DE PROJETO .....	109
<b>7</b>	<b>ESTUDO DE CASO .....</b>	<b>113</b>
7.1	FUNDAÇÃO DIRETA .....	113
<b>7.1.1</b>	<b>Parâmetros da máquina .....</b>	<b>113</b>
<b>7.1.2</b>	<b>Especificações de material .....</b>	<b>116</b>

7.1.3	Frequência de operação .....	116
7.1.4	Classificação da máquina.....	117
7.1.5	Dados da base de concreto .....	117
7.1.6	Dados do solo.....	118
7.1.7	Massa total do sistema.....	118
7.1.8	Raios equivalentes .....	119
7.1.9	Momentos de inércia de massa .....	119
7.1.10	Constantes de mola.....	119
7.1.11	Razões de massa.....	120
7.1.12	Fatores de amortecimento.....	120
7.1.13	Constantes de amortecimento .....	121
7.1.14	Frequências naturais para 1GL .....	121
7.1.15	Fator de amplificação dinâmico .....	122
7.1.16	Amplitude máxima dinâmica .....	123
7.1.17	Máxima velocidade efetiva.....	123
7.2	SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM USO DO SAP2000 .....	123
7.3	FUNDAÇÃO PROFUNDA .....	128
7.3.1	Dados da base de concreto .....	128
7.3.2	Dados das estacas.....	128
7.3.3	Massa total do sistema.....	129
7.3.4	Coefficientes de impedância para uma estaca isolada.....	129
7.3.5	Constantes de impedância para o grupo de estacas .....	130
7.3.6	Amortecimentos críticos.....	130
7.3.7	Fatores de Amortecimentos .....	130
7.3.8	Frequências naturais para 1GL .....	131
7.3.9	Fator de amplificação dinâmico .....	131
7.3.10	Amplitude máxima dinâmica .....	132
7.3.11	Máxima velocidade efetiva.....	132
7.4	SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM USO DO SAP2000 .....	133
8	CONCLUSÕES.....	139
9	SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS...	141
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	142



## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Grau de qualidade de equilíbrio de grupos representativos de rotores. ....	61
Tabela 5.1: Fator $\alpha$ para fundações retangulares (BARKAN, 1962).....	72
Tabela 6.1: Escopo da normas 1848, do ACI-351.3R-04 e da DIN 4024 – Partes 1 e 2.....	73
Tabela 6.2: Valores de $k_2$ versus densidade relativa. ....	75
Tabela 6.3: Parâmetros do solo. ....	76
Tabela 6.4: Coeficiente de Poisson segundo a N-1848. ....	76
Tabela 6.5: Parâmetros do equipamento. ....	77
Tabela 6.6: Parâmetros geométricos da fundação. ....	78
Tabela 6.7: Tipos de fundação de máquinas.....	78
Tabela 6.8: Faixas de severidade de vibração .....	79
Tabela 6.9: Faixa de severidade de vibração.....	80
Tabela 6.10: Parâmetros preliminares do sistema solo-fundação para fundações diretas.....	83
Tabela 6.11: Razão entre $C_\theta$ e $C_u$ .....	83
Tabela 6.12: Parâmetros preliminares sistema solo-fundação com estacas. ....	84
Tabela 6.13: Raio equivalente para fundação de base retangular.....	85
Tabela 6.14: Rigidez de uma estaca para cada tipo de deformação. ....	86
Tabela 6.15: Constante de amortecimento para uma estaca.....	86
Tabela 6.16: Rigidezas de uma fundação direta pela teoria da constante de mola sem peso...	87
Tabela 6.17: Razão de massa de fundações diretas pela teoria elástica do semiespaço.....	88
Tabela 6.18: Fator de amortecimento – fundações diretas.....	89
Tabela 6.19: Constante de mola – fundações diretas, teoria elástica do semiespaço.....	90
Tabela 6.20: Rigidez para um grupo de estacas. ....	92
Tabela 6.21: Constante de amortecimento para um grupo de estacas.....	93
Tabela 6.22: Amortecimento crítico de um grupo de estacas.....	94
Tabela 6.23: Fatores de amortecimento crítico de um grupo de estacas. ....	94
Tabela 6.24: Frequências naturais sem considerar amortecimento. ....	95
Tabela 6.25: Amortecimento crítico .....	96
Tabela 6.26: Fator de amortecimento .....	97
Tabela 6.27: Frequências naturais amortecidas para força excitante constante. ....	97
Tabela 6.28: Frequências naturais amortecidas para força excitante variável. ....	98
Tabela 6.29: Velocidades angulares naturais acopladas não considerando amortecimento...	100
Tabela 6.30: Velocidades angulares naturais acopladas considerando amortecimento. ....	102
Tabela 6.31: Amplitude de oscilação pela teoria da constante de mola sem peso .....	104
Tabela 6.32: Amplitude de oscilação pela teoria elástica do semi espaço. ....	106
Tabela 6.33: Velocidades máximas.....	108
Tabela 6.34: Velocidades efetivas .....	109
Tabela 6.35: Requisitos gerais de projeto - Fundações superficiais.....	110

Tabela 6.36: Requisitos gerais de projeto - Fundações profundas .....	111
Tabela 6.37: Requisitos gerais de projeto – Fundações para máquinas elevadas.....	112
Tabela 7.1: Forças e momentos conforme API610 .....	114
Tabela 7.2: Faixas de frequência com risco de ressonância.....	122
Tabela 7.3: Modo, período e frequência do sistema fundação e máquina.....	125
Tabela 7.4: Resultados comparativos entre solução analítica e SAP2000.....	127
Tabela 7.5 – Faixas de frequência com risco de ressonância.....	131
Tabela 7.6: Modo, período e frequência do sistema fundação e máquina.....	135
Tabela 7.7: Resultados comparativos entre solução analítica e SAP2000 .....	137

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Esquema de elaboração da pesquisa. ....	24
Figura 3.1: Equilíbrio de um sistema 1GDL sem amortecimento. ....	27
Figura 3.2: Sistema 1GDL sem amortecimento, em movimento. ....	27
Figura 3.3: Vibração livre de um Sistema 1GDL. ....	28
Figura 3.4: Resposta da vibração livre do sistema 1GDL. ....	29
Figura 3.5: Vibração livre de sistema 1GDL, mola rotacional no centro da base. ....	31
Figura 3.6: Vibração livre de sistema 1GDL, mola torsional no centro da base. ....	33
Figura 3.7: Sistema de um grau de liberdade, uma coluna suportando a massa. ....	34
Figura 3.8: Viga em balanço suportando a massa $m$ . ....	34
Figura 3.9: Viga simplesmente apoiada – Massa ao centro – Massa Equivalente. ....	35
Figura 3.10: Viga simplesmente apoiada – uma massa no centro e outra massa fora do centro (viga sem massa). ....	36
Figura 3.11: Viga simplesmente apoiada com massa localizada fora do centro <i>versus</i> fator de participação da massa da máquina (viga sem massa). ....	36
Figura 3.12: Viga engastada – massa ao centro da viga. ....	37
Figura 3.13: Pórtico com massa da máquina $m$ no centro da viga; momento de engastamento e modo de vibração na direção vertical. ....	39
Figura 3.14: Pórtico com massa da máquina $m$ no centro da viga; momento de engastamento e modo de vibração na direção horizontal. ....	39
Figura 3.15: Sistema amortecido com um grau de liberdade sob movimento. ....	40
Figura 3.16: Sistema criticamente amortecido com velocidade inicial nula. ....	42
Figura 3.17: Frequência de amortecimento <i>versus</i> coeficiente de amortecimento. ....	43
Figura 3.18: Fator de ampliação $\mu$ <i>versus</i> taxa de frequência $\beta$ , adaptado de PRAKASH (1981). ....	45
Figura 3.19: Vibração forçada: sistema 1GDL sem amortecimento. ....	46
Figura 3.20: Sistema 1GDL sem amortecimento – mola no centro da base do bloco. ....	47
Figura 3.21: Sistema massa mola não amortecido com duas molas. ....	48
Figura 3.22: Sistema massa mola não amortecido com $n$ molas. ....	49
Figura 4.1: a) Fundação em bloco; b) fundação em blocos combinados. ....	53
Figura 4.2: a) Fundação em mesa; b) fundação em mesa com isoladores. ....	53
Figura 4.3: Estrutura com molas montada sobre bloco. ....	54
Figura 4.4: Bloco de inércia sobre estrutura. ....	54
Figura 4.5: Fundação sobre estacas. ....	54
Figura 4.6: Torque resistido por placas de base longitudinais. ....	58
Figura 4.7: Torque resistido por placas de base transversais. ....	58
Figura 4.8: Mecanismo de manivela. ....	64
Figura 5.1: Valores de $\alpha_z$ , $\alpha_x$ e $\alpha_\theta$ para fundações retangulares (RICHART, 1970). ....	71

Figura 6.1: Critérios de vibração para máquinas rotativas BLAKE (1964), modificado por ARYA, O'NEILL e PINCUS (1970). .....	81
Figura 7.1: Esquema de forças e momentos conforme apêndice f.1.2 da API 610.....	114
Figura 7.2: Vista lateral do conjunto motor e bomba.....	115
Figura 7.3: Vista frontal do conjunto motor e bomba.....	116
Figura 7.4: Esquema simplificado da base da fundação.....	118
Figura 7.5: Gráfico da variação do fator de amplificação .....	122
Figura 7.6: Modelo adotado para o bloco de fundação, motor e bomba.....	124
Figura 7.7: Gráfico do SAP2000 que mostra a amplitude de oscilação.....	126
Figura 7.8: Gráfico do SAP2000 que mostra a velocidade eficaz.....	126
Figura 7.9: Gráfico comparativo dos resultados obtidos no método analítico e no SAP2000. .....	128
Figura 7.10: Variação do fator de amplificação.....	132
Figura 7.11: Modelo adotado para o bloco de fundação, motor, bomba e estacas.....	134
Figura 7.12: Gráfico do SAP2000 que mostra amplitudes de oscilação.....	136
Figura 7.13: Gráfico do SAP2000 que mostra a velocidade efetiva.....	137
Figura 7.14: Gráfico comparativo dos resultados obtidos no método analítico e no SAP2000 .....	138

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

### a) Letras romanas maiúsculas

$A_v$  – área da seção transversal da viga

$A_p$  – área da seção transversal do pilar

$A_{cab}$  – área da seção transversal do cabeçote do pistão

$A_f$  – Área de contato horizontal da superfície entre a fundação e o solo

$A_{man}$  – área da seção transversal da manivela

$A_p$  – área da seção reta da estaca

$B_c$  – diâmetro interno do cilindro

$C_z$  – coeficiente de compressão elástica uniforme

$C_\tau$  – coeficiente de cisalhamento elástico uniforme

$C_\theta$  – coeficiente de compressão elástica não uniforme

$C_\psi$  – coeficiente de compressão elástica não uniforme

$D_i$  – razão de amortecimento para a direção  $i$

$D_I(\beta_z)$ ,  $D_{zz}$  – fator de amplificação dinâmica na direção do eixo  $Z$

$D_{haste}$  – diâmetro da haste do pistão

$E$  – módulo de Elasticidade do material

$E_p$  – módulo de elasticidade da estaca

$E_{Sdyn}$  – módulo de rigidez dinâmico

$F_1$  – fator de correção

$F_{haste}$  – força que atua na haste do pistão

$F_o$  – força dinâmica de operação

$F_p$  – força primária

$F_s$  – Força de inércia dinâmica do martelo

$F_{sec}$  – força secundária

$F_x, F_y$  – amplitude da força excitante segundo os eixos  $X$  e  $Y$

$G_p J$  – rigidez torcional da estaca

$G$  – módulo de cisalhamento do solo ou do material

$H$  – altura do pórtico

$I$  – momento de área de 2ª ordem

$I_v$  – momento de inércia da seção transversal da viga

$I_p$  – momento de inércia da seção transversal do pilar

$I_o$  – momento de inércia da base da fundação em relação ao eixo de rotação

$I_\psi$  – momento de massa de inércia do sistema ao redor do centro de gravidade

$I_p$  – momento de inércia (seção transversal) à flexão da estaca

$I_T$  – constante de torção

$I_x, I_y$  e  $I_z$  – momentos de massa do sistema em relação aos eixos ortogonais  $X, Y$  e  $Z$

passando pelo centróide da área da base

$J_x, J_y$  – momentos de inércia da área da base em relação aos eixos  $X$  e  $Y$

$K_{\psi\psi}$  – constante de mola de rotação

$K_{u\psi}$  – constante de mola acoplada

$K_{uu}$  – constante de mola horizontal

$L$  – comprimento da barra de conexão

$L_v$  – vão da viga

$M_m$  – massa do martelo incluindo peças auxiliares

$M, M_M$  – massa da máquina incluindo fundação

$M_x, M_y$  e  $M_z$  – amplitude do momento resultante excitante em torno do eixo  $X, Y$  e  $Z$

$M_{moz}$  – momento de inércia da massa do sistema ao redor do eixo  $Z$  que passa pelo centro de gravidade da área da base no ponto  $O$

$M(t)$  – momento dinâmico

$N$  – número de golpes obtido em ensaio SPT

$NT$  – torque normal

$P_{cab}$  – pressão instantânea que atua no cabeçote do pistão

$P_{man}$  – pressão instantânea na manivela

$P_s$  – força transmitida pelo eixo à conexão

$Q$  – densidade do solo

$R$  – raios equivalentes da área de contato da fundação com o solo para efeito de translação do sistema (fundação + máquina) na direção dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$R_\eta$  – raios equivalentes da área de contato da fundação com o solo para efeito de torção do sistema (fundação + máquina) na direção do eixo  $Z$

$R_\psi$  – raio equivalente da área de contato da fundação com o solo para efeito de rotação do sistema (fundação + máquina) na direção dos eixos  $X$  e  $Y$

$S$  – curso da prensa

$S_f$  – fator de serviço

$U_{din}$  – amplitude máxima dinâmica

$T$  – Período

$V_{\max z}$  – velocidade máxima de vibração na direção do eixo  $Z$

$V_{efz}$  – velocidade eficaz de vibração na direção do eixo  $Z$

$V_s$  – velocidade da onda de cisalhamento do solo

$Z_p$  – deslocamento do pistão

## **b) Letras romanas minúsculas**

$c$  – constante elástica (mola) de um sistema 1GDL

$c_i$  – constante de amortecimento para a direção  $i$

$c_y$  – amortecimento

$c_{nj}$  – constante de amortecimento de uma estaca à torção

$\dot{c}_x$ ,  $\dot{c}_y$  e  $\dot{c}_z$  – constante de amortecimento de uma estaca nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$\dot{c}_\phi$  e  $\dot{c}_{\psi j}$  – constante de amortecimento de uma estaca à rotação

$\dot{c}_{x\phi}$ ,  $\dot{c}_{y\phi}$  e  $\dot{c}_{u\psi j}$  – rigidez cruzada de uma estaca entre translação horizontal e rotação

$c_x^g$ ,  $c_y^g$  e  $c_z^g$  – constante de amortecimento para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$c_{gu\psi}$  e  $c_{g\psi}$  – constante de amortecimento à rotação para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$c_{g\eta}$  – constante de amortecimento à torção para um grupo de estacas

$c_{gu}$  – constante de amortecimento para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$  e  $Y$

$c_{gv}$  – constante de amortecimento para um grupo de estacas na direção do eixo  $Z$

$c_{xx}^g$ ,  $c_{yy}^g$  e  $c_{zz}^g$  – constante de amortecimento à rotação para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$d_s$  – deslocamento da prensa

$e_m$  – excentricidade da massa

$e_v$  – índice de vazios do solo

$f_o$  – velocidade de operação

$f_B$  – frequência natural de translação

$f_n$  – frequência natural do sistema

$f_T$  – frequência natural de rotação

$f_y$  – frequência cíclica

$g$  – aceleração da gravidade

$j$  – momento de massa de 2ª ordem

$k$  – razão de rigidez entre fator de rigidez da viga e o fator de rigidez do pilar;

$k_B$  e  $k_V$  – características de amortecimento com diferentes unidades

$k_{ef}$  – rigidez efetiva dos mancais

$k_i$  – rigidez na direção  $i$

$k_{nj}$  – rigidez de uma estaca à torção

$k_{uj}$  – rigidez de uma estaca nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$

$k_{vj}$  – rigidez de uma estaca na direção do eixo  $Z$

$k_x$  e  $k_y$  constante de mola para modo de vibração horizontal



$k_z$  – constante de mola para modo de vibração vertical

$k_\psi$  – constante de mola para modo de vibração torcional

$k_\theta$  – constante de mola para modo de vibração de balanço

$k'_x$ ,  $k'_y$  e  $k'_z$  – rigidez de uma estaca nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$k'_\phi$  e  $k'_{\psi j}$  – rigidez de uma estaca à rotação

$k'_{x\phi}$ ,  $k'_{y\phi}$  e  $k'_{u\psi j}$  – rigidez cruzada de uma estaca entre translação horizontal e rotação

$k_x^g$ ,  $k_y^g$  e  $k_z^g$  – rigidez para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$k_{gu}$  – rigidez para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$  e  $Y$

$k_{gv}$  – rigidez para um grupo de estacas na direção do eixo  $Z$

$k_{xx}^g$ ,  $k_{yy}^g$  e  $k_{zz}^g$  – rigidez à rotação para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$k_{gu\psi}$  e  $k_{g\psi}$  – rigidez à rotação para um grupo de estacas nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$

$k_{g\eta}$  – rigidez à torção para um grupo de estacas

$k_v$  – fator de rigidez da viga

$k_p$  – fator de rigidez do pilar

$l$  – distância do centro de gravidade do sistema (fundação + máquina) em relação à base (assentamento) da fundação; comprimento da fundação;

$m$  – massa

$m_{alt}$  – massa alternativa

$m_d$  – massa do martelo incluindo os efeitos de qualquer desequilíbrio do mecanismo

$m_r$  – massa rotativa

$m_{rot}$  – massa rotativa de máquinas alternativas

$p_{dy}$  – frequência natural

$p_\phi$  – frequência natural de rotação

$r$  – comprimento do braço do virabrequim

$r_o$  – raio da seção da estaca

$r_x, r_y, r_z$  – raios equivalentes da área de contato da fundação com o solo para efeito de translação do sistema (fundação + máquina) nas direções dos eixos  $X, Y$  e  $Z$

$r_{\theta_x}, r_{\theta_y}$  – raios equivalentes da área de contato da fundação com o solo para efeito de rotação do sistema (fundação + máquina) nas direções dos eixos  $X$  e  $Y$

$r_{\theta_z}$  – raios equivalentes da área de contato da fundação com o solo para efeito de torção do sistema (fundação + máquina) na direção do eixo  $Z$

$t$  – tempo

$v_M$  – velocidade pós impacto da máquina

$v_m$  – velocidade de impacto do martelo

$y_p$  – deslocamento do pino da manivela no eixo local  $Y$

$z_p$  – deslocamento do pino da manivela no eixo local  $Z$

### c) Letras gregas maiúsculas

$\Omega$  – frequência de excitação

### d) Letras gregas minúsculas

$\alpha$  – fator para cálculo do coeficiente de compressão elástica uniforme para fundações retangulares

$\alpha_M$  – velocidade de recuperação do martelo em relação à velocidade do impacto

$\beta$  – razão entre a frequência de excitação e a frequência natural

$\beta_\phi$  – razão entre frequência de operação e a frequência natural

$\xi_z$  – fator de amortecimento na direção do eixo  $Z$

$\gamma_c$  – peso específico do concreto

$\gamma_s$  – peso específico do solo

$\delta$  – deslocamento

$\delta_y$  – deformação vertical total do pórtico no ponto de localização da massa;

$\delta_{yp}$  – deformação do pilar;

$\delta_{yv}$  – deformação da viga;

$\phi$  – ângulo de rotação

$\phi(t)$  – deslocamento angular

$\mu_y$  – fator de amplificação dinâmico ao longo do eixo  $y$

$\rho_y$  – amplitude da vibração

$\rho$  – densidade do material

$\sigma_o$  – pressão de confinamento do solo

$\omega$  – frequência de excitação

$\omega_n$  – frequência natural do sistema

$\omega_o$  – frequência circular de operação

$\psi$  – rotação ao redor do eixo  $Y$

$y$  – deslocamento no eixo  $Y$

$\nu$  – coeficiente de Poisson

## RESUMO

Esta dissertação apresenta um estudo para uma futura normalização brasileira para fundações de máquinas. O Brasil não tem norma específica da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) para fundações de máquinas, porém existe na Petrobras – Petróleo Brasileiro S.A., a norma interna N-1848 – Projeto de Fundações de Máquinas, que vem sendo usada e exigido o seu uso no projeto de fundações de máquinas das empresas pertencentes ao grupo Petrobrás. Esta dissertação apresenta os conceitos e teoria de análise dinâmica e vibrações para que se possa entender a terminologia e os conceitos físicos e matemáticos envolvidos no processo de dimensionamento de fundações de máquinas. Mostra-se os diversos tipos de fundações de máquinas, parâmetros de projeto, cargas nas fundações de máquinas e os parâmetros de solo que devem ser conhecidos. Elabora-se a análise da norma 1848 da Petrobras, comparando-a com o documento do Instituto Americano de Concreto, ACI 351.3R-04 e com a norma alemã, DIN-4024, partes 1 e 2. Após análise da N-1848 faz-se um estudo de caso onde dimensiona-se a fundação de uma bomba para a indústria química, que é acionada por meio de motor elétrico. No dimensionamento analítico usa-se as prescrições normativas da N-1848 e o método dos elementos finitos, usando-se o programa SAP2000. Os resultados obtidos são comparados e possibilitam identificar os principais parâmetros de aceitação de um projeto de fundações de máquinas, e concluir sobre a aplicabilidade da norma da Petrobras.

## **ABSTRACT**

This dissertation presents a study for future standardization in Brazil concerning machine foundations. Brazil has no specific ABNT (Brazilian National Standards Organization) standard for machine foundations. However, Petrobras - Petroleo Brasileiro S.A. has the internal standard N-1848 - Design of Machine Foundations which use is required in the design of machine foundations within the companies of the Petrobras group. This dissertation presents the concepts and theory of dynamic analysis and vibrations for understanding of the terminology and physical and mathematical concepts of design of machine foundations. It shows the various types of machine foundations, design parameters, machine foundations loads, and the soil parameters that must be known. It analyzes the Petrobras Standard N-1848, thus comparing it with the American Concrete Institute document - ACI 351.3R-04 and the German standard, DIN 4024, parts 1 and 2. After the analysis of N-1848 a case study was made to scale the foundation of a chemical industry pump which was driven by an electric motor. The analytical dimensioning uses the prescriptives of N-1848 and dimensioning by finite element method utilizing the program SAP2000. The results obtained are compared and it is possible to identify the main parameters of acceptance for a project of machine foundations, and conclude regarding the applicability of the Petrobras standard.

## 1 INTRODUÇÃO

O dimensionamento de fundações para máquinas é bastante complexo, pois há diversas solicitações de cargas a que as mesmas estarão submetidas, cargas estáticas e ou cargas dinâmicas, que a fundação suportará. Esse dimensionamento, se realizado de forma inadequada poderá resultar em fundações superdimensionadas ou, em outros casos, fundações subdimensionadas com possíveis danos aos equipamentos, à própria fundação, às estruturas vizinhas, em perdas de produção e riscos de segurança e saúde ocupacional das pessoas.

As máquinas produzem solicitações dinâmicas que são transferidas às fundações por meio de movimentos vibratórios, ou em casos de máquinas sensíveis, estas recebem vibrações por meio das fundações, daí ser necessário analisar e estudar esses movimentos vibratórios durante o projeto da fundação.

As máquinas podem ser classificadas como: a) as que produzem forças de impacto como martelos de forjas e prensas; b) as que produzem forças periódicas como motores de pistão, compressores e motores à explosão; c) máquinas de alta velocidade tais como turbinas e compressores rotativos; d) outros tipos de máquinas.

As fundações podem ser classificadas de acordo com seu formato estrutural, como: a) fundações tipo bloco, no qual a máquina se apoiará; b) fundações em caixa ou caixão, consistindo de uma estrutura vazada que suporta a máquina em seu topo; c) fundação em parede que é formada por um par de paredes e a máquina é apoiada no topo destas paredes; d) fundações em estrutura formada por pilares, vigas e lajes e que suportará a máquina em seu topo.

As máquinas podem ser classificadas também de acordo com suas frequências de operação, isto é: a) baixa a média frequência, aquelas que têm frequências até 500 *rpm* ; b) as de média a altas frequências, que têm frequências entre 500 a 1000 *rpm* ; c) alta frequência que têm frequências superiores a 1000 *rpm* .

O projeto de fundações deverá satisfazer a vários requisitos, a saber:

- a) a fundação deverá suportar as cargas impostas sem ter falhas estruturais;
- b) obedecer aos parâmetros e limites permissíveis previstos nas normas;
- c) o centro de gravidade combinado da máquina e fundação deverá sempre que possível ficar alinhado na vertical com o plano da base;
- d) nenhuma ressonância deverá ocorrer, ou seja, a frequência natural do sistema fundação-solo deverá ou ser muito maior ou muito menor que a frequência de operação da máquina; se a máquina tem alta velocidade de operação a frequência natural do sistema fundação-solo deverá ser baixa e *vice versa*;
- e) as amplitudes sob condições de serviço devem estar dentro dos limites previstos que geralmente são fornecidos pelos fabricantes das máquinas;
- f) todos os componentes rotativos e de movimentos alternativos de uma máquina devem ser bem balanceados de modo a minimizar forças e momentos de desequilíbrio;
- g) sempre que possível a fundação deve ser planejada de modo a permitir alterações posteriores se for necessário;
- h) no caso de fundações diversas o nível de água do solo deve estar o mais baixo possível e sua profundidade no mínimo a um quarto da largura da fundação abaixo do plano da base, isso limita a propagação de vibração, pois o solo inundado é um bom condutor de ondas de vibração;
- i) as fundações de máquinas devem ser separadas dos componentes da construções adjacentes por meio de juntas;
- j) a fundação deve ser protegida de óleo de máquina por meio de tratamento químico adequado ou cobertura resistente a ácido;

Observa-se a complexidade do dimensionamento e a necessidade de conhecimentos multidisciplinares, tais como mecânica, estruturas, mecânica dos solos, fundações e outras para a análise e dimensionamento dos elementos de fundação de máquinas. Estudos anteriores feitos por NETO (1989), MILLET (2006) e MACHADO (2010), entre outros realizados no Brasil e no mundo, mostram a busca pela evolução, entendimento e domínio das metodologias usadas no projeto de fundações de máquinas.

Este trabalho visa pesquisar e estudar as prescrições das normas disponíveis, N-1848, ACI 351.3R-04 e DIN-4024 partes 1 e 2, adequadas para o dimensionamento de fundações de máquinas, em especial o caso de máquinas rotativas de grande porte.

## 1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

O objetivo deste estudo é analisar a norma N-1848, Projeto de Fundações de Máquinas, da Petrobras e verificar sua aplicabilidade para dimensionamento de fundações de máquina.

Busca-se também:

- a) entender os critérios de dimensionamento de fundações de máquinas;
- b) identificar as características necessárias das máquinas para possibilitar o projeto de uma fundação adequada.

## 1.2 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

Propõe-se avaliar a norma N-1848 que trata de fundações de máquinas, comparar com a prática recomendada do ACI 351.3R-04 e norma DIN-4024 partes 1 e 2 e identificar se a mesma é consistente para o dimensionamento de fundações de máquinas.

## 1.3 RELEVÂNCIA DO ESTUDO

A relevância deste estudo se faz face a complexidade do cálculo estrutural das fundações de máquinas possibilitando o entendimento e a aplicação dos conhecimentos técnicos à prática cotidiana.



## 2 METODOLOGIA

Na pesquisa bibliográfica foram utilizadas diversas fontes de pesquisa tais como: livros, revistas especializadas e periódicos. Na pesquisa documental foram utilizadas as normas brasileiras, da ABNT, norma da PETROBRAS, norma do American Concret Institute, ACI, norma alemã, do Deustcher Industrien Normen, DIN e normas do International Organization for Standardization, ISO.

A pesquisa consiste de se fazer uma revisão bibliográfica da literatura existente sobre o assunto de fundações de máquinas, analisar as normas existentes no Brasil, Estados Unidos e Alemanha e compará-las; aplicar as prescrições contidas nas normas atuais em um estudo de caso e analisar resultados e discrepâncias encontradas. A pesquisa permitirá também sugestões e recomendações de alterações, revisões futuras e novas pesquisas. A Figura 2.1 ilustra a metodologia adotada na elaboração da pesquisa.

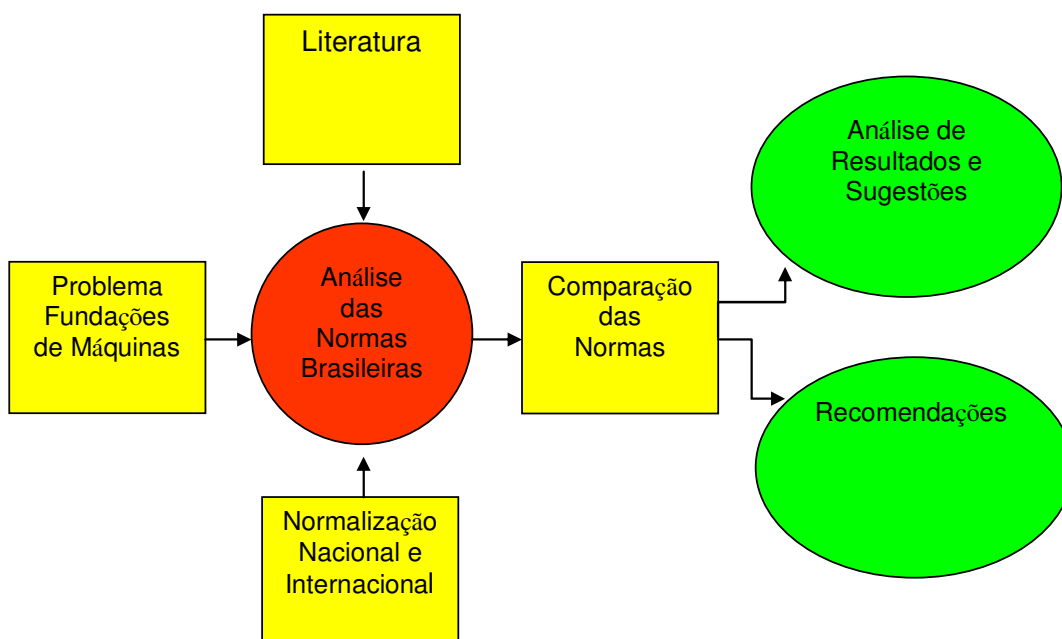


Figura 2.1: Esquema de elaboração da pesquisa.

### 3 ANÁLISE DINÂMICA

As últimas décadas foram marcadas com o desenvolvimento de várias tecnologias, sem dúvida alguma nos diversos ramos da Engenharia. Os conhecimentos necessários a análise e dimensionamento de fundações de máquinas também evoluíram seguindo essa tendência, e os procedimentos empíricos passaram a dar lugar a procedimentos técnicos e científicos que englobam principalmente os conceitos de dinâmica, parâmetros dinâmicos de solos e mecânica dos solos.

O desempenho de uma máquina é afetado pelo dimensionamento adequado de sua fundação. Todas as etapas de análise e dimensionamento da fundação deverão ser realizadas segundo critérios estabelecidos para assegurar o bom funcionamento do equipamento.

Para análise e dimensionamento de qualquer tipo de fundação de máquina é fundamental o entendimento dos conceitos de dinâmica. Os sistemas de fundações de máquinas têm massa e elasticidade estando sujeito a vibrações. Faz-se necessário efetuar a análise dinâmica do sistema máquina – fundação de modo a se determinar o modelo matemático a ser usado no dimensionamento da fundação. Neste estudo serão analisados os principais conceitos de dinâmica e os procedimentos de análise e dimensionamento de fundações de máquinas. Neste capítulo foram consideradas as notações do livro “Foundation for Industrial Machines”, de Bathia (2008).

#### 3.1 NOTAS INICIAIS

Para entender o comportamento dinâmico das fundações de máquinas é necessário o conhecimento da teoria de vibrações. Inicia-se o entendimento de sistemas de vibração simples com o de um grau de liberdade (1GDL) para se entender sistemas mais complexos e outros fenômenos, como ressonância e isolamento de vibrações. O sistema mais simples para um entendimento básico é o sistema massa-mola.

## 3.2 VIBRAÇÃO LIVRE

Um sistema estrutural quando tem sua posição de equilíbrio perturbada e liberada, oscila em torno de sua posição média de equilíbrio. Essa vibração do sistema sem qualquer força de excitação externa é denominada vibração livre. Os sistemas com vibrações livres podem ser com amortecimento e sem amortecimento.

### 3.2.1 Sistema massa mola sem amortecimento – 1GDL

Considera-se sistemas massa mola com um grau de liberdade com movimentos de translação ou com um grau de liberdade com movimento de rotação.

#### 3.2.1.1 Sistema massa-mola com movimento de translação

Considere um sistema massa mola sem amortecimento, de um grau de liberdade (Figura 3.1a). O sistema tem massa  $m$  e mola unidirecional na direção  $Y$  com rigidez  $k_y$  e encontra-se na posição sem movimento, ou seja, em equilíbrio estático. A força da gravidade atuando na massa é  $mg$  sendo  $g$  a aceleração da gravidade, que atua na direção  $Y$ , de cima para baixo. Sob a ação desta força a mola deforma  $\delta_y$ . Essa posição deslocada da massa é denominada posição de equilíbrio estático.

Analisando-se o equilíbrio das forças no diagrama de corpo livre, mostrado na Figura 3.1b, seguem-se:

$$k_y \delta_y = mg \quad (3.1)$$

$$\delta_y = \frac{mg}{k_y} \quad (3.2)$$

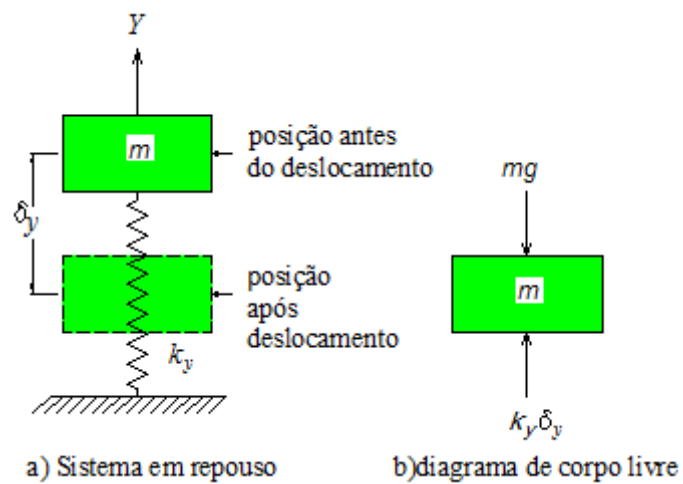


Figura 3.1: Equilíbrio de um sistema 1GDL sem amortecimento.

Aplicando-se um deslocamento inicial ao sistema em repouso tem-se uma oscilação segundo o eixo  $Y$  e a massa se deslocará para cima e para baixo, a uma distância  $y$  conforme mostrado na Figura 3.2.

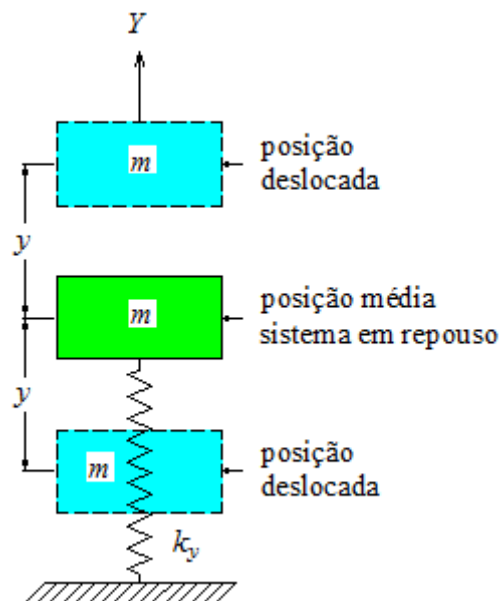


Figura 3.2: Sistema 1GDL sem amortecimento, em movimento.

Considerando-se um instante de tempo  $t$ , a posição da massa  $m$  está a uma distância  $y$  na direção  $Y$ , superior à posição média como na Figura 3.3a. Analisando-se as forças atuando sobre a massa conforme se mostra na Figura 3.3b, tem-se:

- força de inércia  $m\ddot{y}$ ;
- força resistente elástica (força da mola)  $k_y y$ .

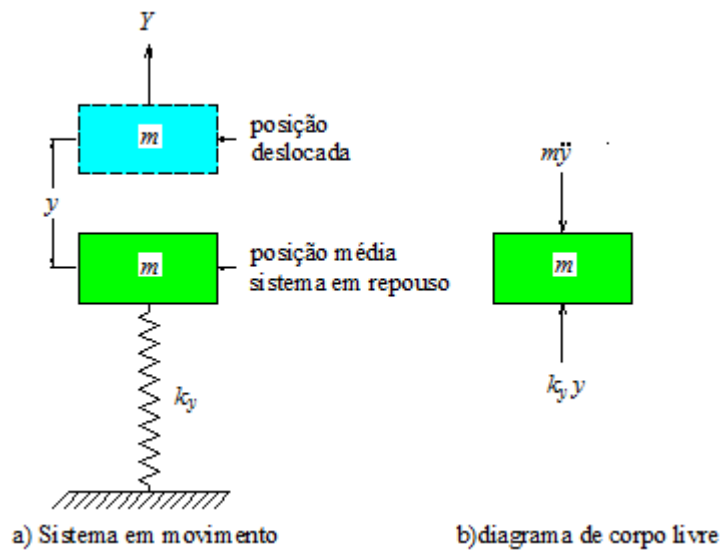


Figura 3.3: Vibração livre de um Sistema 1GDL.

Considerando-se o equilíbrio das forças atuando sobre a massa em um instante  $t$  a equação do movimento fica:

$$m\ddot{y} + k_y y = 0 \quad (3.3)$$

Essa equação é chamada de equação do movimento do sistema de um grau de liberdade em vibração livre.

A solução dessa equação nos fornece a frequência circular  $p_y$ :

$$p_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad rad/s \quad (3.4)$$

Substituindo-se a expressão 3.1 na expressão 3.4 a frequência circular também pode ser expressa por:

$$p_y = \sqrt{\frac{g}{\delta_y}} \quad rad/s \quad (3.5)$$

Considerando-se a condição inicial para  $y(t) = y(0)$  e  $\dot{y}(t) = \dot{y}(0)$  no tempo  $t = 0$  o movimento da massa e a amplitude máxima da vibração livre será dada por:

$$y = y(0) \cos p_y t + \left( \frac{\dot{y}(0)}{p_y} \right) \sin p_y t \quad (3.6)$$

e a amplitude máxima fica:

$$\rho_y = \sqrt{\left( y(0)^2 + \left( \frac{\dot{y}(0)}{p_y} \right)^2 \right)} \quad (3.7)$$

Sendo um sistema sem amortecimento ele continuará vibrando indefinidamente. O gráfico da expressão 3.6, ilustrando o movimento da massa  $m$  para as condições iniciais  $y(t) = y(0)$  e  $\dot{y}(t) = \dot{y}(0)$  no tempo  $t = 0$  é mostrado na Figura 3.4.

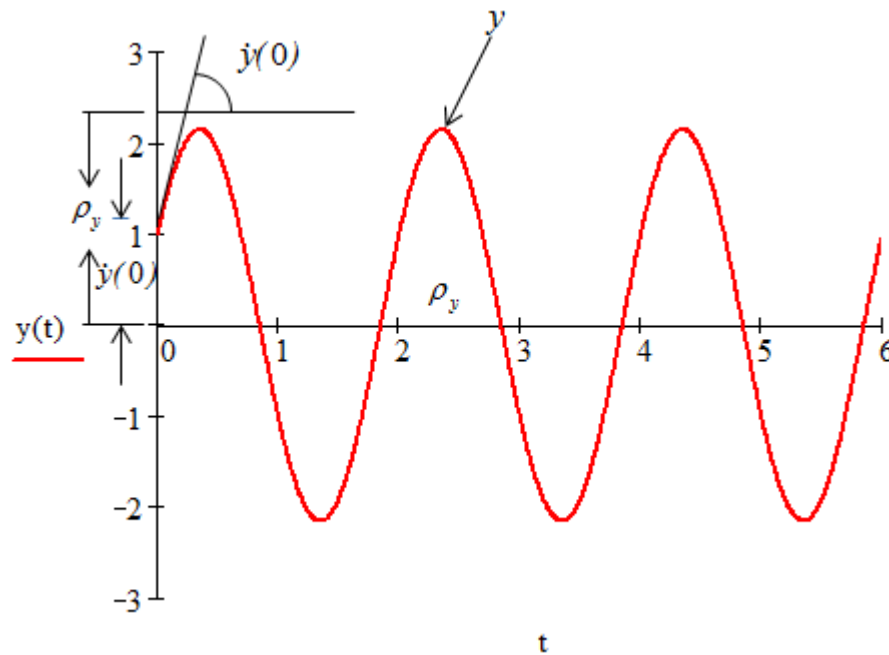


Figura 3.4: Resposta da vibração livre do sistema 1GDL.

$$y(0) = 1; \dot{y}(0) = 6; T = 2 \text{ s}.$$

Reescrevendo-se a equação 3.3

$$m\ddot{y} + k_y = 0$$

e pondo-se

$$y = e^{st} \quad (3.8)$$

$$\ddot{y} = s^2 e^{st} \quad (3.9)$$

segue-se

$$(ms^2 + k_y)e^{st} = 0 \quad (3.10)$$

Como  $e^{st}$  não é nulo segue-se

$$(ms^2 + k_y) = 0 \quad (3.11)$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad (3.12)$$

Sabendo-se que  $p_y$  representa a frequência de vibração livre ou a frequência circular:

$$p_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \text{ rad/s} \quad (3.13)$$

resulta

$$y = e^{\pm p_y t} \quad (3.14)$$

ou

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_y}{m}} \text{ Hz} \quad (3.15)$$

Sendo  $f_y$  a frequência cíclica em ciclos/segundo (Hz), tem-se para a solução da equação diferencial ordinária

$$y = A_1 e^{ip_y t} + A_2 e^{-ip_y t} \quad (3.16)$$

que pode ser reescrita como

$$y = A \cos p_y t + B \sin p_y t \quad (3.17)$$

Para obtenção de A e B consideram-se as condições iniciais:

– deslocamento inicial  $y(t) = y(0)$ ;

– velocidade inicial  $\dot{y}(t) = \dot{y}(0)$ .

Para  $t=0$  tem-se:

$$A = y(0)$$

$$B = \frac{\dot{y}(0)}{p_y}$$

assim

$$y = y(0) \cos p_y t + \frac{\dot{y}(0)}{p_y} \sin p_y t \quad (3.18)$$

A amplitude máxima é dada por:

$$\rho_y = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.19)$$

ou

$$\rho_y = \sqrt{y(0)^2 + \left(\frac{\dot{y}(0)}{p_y}\right)^2} \quad (3.20)$$

Para  $y = y(0)$  e  $\dot{y}(t) = 0$  resulta:

$$y = y(0) \cos p_y t \quad (3.21)$$

Para sistemas com movimento de translação com grau de liberdade em  $x$  ou  $z$  basta substituir na solução da equação diferencial ordinária  $y$  por  $x$  ou por  $z$ , conforme o eixo de translação.

### 3.2.1.2 Sistema 1GDL – mola com rigidez de rotação conectada à base do bloco

Considere-se um bloco com massa  $m$  e momento de inércia de massa  $M_{mz}$  ao redor do centroide  $C$ , localizado no eixo  $Z$  (Figura 3.5a). A mola tem rigidez rotacional  $k_\phi$  e está ligada à massa no ponto  $O$ .

Considere que a massa  $m$  não pode se mover nas direções dos eixos  $X$  e  $Y$  e pode somente girar ao redor do eixo  $Z$  que passa pelo ponto  $O$ . O centroide  $C$  está localizado a uma distância  $h$  do ponto  $O$  da massa. O grau de liberdade do sistema é a rotação  $\phi$  ao redor do ponto  $O$ .

Aplicando-se condições iniciais ao sistema em repouso ter-se-á uma oscilação ao redor do eixo  $Z$  e a massa  $m$  oscilará ao redor do ponto  $O$ . Considerando-se um instante de tempo  $t$ , a posição da massa  $m$  irá girar de um ângulo  $\phi$  como mostrado na Figura 3.5 b. Em função da rotação o centroide  $C$  move-se para a posição  $C'$  e induz a uma rotação  $\phi$  e uma translação  $h\phi$  do centroide  $C'$ . As forças atuando no sistema são mostradas na Figura 3.5c.

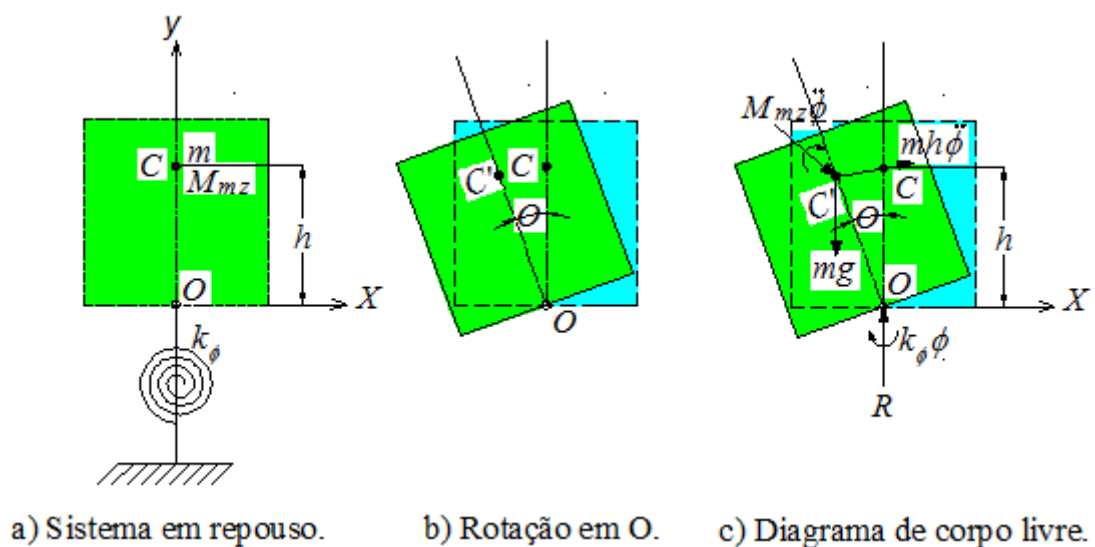


Figura 3.5: Vibração livre de sistema 1GDL, mola rotacional no centro da base.



Neste caso tem-se:

- inércia rotacional  $M_{mz}\phi$ ;
- força de inércia de translação  $mh\ddot{\phi}$ ;
- o momento resistente em  $O$  é igual a  $k_{\phi}\phi$ ;
- momento devido ao peso próprio em  $O$  é igual a  $mg \cdot h\text{sen}\phi = mg\phi$ .

Considerando-se o equilíbrio das forças tem-se

$$M_{moz}\ddot{\phi} + (k_{\phi} - mgh)\phi = 0 \quad (3.22)$$

cuja a solução é

$$\phi = A \cos p_{\phi}t + B \text{sen } p_{\phi}t \quad (3.23)$$

A frequência circular é

$$p_{\phi} = \sqrt{\frac{(k_{\phi} - mgh)}{M_{moz}}} \text{ rad/s} \quad (3.24)$$

e desprezando-se  $mgh$  face o valor de  $k_{\phi}$ , então

$$p_{\phi} = \sqrt{\frac{k_{\phi}}{M_{moz}}} \text{ rad/s} \quad (3.25)$$

### 3.2.1.3 Sistema 1GDL – mola com rigidez torcional conectada à base do bloco

Considere um bloco (Figura 3.6a) com massa  $m$  e momento de inércia de massa  $M_{my}$  ao redor do eixo  $Y$  passando pelo CG da base do bloco. A mola tem rigidez rotacional  $k_{\psi}$  e está ligada à massa no ponto  $O$  que se encontra no CG da base do bloco.

Considere que a massa  $m$  não pode se mover nas direções dos eixos  $X$  e  $Z$ , mas pode somente girar ao redor do eixo  $Y$  (Figura 3.6 b), que passa pelo ponto  $O$ . O centroide  $C$  está localizado a uma distância  $h$  do ponto  $O$  da massa. O grau de liberdade do sistema é a rotação  $\psi$  ao redor do ponto  $O$ .

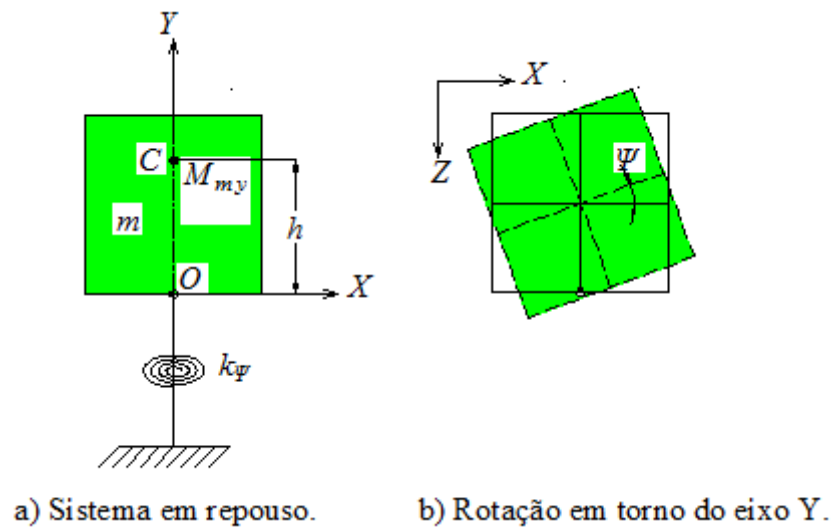


Figura 3.6: Vibração livre de sistema 1GDL, mola torsional no centro da base.

A equação do movimento nesse caso será

$$M_{moy}\ddot{\psi} + k_{\psi}\psi = 0 \quad (3.26)$$

cuja solução é

$$\psi = A \cos p_{\psi}t + B \sin p_{\psi}t \quad (3.27)$$

A frequência natural é dada por:

$$p_{\psi} = \sqrt{\frac{k_{\psi}}{M_{moy}}} \quad \text{rad/s} \quad (3.28)$$

### 3.2.2 Sistemas equivalentes de um grau de liberdade

Na concepção do modelo matemático a máquina é considerada como um corpo rígido constituído somente de massa, enquanto a fundação é considerada:

- a) um corpo rígido tendo somente massa se for um bloco de fundação;
- b) um corpo elástico contendo massa e rigidez para os casos em que a máquina é apoiada sobre um sistema estrutural constituído de colunas e vigas.

Os sistemas básicos considerados e sistemas de um grau de liberdade equivalentes para cada um deles são:

1. pilar suportando a massa ( Figura 3.7).

Sendo  $m_p$  a massa do pilar, a frequência natural é dada por:

$$p = \sqrt{\frac{k}{1 + \frac{m_p}{3}}} \text{ rad/s} \tag{3.29}$$

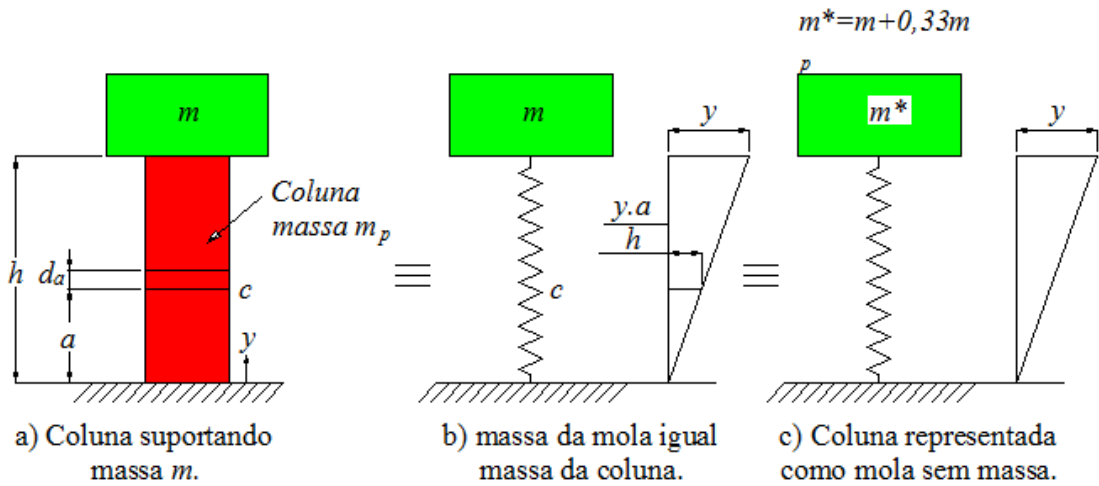


Figura 3.7: Sistema de um grau de liberdade, uma coluna suportando a massa.

2. viga em balanço suportando a massa ( Figura 3.8).

Sendo  $m_v$  a massa da viga a frequência natural é dada por:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m^*}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{33}{140}m_v}} \text{ rad/s} \tag{3.30}$$

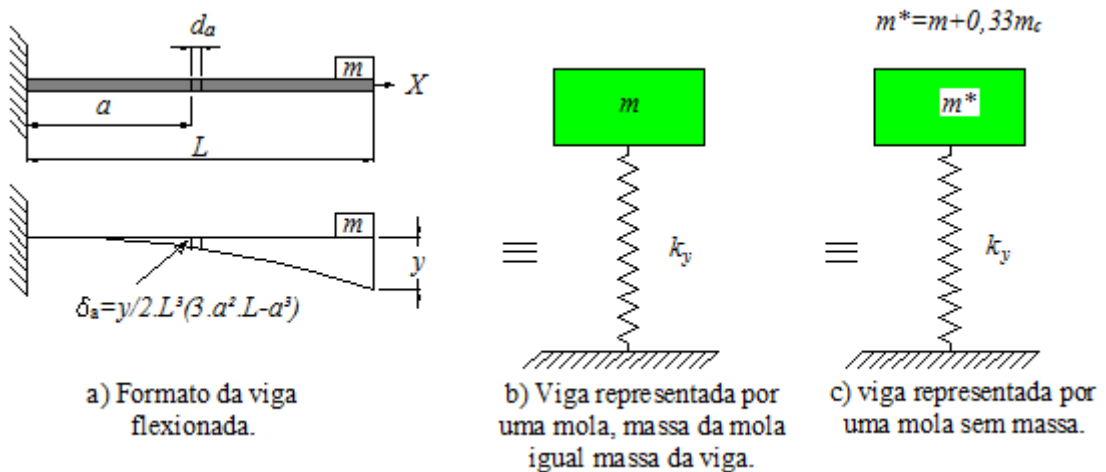


Figura 3.8: Viga em balanço suportando a massa  $m$ .

3. viga simplesmente apoiada suportando a massa.

Consideram-se dois casos:

a) localização da massa no centro da viga (Figura 3.9)

Sendo  $m_v$  a massa da viga a frequência natural é dada por

$$p = \sqrt{\frac{k}{m^*}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{17}{35} m_v}} \text{ rad / s} \quad (3.31)$$

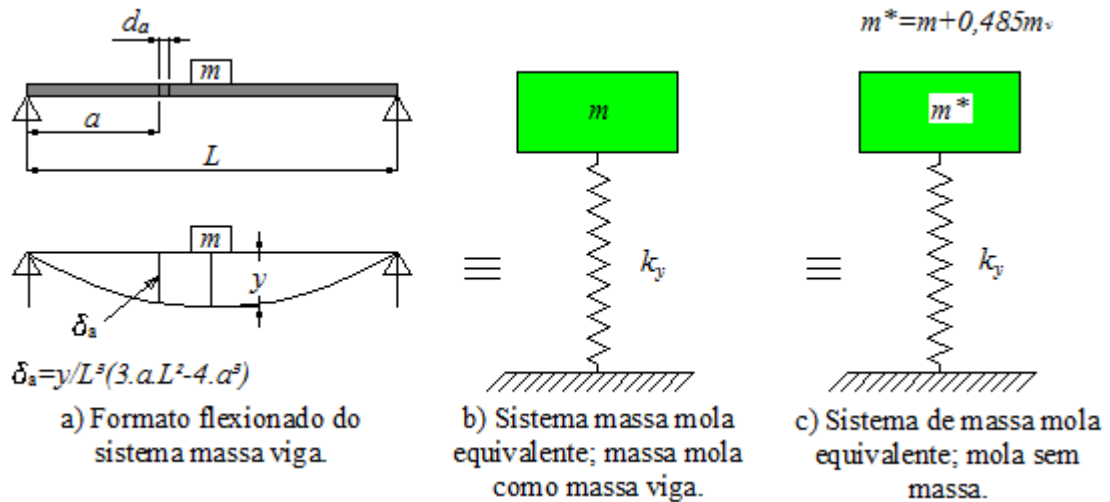


Figura 3.9: Viga simplesmente apoiada – Massa ao centro – Massa Equivalente.

b) localização da massa  $m$  no centro da viga e outra massa  $m_1$  fora do centro – viga considerada sem massa (Figura 3.10).

As expressões para esse caso são:

$$\alpha = \left\{ \frac{3a}{L} - 4 \left( \frac{a}{L} \right)^3 \right\}^2 \quad (3.32)$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m^*}} \text{ rad/s} \quad (3.33)$$

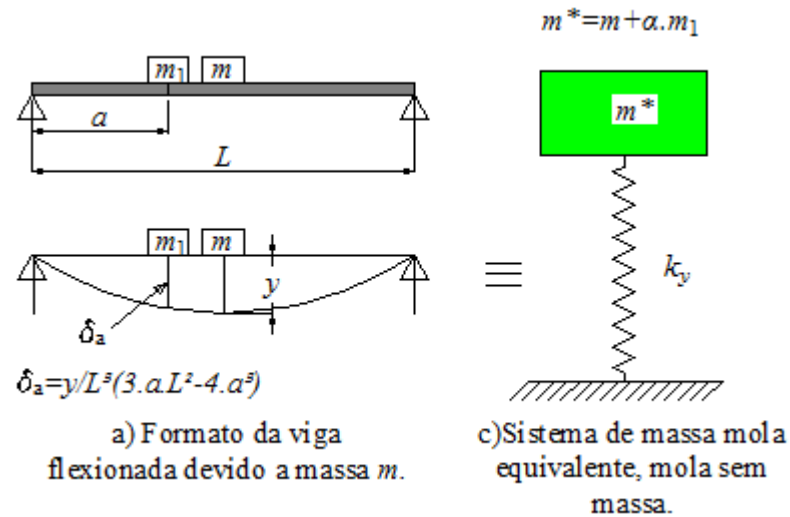


Figura 3.10: Viga simplesmente apoiada – uma massa no centro e outra massa fora do centro (viga sem massa).

Na Figura 3.11 tem-se o gráfico dos valores de  $\alpha$  versus a razão  $a/L$ .

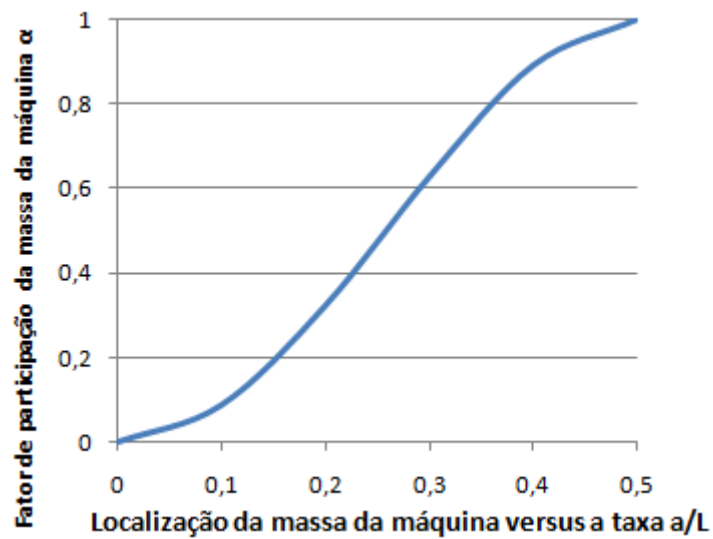


Figura 3.11: Viga simplesmente apoiada com massa localizada fora do centro versus fator de participação da massa da máquina (viga sem massa).

4. viga engastada suportando a massa considerada no centro da viga (Figura 3.12).

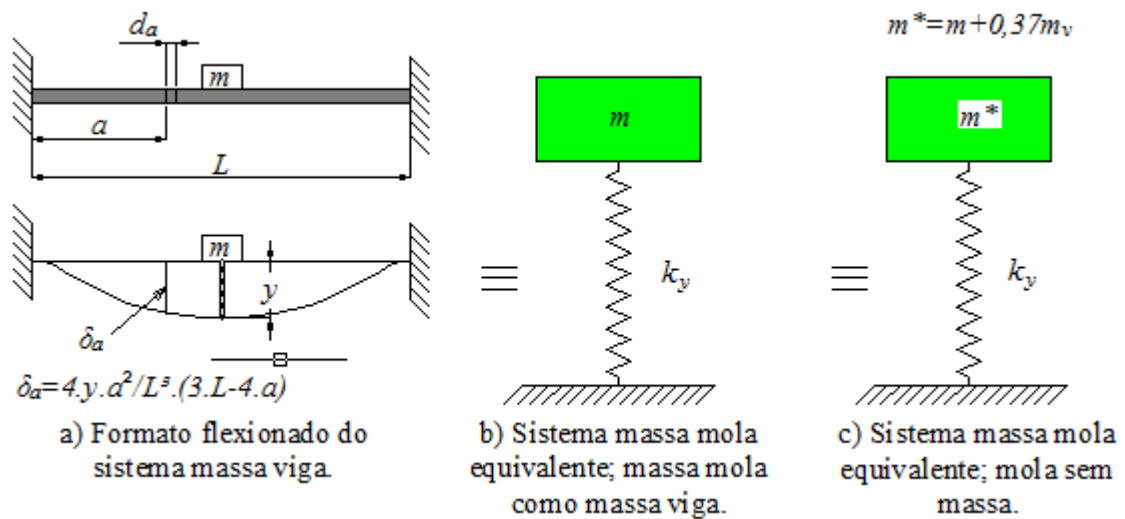


Figura 3.12: Viga engastada – massa ao centro da viga.

5. pórtico suportando uma massa (Figuras 3.13 e 3.14).

a) movimento vertical

$$k_v = \frac{I_v}{L} \quad (3.34)$$

$$k_p = \frac{I_p}{H} \quad (3.35)$$

$$m^* = m + 0,45m_v \quad (3.36)$$

$$\delta_{yv} = \frac{m^* g L^3}{4(k+2)} \cdot \frac{2k+1}{k+2} \quad (3.37)$$

$$m^* = (m + m_v) + 2 \cdot 0,33m_p \quad (3.38)$$

$$\delta_{yp} = \frac{m^* g}{2 \left( \frac{EA_p}{H} \right)} \quad (3.39)$$

$$\delta_y = \delta_{yv} + \delta_{yp} \quad (3.40)$$

$$p_y = \sqrt{\frac{g}{\delta_y}} \quad \text{rad / s} \quad (3.41)$$

onde

$A_v$  – área da seção transversal da viga;

$A_p$  – área da seção transversal do pilar;



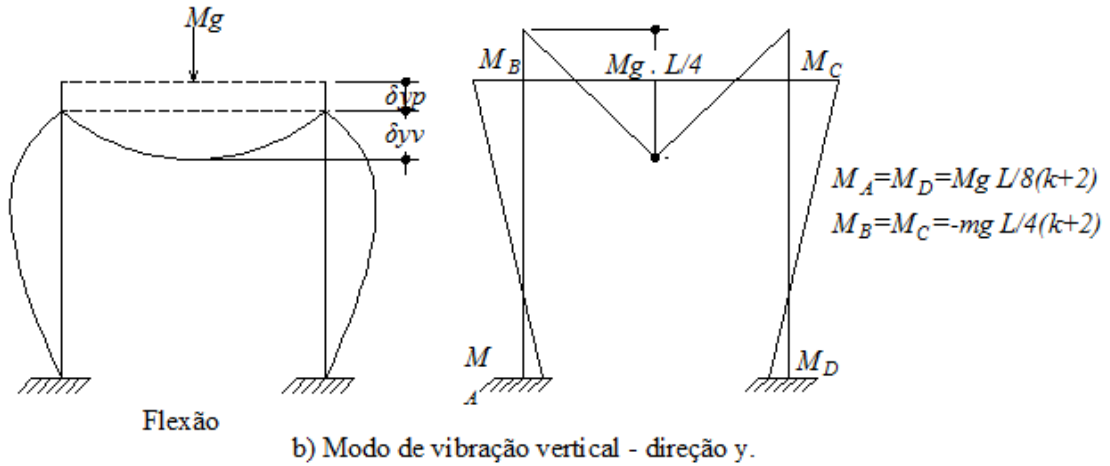


Figura 3.13: Pórtico com massa da máquina  $m$  no centro da viga; momento de engastamento e modo de vibração na direção vertical.

b) movimento transversal ao longo do eixo X

$$m_p^* = 0,23m_p \tag{3.42}$$

$$m^* = \{(m + m_v) + 0,23 \cdot 2m_p\} \tag{3.43}$$

$$p = \sqrt{\frac{k_x}{m^*}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_x}} \text{ rad / s} \tag{3.44}$$

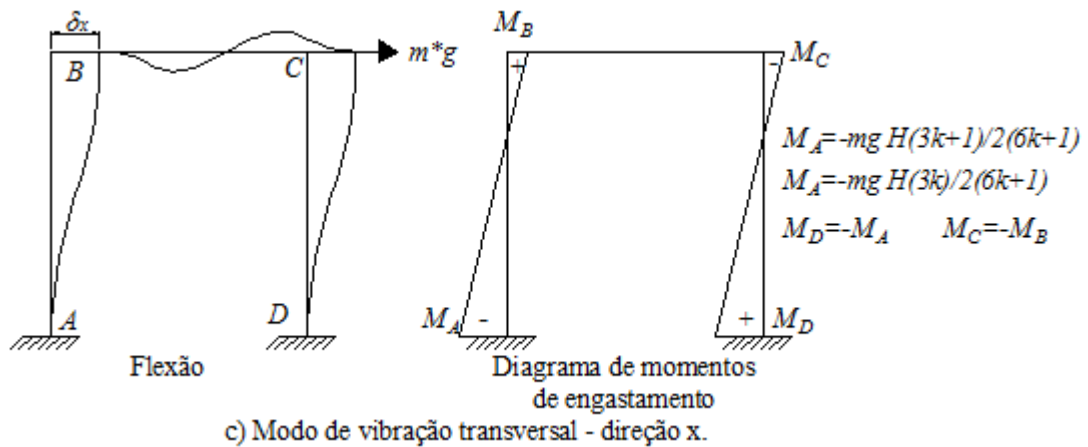


Figura 3.14: Pórtico com massa da máquina  $m$  no centro da viga; momento de engastamento e modo de vibração na direção horizontal.

### 3.2.3 Sistema de amortecimento

Ao processo pelo qual a vibração constante diminui em amplitude é denominado amortecimento. Existem diversos sistemas de amortecimento. Será estudado o amortecimento viscoso, por tratar-se de aplicação específica para fundações de máquinas, onde a força



resistente do sistema de amortecimento é proporcional à velocidade. O amortecimento será grafado  $c_y$  e representado por um amortecedor como mostrado na Figura 3.15a.

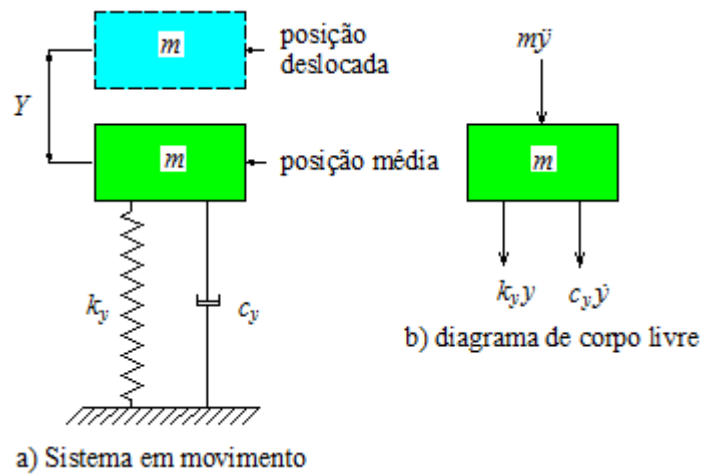


Figura 3.15: Sistema amortecido com um grau de liberdade sob movimento.

As forças internas que atuam sobre a massa, num sistema em movimento podem ser observadas no diagrama de corpo livre da Figura 3.15b, sendo:

- a força de inércia proporcional à aceleração;
- a força de amortecimento proporcional à velocidade;
- a força da mola proporcional ao deslocamento.

A equação do movimento considerando-se as forças de equilíbrio atuando na massa escreve-se:

$$m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = 0 \quad (3.45)$$

Pondo-se:

$$y = e^{st} \quad (3.46)$$

$$\dot{y} = se^{st} \quad (3.47)$$

$$\ddot{y} = s^2 e^{st} \quad (3.48)$$

Substituindo-se na equação 3.45 tem-se:

$$(ms^2 + c_y s + k_y) e^{st} = 0 \quad (3.49)$$

$$s_{1,2} = -\frac{c_y}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c_y}{2m}\right)^2 - \frac{k_y}{m}} \quad (3.50)$$

Sendo

$$p_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$$

seguem-se

$$s_{1,2} = -\frac{c_y}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c_y}{2m}\right)^2 - p_y^2} \quad (3.51)$$

$$y = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (3.52)$$

Se o termo no interior do radical for nulo tem-se um sistema criticamente amortecido.

Assim:

$$c_{ycr} = 2mp_y \quad (3.53)$$

$$s_{1,2} = -\frac{c_y}{2m} = -\frac{c_{ycr}}{2m} = p_y \quad (3.54)$$

$$y = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{c_y t}{2m}} \quad (3.55)$$

ou

$$y = (A_1 + A_2 t) e^{-p_y t} \quad (3.56)$$

$$\dot{y} = e^{-p_y t} \{A_1(-p_y) + A_2(1 - p_y t)\} \quad (3.57)$$

Para o deslocamento inicial  $y(t) = y(0)$  e a velocidade inicial  $\dot{y}(t) = \dot{y}(0)$  para  $t = 0$ , tem-se o seguinte.

Substituindo-se estas condições nas expressões 3.54 e 3.55 tem-se  $A_1 = y(0)$  e  $A_2 = \dot{y}(0) + p_y y(0)$ .

A expressão 3.56 fica:

$$y = \{y(0) + (\dot{y}(0) + p_y y(0))t\} e^{-p_y t} \quad (3.58)$$

A expressão 3.59 representa a solução para um sistema criticamente amortecido; para a velocidade inicial igual a zero  $\dot{y}(0) = 0$  tem-se:

$$y = \{y(0) + (1 + p_y t)\} e^{-p_y t} \quad (3.59)$$

$$\frac{y}{y(0)} = (1 + p_y t) e^{-p_y t} \quad (3.60)$$

A Figura 3.16 ilustra o comportamento dessa expressão.

Definindo-se taxa de amortecimento como a razão entre o coeficiente de amortecimento  $c_y$  e o coeficiente de amortecimento crítico  $c_{ycr}$  seguem-se:

$$\zeta_y = \frac{c_y}{c_{ycr}} \quad (3.61)$$

$$c_y = 2mp_y\zeta_y \quad (3.62)$$

$$\frac{c_y}{2m} = p_y\zeta_y \quad (3.63)$$

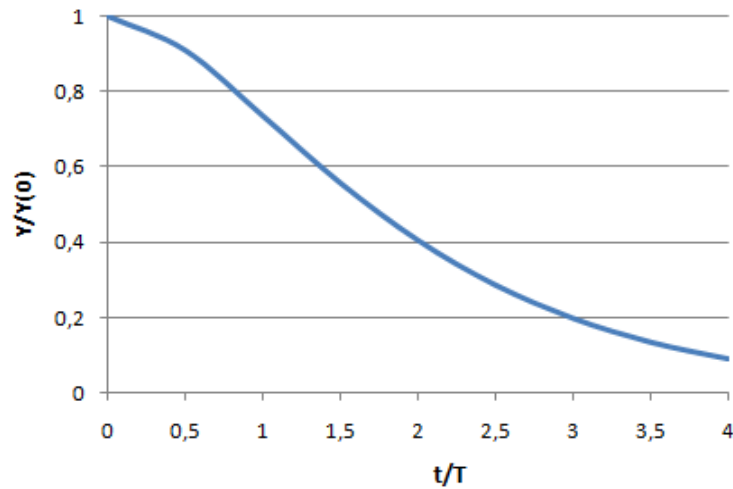


Figura 3.16: Sistema criticamente amortecido com velocidade inicial nula.

Para um sistema superamortecido tem-se:

$$\frac{y(t)}{y(0)} = \frac{\{-\zeta_y + \sqrt{(\zeta_y^2 - 1)}\}}{2\sqrt{(\zeta_y^2 - 1)}} e^{\{-\zeta_y - \sqrt{(\zeta_y^2 - 1)}\}p_y t} + \frac{\{\zeta_y + \sqrt{(\zeta_y^2 - 1)}\}}{2\sqrt{(\zeta_y^2 - 1)}} e^{\{-\zeta_y + \sqrt{(\zeta_y^2 - 1)}\}p_y t} \quad (3.64)$$

Para o sistema subamortecido, sendo  $p_{dy}$  a frequência natural do sistema, tem-se:

$$p_{dy} = p_y \sqrt{(1 - \zeta_y^2)} \quad (3.65)$$

O gráfico mostrado na Figura 3.17 ilustra a expressão 3.65.

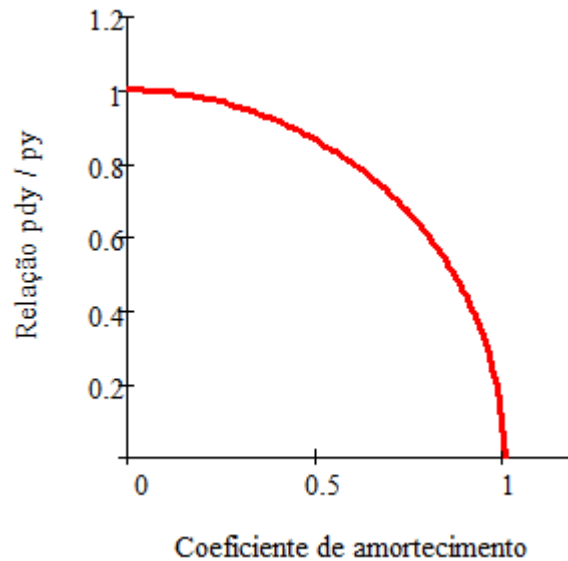


Figura 3.17: Frequência de amortecimento *versus* coeficiente de amortecimento.

A equação geral para os vários coeficientes de amortecimento é dada por:

$$\frac{y(t)}{y(0)} = e^{-p_y \zeta_y t} \left\{ \cos p_{dy} t + \frac{p_y \zeta_y}{p_{dy}} \sin p_{dy} t \right\} \quad (3.66)$$

### 3.3 VIBRAÇÃO FORÇADA

É aquela na qual o sistema vibra sob a influência de uma força dinâmica aplicada ao mesmo.

#### 3.3.1 Vibração forçada com amortecimento

Todo sistema estrutural quando retirado de sua posição de equilíbrio pela ação de uma força dinâmica aplicada vibrará durante um determinado período de tempo. Se o sistema em vibração perde energia por atrito ou dissipa por qualquer outro meio a vibração denomina-se com amortecimento.

A equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade amortecido sujeito a uma a uma força de excitação  $F_y \text{ sen } \omega t$  escreve-se:

$$m\ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y = F_y \text{ sen } \omega t \quad (3.67)$$

Sendo  $\omega$  a frequência circular de excitação, seguem-se

$$\frac{c_y}{m} = 2p_y \zeta_y \quad (3.68)$$

$$\frac{k_y}{m} = p_y^2 \zeta_y \quad (3.69)$$

$$\frac{\omega}{p_y} = \beta_y \quad (3.70)$$

$$\delta_{st} = \frac{F_y}{k_y} \quad (3.71)$$

A expressão 3.67 é reescrita como:

$$\ddot{y} + 2p_y \zeta_y \dot{y} + p_y^2 y = \frac{F_y}{m} \text{sen} \omega t = \frac{F_y}{k} m p_y^2 \text{sen} \omega t = \delta_y p_y^2 \quad (3.72)$$

cuja solução é

$$y(t) = \underbrace{e^{-p_y \zeta_y t} (A \cos p_{dy} t + B \text{sen} p_{dy} t)}_{\text{Solução Complementar Resposta Transitória}} + \delta_y \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_y^2)^2 + (2\beta_y \zeta_y)^2}} \text{sen}(\omega t)}_{\text{Solução Particular Resposta de estado estacionário}} \quad (3.73)$$

sendo

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{2\beta_y \zeta_y}{(1 - \beta_y^2)} \right) \quad (3.74)$$

$$\frac{y_p(t)}{\delta_y} = \mu_y \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (3.75)$$

$$\mu_y = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_y^2)^2 + (2\zeta_y \beta_y)^2}} \quad (3.76)$$

O valor do fator de amplificação dinâmica  $\mu$  em função da taxa de frequência  $\beta$  é dado na Figura 3.18.

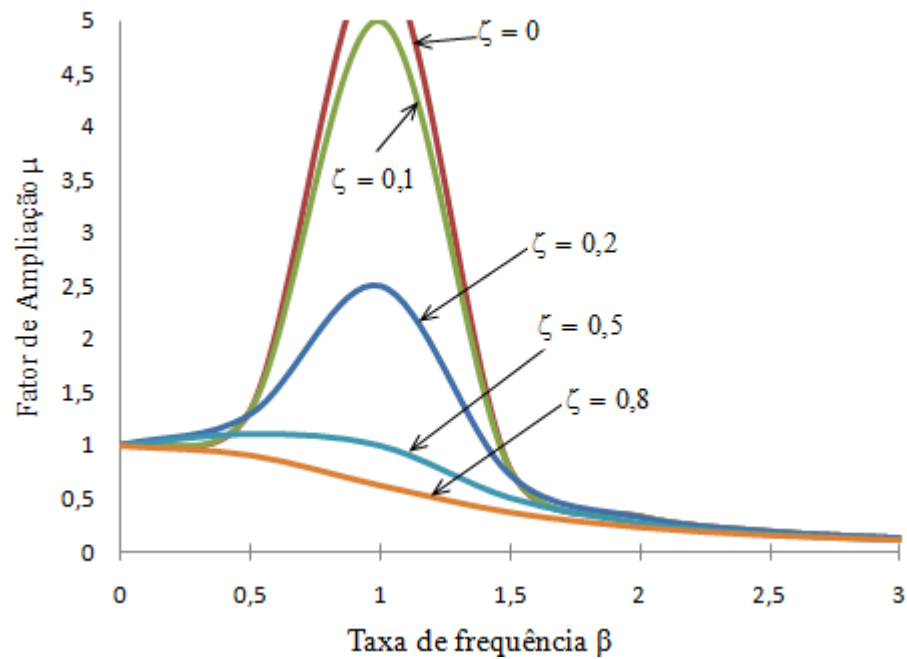


Figura 3.18: Fator de ampliação  $\mu$  versus taxa de frequência  $\beta$ , adaptado de PRAKASH (1981).

### 3.3.2 Vibração forçada sem amortecimento

Neste caso o sistema é livre e não possui amortecimento como ilustrado na Figura 3.19 a e diagrama de corpo livre da Figura 3.19 b.

#### 3.3.2.1 Sistema tendo rigidez de translação e força dinâmica externamente aplicada

A equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento sujeito a uma a uma força de excitação  $F_y \text{sen} \omega t$  é dada por:

$$m\ddot{y} + k_y y = F_y \text{sen} \omega t \quad (3.77)$$

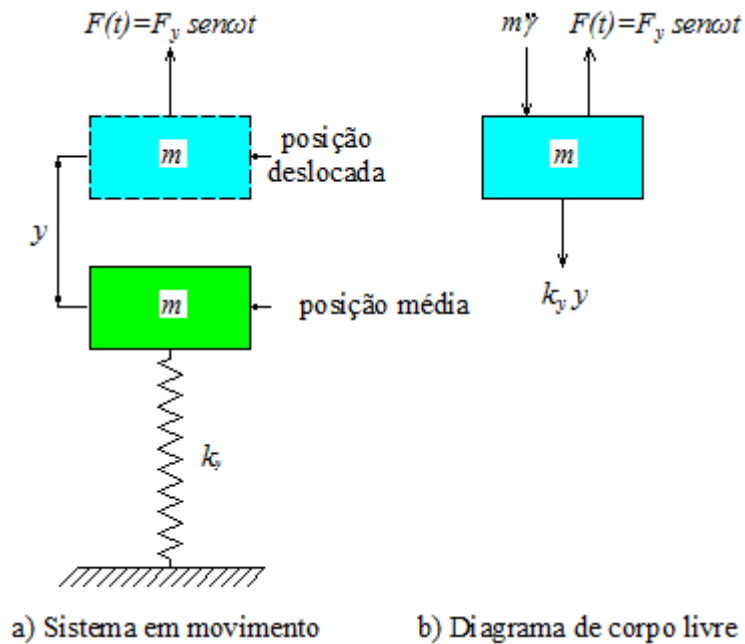


Figura 3.19: Vibração forçada: sistema 1GDL sem amortecimento.

A solução para esse tipo de sistema é dado pela expressão 3.78, que corresponde à frequência natural, e a expressão 3.79 que corresponde ao deslocamento:

$$p_y = 2\pi f_n = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad \text{rad / s} \quad (3.78)$$

$$y(t) = \underbrace{y(0) \cos p_y t + \left[ \frac{\dot{y}(0)}{p_y} - \delta_y \frac{\beta_y}{(1 - \beta_y^2)} \right] \text{sen } p_y t}_{\substack{\text{solução complementar} \\ \text{Vibração transitória}}} + \underbrace{\delta_y \frac{1}{(1 - \beta_y^2)} \text{sen } \omega t}_{\substack{\text{solução particular} \\ \text{Vibração estado estacionário}}} \quad (3.79)$$

### 3.3.2.2 Sistema tendo rigidez rotacional e momento dinâmico externamente aplicado

Seja o sistema de um grau de liberdade com rotação ao redor do eixo  $Z$  como mostrado na Figura 3.20.

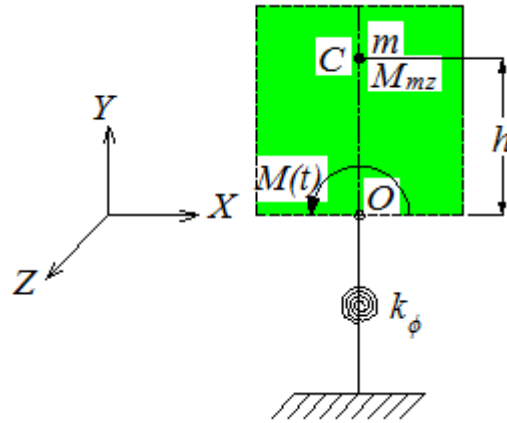


Figura 3.20: Sistema 1GDL sem amortecimento – mola no centro da base do bloco.

A equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento sujeito a um momento  $M(t) = M_\phi \sin \omega t$  escreve-se:

$$M_{moz} \ddot{\phi} + (k_\phi - mgh)\phi = M_\phi \sin \omega t \quad (3.80)$$

sendo:

$$M_{moz} = M_{mz} + mh^2 \quad (3.81)$$

$$p_\phi = \sqrt{\frac{k_\phi - mgh}{M_{moz}}} \quad (3.82)$$

$$\beta_\phi = \frac{\omega}{p_\phi} \quad (3.83)$$

O valor de  $mgh$  é desprezado face ao valor de  $k_\phi$ , então:

$$\phi(t) = \underbrace{A \cos p_\phi t + B \sin p_\phi t}_{\text{Solução complementar}} + \underbrace{\frac{M_\phi}{k_\phi} \frac{1}{(1 - \beta_\phi^2)} \sin \omega t}_{\text{Solução particular}} \quad (3.84)$$

A resposta para o estado estacionário é dada por:

$$\phi(t) = \frac{M_\phi}{k_\phi} \frac{1}{(1 - \beta_\phi^2)} \sin \omega t \quad (3.85)$$

### 3.4 RESSONÂNCIA

Todo sistema físico tem uma ou mais frequências naturais, ou seja, suas frequências quando sujeitas a vibrações livres. Se a frequência do equipamento (agente excitador) se aproxima da frequência natural da fundação as amplitudes de vibração do sistema tendem a serem maiores. Ocorre ressonância quando a frequência do agente excitador é igual à



frequência natural do sistema. Deve-se evitar a ressonância para que as amplitudes de vibração não se tornem muito intensas e causem danos às pessoas, máquinas e instalações.

### 3.5 SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Mostra-se na Figura 3.21, somente a título de ilustração, um sistema com dois graus de liberdade formado pelas massas rígidas  $m_1$  e  $m_2$  tendo constantes de mola  $k_1$  e  $k_2$ . O detalhamento das equações e expressões de movimento é mostrado no próximo item ao se tratar de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

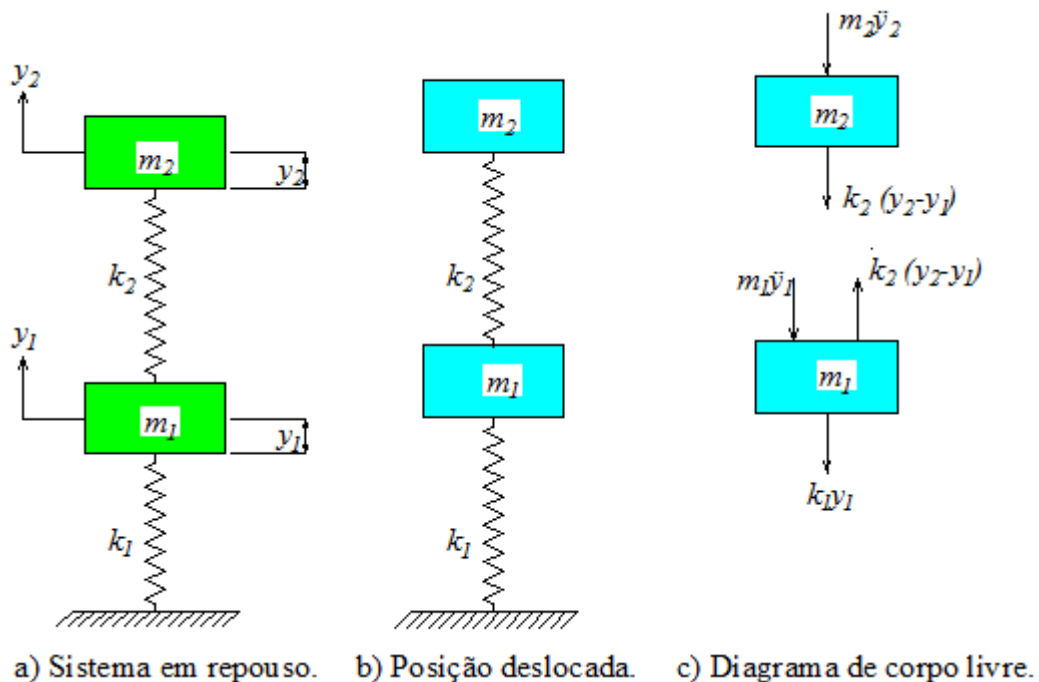


Figura 3.21: Sistema massa mola não amortecido com duas molas.

### 3.6 SISTEMA COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Seja o sistema com  $n$  graus de liberdade formado pelas massas rígidas  $m_1, m_2 \dots m_n$  com as respectivas constantes de mola  $k_1, k_2 \dots k_n$ . A Figura 3.22 ilustra um sistema massa-mola não amortecido com 3 molas. Se o sistema for amortecido terá constantes de amortecimento  $c_1, c_2 \dots c_n$  e poderá ser livre ou forçado.

#### 3.6.1 Vibrações livres

Seja o sistema ilustrado na Figura 3.22, de  $n$  graus de liberdade, sob vibração livre e sem força excitante em qualquer das massas.

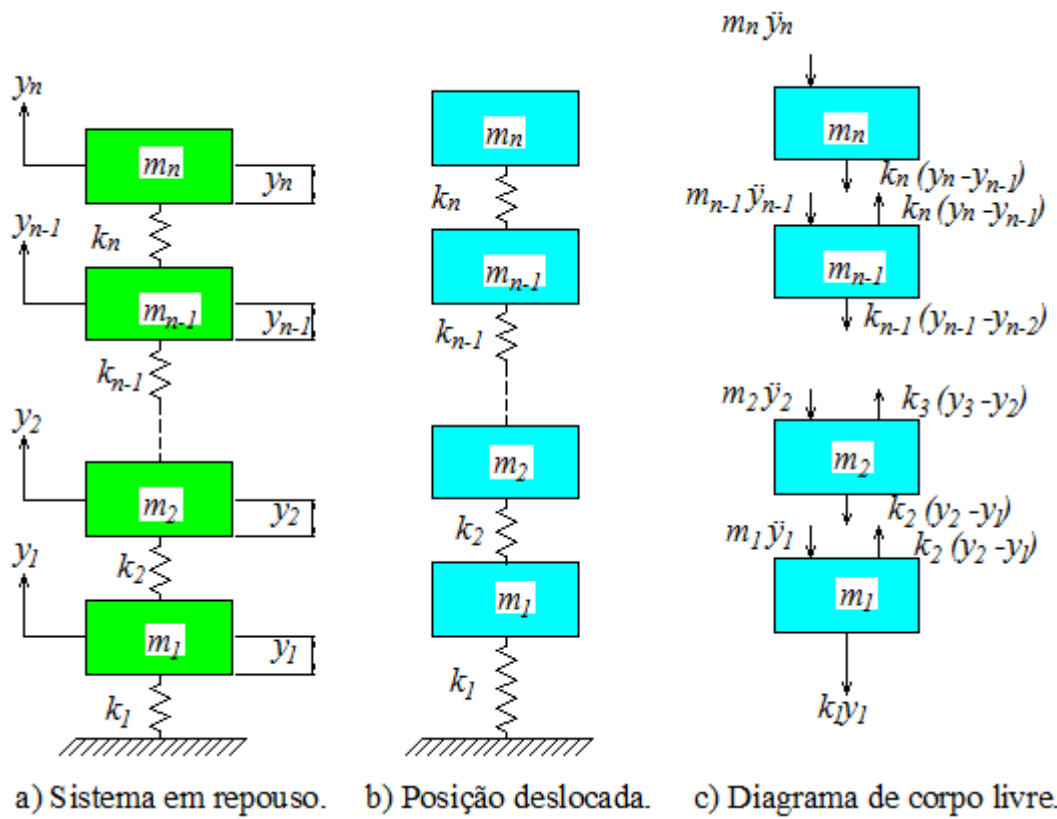


Figura 3.22: Sistema massa mola não amortecido com n molas.

De acordo com SRINIVASULU e VAIDYANATHAN (1980) considerando-se o sistema não amortecido (Figura 3.22) as equações de movimento são:

$$\left. \begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
 \dots & \\
 m_n \ddot{y}_n + k_n (y_n - y_{n-1}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

que podem ser escritas sob a forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = 0 \quad (3.87)$$

ou

$$\begin{bmatrix}
 m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & m_2 & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & m_3 & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & m_n
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \ddot{y}_1 \\
 \ddot{y}_2 \\
 \ddot{y}_3 \\
 \dots \\
 \ddot{y}_n
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 (k_1 + k_2) & -k_2 & \dots & \dots & 0 \\
 -k_2 & (k_1 + k_2) & -k_3 & \dots & 0 \\
 0 & -k_3 & k_3 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & k_n
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 \dots \\
 y_n
 \end{Bmatrix}
 = 0 \quad (3.88)$$

Substituindo-se  $y_1 = a_1 \sin \omega t$ ,  $y_2 = a_2 \sin \omega t$  na equação 3.87 e simplificando tem-se:

$$\{[K] - [M]\omega^2\} \{A\} = 0 \quad (3.89)$$

onde

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

A equação 3.89 pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \omega^2 & k_{12} & \dots & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega^2 & -k_3 & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & k_{nn} - m_n \omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.91)$$

A solução da equação 3.91 dá  $n$  raízes,  $\omega^2$  sendo a frequência natural fundamental  $\omega_1^2$  e as demais raízes frequências de ordens superiores dos múltiplos graus de liberdade. Esses valores poderão ser obtidos usando-se um vetor coluna  $\{V_r\}$  com componentes relativos  $a_1^r, a_2^r, \dots, a_n^r$ , correspondente ao valor  $\omega_r$ . Assim:

$$\{V_r\}^T [K] \{V_s\} = 0 \quad (3.92)$$

$$\{V_r\}^T [M] \{V_s\} = 0 \quad (3.93)$$

onde

$r$  e  $s$  – são dois modos distintos.

Para obter-se o deslocamento  $\{Y_t\}$  em um instante  $t$ , considerando-se  $\{Y_0\}$  e  $\{\dot{Y}_0\}$  os vetores de deslocamento inicial e velocidade para  $t = 0$ , a seguinte expressão para  $\{Z_t\}$  pode ser derivada.

$$\{Y_t\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{V_r\}\{V_r\}^T [M]}{\{V_r\}^T [M] \{V_r\}} \left[ \{Y_0\} \cos \omega_r + \frac{1}{\omega_r} \{\dot{Y}_0\} \sin \omega_r t \right] \quad (3.94)$$

Essa expressão fornece os deslocamentos  $y_1, y_2, \dots, y_n$  a um tempo qualquer  $t$ .

### 3.6.2 Vibrações forçadas

Considere-se a Figura 3.22 com forças de excitação  $P_1 \sin \omega_m t, P_2 \sin \omega_m t, \dots, P_n \sin \omega_m t$  atuando nas massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . O vetor  $\{F\}$  representa as amplitudes das forças excitantes sendo:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

A expressão de movimento do sistema em forma de matriz é:

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{F\} \quad (3.96)$$

A solução para o estado estacionário da expressão 3.96 é:

$$\{Y\} = \{a\} \sin \omega t \quad (3.97)$$

Sendo o vetor coluna não conhecido das amplitudes. Substituindo-se a expressão 3.97 na expressão 3.96 obtém-se as expressões:

$$\{[K] - \omega^2 [M]\}\{a\} = \{F\} \quad (3.98)$$

$$\{a\} = \{[K] - \omega^2 [M]\}^{-1} \{F\} \quad (3.99)$$

A solução alternativa é:

$$\{a\} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega_m^2)} \left[ \frac{\{V_r\}\{V_r\}^T}{\{V_r\}^T [M] \{V_r\}} \right] \{F\} \quad (3.100)$$

## **4 FUNDAÇÕES DE EQUIPAMENTOS INDUSTRIAIS**

### **4.1 NOTAS INICIAIS**

Vários fatores devem ser levados em consideração no projeto de fundações para equipamentos industriais, entre eles o tipo de máquina, o local onde será instalado, o tipo de fundação, os equipamentos auxiliares que serão instalados, as cargas a que estarão submetidas, antes, durante e após montagem, o acesso ao equipamento para operação e manutenção, etc.

Neste capítulo serão abordados os aspectos básicos das fundações de máquinas e parâmetros importantes para o projeto da fundação.

### **4.2 TIPOS DE MÁQUINAS**

De acordo com o ACI 351 (2004) as máquinas classificam-se em:

- a) máquinas rotativas, que incluem turbinas a gás, a vapor, etc., turbo compressores e turbo bombas, ventiladores, motores e centrífugas;
- b) máquinas alternativas, que incluem motores e compressores a diesel, nas quais tem-se um pistão movendo-se num cilindro que interage com um fluido por meio do movimento de um eixo manivela;
- c) máquinas de impacto. Nessa categoria estão inclusos os martelos de forjamento e algumas prensas de conformação metálica, que operam por meio de impacto ou choque entre as diferentes partes do equipamento;
- d) outros tipos de máquinas, tais como britadores e máquinas trituradoras de sucata de metal.

As máquinas são classificadas quanto à velocidade de operação em:

- a) máquinas de velocidade muito baixa, até 100 *rpm* ;

- b) máquinas de velocidade baixa,  $\geq 100$  e  $\leq 1500rpm$  ;
- c) máquinas de velocidade média;  $>1500$  e  $\leq 3000 rpm$  ;
- d) máquinas de alta velocidade,  $> 3000 rpm$  .

#### 4.3 TIPOS DE FUNDAÇÃO

O ACI 351.3R-04 (2004) classifica os tipos de fundações de máquinas em:

- a) tipo bloco (Figura 4.1a);
- b) blocos combinados (Figura 4.1b);
- c) em mesa (Figura 4.2a);
- d) em mesa com isoladores (Figura 4.2b);
- e) estrutura com molas montada sobre bloco (Figura 4.3);
- f) bloco de inércia sobre estrutura (Figura 4.4);
- g) fundações sobre estacas, ou seja, qualquer um dos tipos de fundações anteriores montado sobre estacas (Figura 4.5).

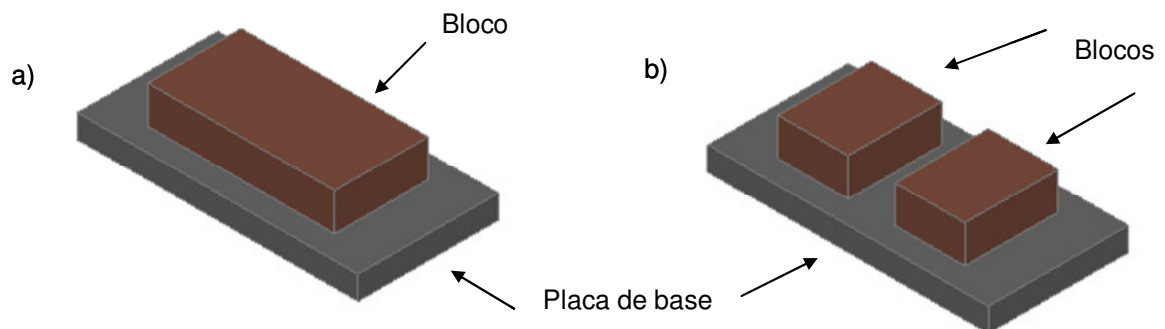


Figura 4.1: a) Fundação em bloco; b) fundação em blocos combinados

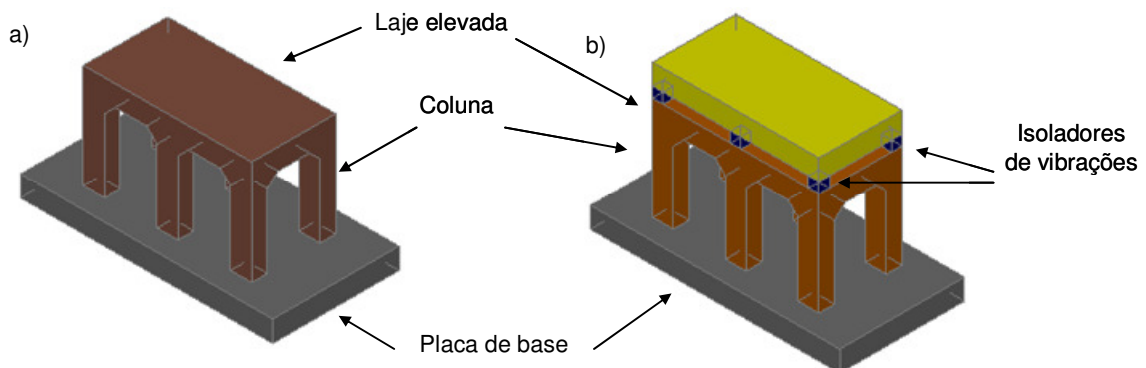


Figura 4.2: a) Fundação em mesa; b) fundação em mesa com isoladores.

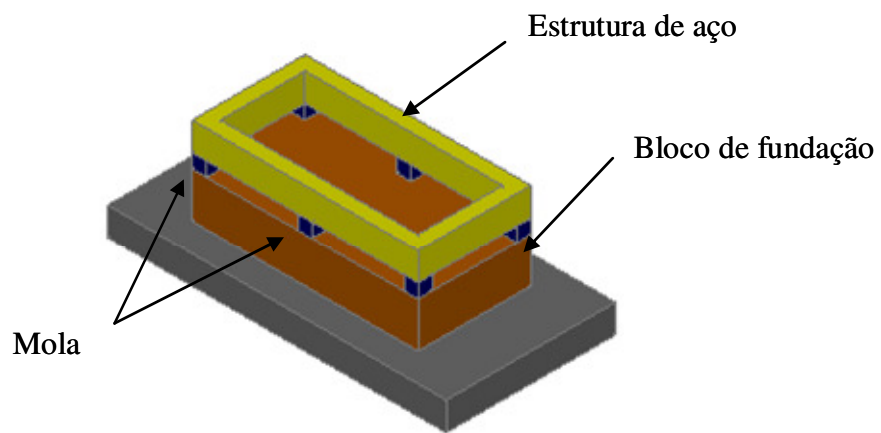


Figura 4.3: Estrutura com molas montada sobre bloco.

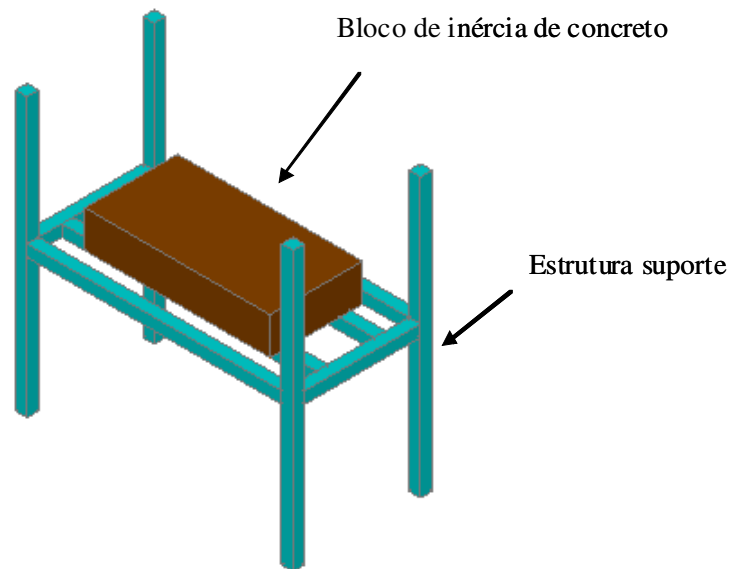


Figura 4.4: Bloco de inércia sobre estrutura.

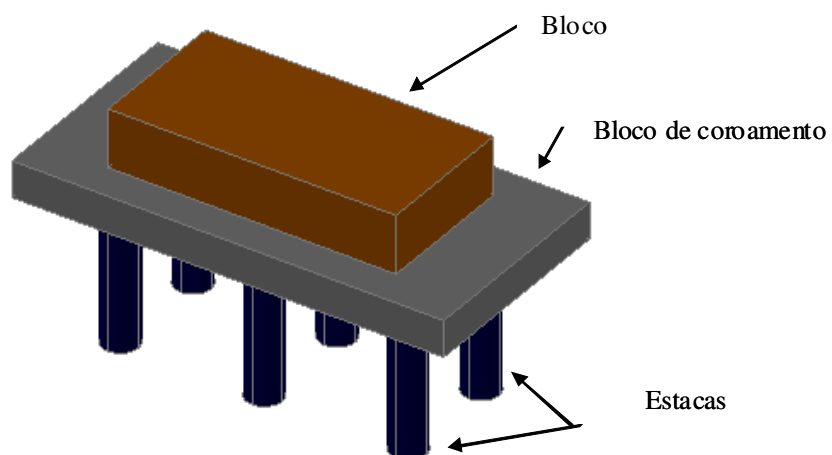


Figura 4.5: Fundação sobre estacas.

#### 4.4 PARÂMETROS DE PROJETO

Os vários parâmetros que influenciam o projeto de uma fundação de máquina são:

- a) centro de gravidade da máquina e da fundação;
- b) momento de inércia da máquina e da fundação;
- c) cargas da máquina, isto é, peso da máquina em posição sem movimento, peças rotativas e mecanismos de transferência de carga da máquina para a fundação;
- d) velocidade crítica do rotor, grau de equilíbrio e amplitude de vibração aceitável;
- e) forças dinâmicas geradas pela máquina sob as condições de operação e seus mecanismos de transferência para a fundação;
- f) forças adicionais geradas sob emergência ou em situações de falha, testes, construção, manutenção, falhas de mancais, etc...;
- g) coeficientes de mola efetivos da base da fundação;
- h) coeficientes elásticos do solo.

#### 4.5 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

##### 4.5.1 Centro de gravidade

A máquina e o corpo da fundação podem ser divididos em um número de segmentos de massa  $m_i$  referenciados aos eixos arbitrados  $(x_i, y_i, z_i)$  com as coordenadas  $(x, y, z)$  do centro de gravidade comum da máquina e da fundação. Então:

$$x = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad (4.1)$$

$$y = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad (4.2)$$

$$z = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \quad (4.3)$$



#### 4.5.2 Momento de inércia na área da base

Se a base da fundação é retangular com dimensões  $L$  e  $B$ , com momentos de inércia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  segue-se:

$$I_x = \frac{LB^3}{12} \quad (4.4)$$

$$I_y = \frac{BL^3}{12} \quad (4.5)$$

$$I_z = I_x + I_y \quad (4.6)$$

Se a fundação é suportada por  $N$  números de pontos isolados, os momentos de inércia do grupo  $I$  é dado por:

$$I'_x = \sum_i y_i^2 \quad (4.7)$$

$$I'_y = \sum_i x_i^2 \quad (4.8)$$

$$I'_z = I'_x + I'_y = \sum_i (y_i^2 + x_i^2) \quad (4.9)$$

#### 4.5.3 Momento de inércia da massa

O momento de inércia da massa relativo a um eixo paralelo situado a uma distância  $S$  do centro de gravidade é dado por:

$$F_0 = F + mS^2 \quad (4.10)$$

### 4.6 CARGAS DAS FUNDAÇÕES E EQUIPAMENTOS

Os parâmetros mencionados no item 4.4 em d), e), e f), entre outros, definem as cargas do sistema fundação/equipamento. As cargas estáticas são devidas ao peso da máquina e dos equipamentos auxiliares, e as cargas dinâmicas ocorrem quando a máquina está em operação gerando forças de desequilíbrio da máquina, e devidas ao fluxo de fluidos e gases em algumas máquinas.

O objetivo básico no projeto da fundação de uma máquina é limitar seus movimentos a amplitudes que não comprometam a operação satisfatória da máquina e que não afetem as pessoas que trabalham na sua vizinhança.

## 4.6.1 Cargas estáticas

### 4.6.1.1 Peso próprio

Essa carga é constituída pelo peso da máquina, dos equipamentos auxiliares, dos tubos, das válvulas e o peso da fundação. Os pesos da máquina e dos equipamentos auxiliares devem ser fornecidos pelo fabricante da máquina, que comumente fornece também a distribuição das cargas sobre os pontos de apoio na fundação.

### 4.6.1.2 Sobrecargas

São as cargas devido ao trânsito de pessoas, peso de ferramentas, equipamentos e materiais de manutenção. Os valores típicos recomendados pelo ACI 351.3R (2004) são de  $2,9 \text{ kPa}$  para trânsito de pessoas e de  $7,9 \text{ kPa}$  para materiais e equipamentos de manutenção. Recomenda-se que os valores de projeto sejam os máximos valores esperados durante a vida do equipamento.

### 4.6.1.3 Cargas de vento

As cargas de vento serão consideradas sempre que a máquina estiver exposta à ação o mesmo, ou encontrar-se em edificação cuja fundação suporta a edificação e a máquina. Essas cargas que incidem nas superfícies das máquinas, equipamentos auxiliares e fundações de suporte das mesmas, devem ser analisadas de acordo com a região em que a máquina está instalada, segundo a NBR-6123.

### 4.6.1.4 Cargas sísmicas

As fundações de máquinas localizadas em áreas sujeitas a sismos devem considerar as cargas inerentes a esse efeitos (NBR-15421).

### 4.6.1.5 Cargas estáticas de operação

As cargas estáticas de operação incluem o peso dos fluidos de operação, dos materiais em processamento, das variações térmicas na máquina e peso de equipamentos auxiliares ligados à mesma, como tubulações. Incluem forças e torques desenvolvidos em algumas máquinas entre o mecanismo acionador, um motor, por exemplo, e a máquina.

Quando o mecanismo de acionamento da máquina é separado da máquina como um motor elétrico, um motor alternativo ou uma turbina à gás ou vapor, surge um torque na

máquina acionada. Este torque atua entre as máquinas acionada e acionadora com a mesma magnitude, porém em direções opostas. É considerada atuando na fundação em direção vertical passando pela linha de centro da máquina. O valor do torque pode ser obtido conforme prática recomendada do ACI 351.3R-04 (2004):

$$NT = \frac{9650 P_s}{f_o} \quad (4.11)$$

onde

$NT$  – torque normal ( $N \cdot m$ );

$P_s$  – força transmitida pelo eixo à conexão ( $kW$ );

$f_o$  – velocidade de operação ( $rpm$ ).

A carga do torque é esquematizada nas Figuras 4.6 e 4.7.

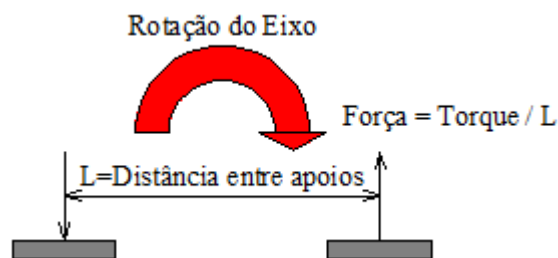


Figura 4.6: Torque resistido por placas de base longitudinais.

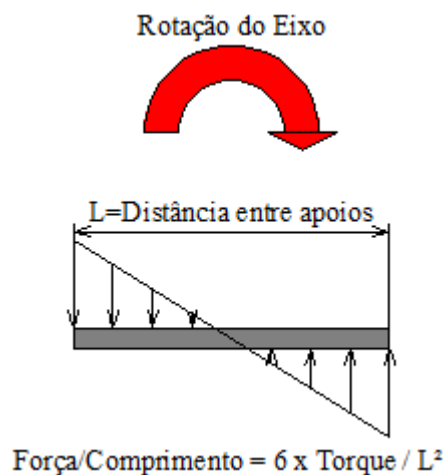


Figura 4.7: Torque resistido por placas de base transversais.

#### 4.6.1.6 Cargas especiais para fundações elevadas

Para garantir resistência adequada e controle das flechas, o ACI 351.3R (2004) cita que em algumas especificações de empresas recomendam-se as seguintes condições de carregamento estático, especiais para grandes equipamentos sobre fundações elevadas:

- a) força vertical igual a 50% do peso de cada máquina;
- b) força horizontal na direção transversal igual a 25% do peso total de cada máquina;
- c) força horizontal na direção longitudinal igual a 25% do peso total de cada máquina.

Essas forças são adicionais às cargas gravitacionais normais e são consideradas atuando na linha de centro do eixo da máquina.

#### 4.6.1.7 Cargas de manutenção e construção

As cargas de manutenção e construção são cargas temporárias e devem ser consideradas no projeto das fundações. Dentre essas cargas podem-se citar empilhadeiras, guindastes, talhas, etc. As cargas de construção ocorrem durante as obras de instalação e montagem.

As cargas de manutenção podem ocorrer durante a vida útil da planta quando da realização da manutenção do equipamento, drenagens, limpezas, alinhamento, equilíbrio, substituição de componentes, etc.. São em geral fornecidas pelo fabricante do equipamento.

#### 4.6.1.8 Cargas térmicas

São as cargas relativas às mudanças de temperatura que podem causar expansões, contrações e distorções, em função das solicitações da máquina e de seus componentes. As forças térmicas impõem solicitações a serem resistidas pela fundação e são importantes para o projeto dos chumbadores e argamassas usadas nas fixações desses elementos.

### 4.6.2 Cargas de máquinas rotativas

#### 4.6.2.1 Cargas dinâmicas devido a massas desequilibradas

As cargas devidas ao desequilíbrio das massas produzem forças centrífugas. O fabricante da máquina deve fornecer as seguintes informações:

- níveis de desbalanceamento para projeto;
- forças dinâmicas transmitidas aos pedestais dos mancais.

As forças dinâmicas devem conter informações sobre:

- a) os níveis de desequilíbrio de projeto para todas as faixas de velocidade de operação;
- b) a vibração mais elevada ao definir velocidades críticas;
- c) a vibração em que ocorrerá o desligamento da máquina;

d) o nível máximo de vibração que a máquina suporta sem danos. Se a máquina pode tolerar até esse último nível de força dinâmica, mesmo que por pouco tempo, então a fundação deverá ser também capaz de suportar essa vibração por um curto período de tempo.

Havendo o desequilíbrio da massa a força dinâmica é dada por:

$$F_o = \frac{m_r e_m \omega_o^2 S_f}{1000} \quad (4.12)$$

onde

$m_r$  – massa rotativa ( $kg$ );

$e_m$  – excentricidade da massa ( $mm$ );

$\omega_o$  – frequência circular de operação ( $rad / s$ );

$S_f$  – fator de serviço usado em função do aumento do desbalanceamento durante a

vida útil com  $S_f \geq 2$ .

O desequilíbrio da máquina pode também ser definido por critérios de qualidade de desequilíbrio em função da velocidade de operação da máquina. Nesse caso a expressão 4.12 pode ser reescrita como

$$F_o = \frac{m_r Q \omega_o S_f}{1000} \quad N \quad (4.13)$$

sendo que

$$Q = e_m \omega_o$$

é a qualidade de balanceamento em  $mm / s$ .

A Tabela 4.1 extraída da ISO 1940 e ANSI S2.19 é um guia de graus de qualidade de equilíbrio para grupos representativos de rotores rígidos.

Tabela 4.1: Graus de qualidade de equilíbrio de grupos representativos de rotores.

Grau de Qualidade do equilíbrio	Parâmetro $e\omega_o$ <i>mm/s</i>	Tipos de rotor – Exemplos gerais
G 4 000	4 000	Virabrequins de motores diesel marinhos lentos, rigidamente montados, com número ímpar de cilindros
G 1 600	1 600	Virabrequins de motores grandes, rigidamente montados, de dois cilindros
G 630	630	Virabrequins de motores grandes rigidamente montados, de quatro cilindros Virabrequins de motores diesel marinhos, montagem elástica
G 250	250	Virabrequins de motores diesel marinhos rápidos de quatro cilindros
G 100	100	Virabrequins de motores diesel rápidos com seis ou mais cilindros Motores completos (gasolina ou diesel) para carros, caminhões e locomotivas
G 40	40	Rodas de carro, bordas de roda, conjuntos de rodas, jantes, eixos de transmissão Virabrequins de motores de quatro ciclos com seis ou mais cilindros, montagem elástica Virabrequins de motores para carros, caminhões e locomotivas
G 16	16	Eixos acionadores (eixos de hélice, eixos “cardan”) com requisitos especiais Peças de britadores Peças de maquinaria agrícola Componentes individuais de motores (gasolina ou diesel) para carros, caminhões e locomotivas Virabrequim de motores com seis ou mais cilindros com requisitos especiais
G 6.3	6.3	Componentes de máquinas de plantas de processo Engrenagens de turbinas marinhas Centrífugas Rolos de máquinas para fabricação de papel, rolos de impressão Ventiladores industriais Rotores de turbinas a gás de aeronaves Volantes de motores Rotores de bombas Peças de máquinas ferramentas e maquinaria em geral Armaduras de motores elétricos tendo no mínimo 80 mm de altura do eixo, sem requisitos especiais Pequenos induzidos elétricos, muitas vezes produzidos em massa, em aplicações tolerantes à vibrações e / ou com montagens de isolamento de vibração Componentes individuais de motores com requisitos especiais

G 2.5	2.5	Turbinas a gás e vapor, incluindo turbinas marinhas Rotores de turbo geradores rígidos Discos de memória de computadores Turbocompressores Acionadores de máquinas ferramentas Armaduras elétricas médias e grandes com requisitos especiais Armaduras elétricas pequenas que não qualifiquem para uma ou ambas das condições especificadas para armaduras elétricas pequenas de qualidade de balanceamento G 6.3 Turbina de bombas
G 1	1	Motores de gravadores Acionadores de retificadoras Armaduras elétricas pequenas com requisitos especiais
G 0.4	0.4	Eixos, discos e armaduras de moinhos de precisão giroscópios

#### 4.6.2.2 Carga dinâmica determinada por fórmula empírica

Os fabricantes em geral não relatam o desequilíbrio que permanece após a aferição do equipamento. Em função disso fórmulas empíricas são usadas para assegurar que as fundações são projetadas para um determinado desequilíbrio mínimo. Para o cálculo da força dinâmica nesse caso, expressa em  $N$ , conforme prática recomendada do ACI 351.3R-04 (2004), tem-se:

$$F_o = \frac{W_r f_o}{6000} \quad (4.14)$$

As forças centrífugas devido ao desequilíbrio são consideradas atuando no centro de gravidade da peça rotativa, e variam harmonicamente com a velocidade da máquina em duas direções ortogonais perpendiculares ao eixo da máquina e são transmitidas à fundação por meio dos mancais.

#### 4.6.2.3 Carga de desequilíbrio determinada por desligamento automático

Os rotores são ajustados para desligarem quando atingem alta vibração, ou seja, vibrações limites que podem causar dano ao equipamento, instalações ou pessoas, Então é esperado que esse fato possa ocorrer donde se tem a força dinâmica, conforme prática recomendada do ACI 351.3R-04 (2004):

$$F_o = V_{\max} K_{ef} \quad (4.15)$$

onde

$F_o$  – força dinâmica em  $N$  ;

$V_{max}$  – vibração máxima permitida em  $mm/s$  ;

$K_{ef}$  – rigidez efetiva dos mancais.

#### 4.6.2.4 Cargas de múltiplas máquinas rotativas

Se uma fundação suporta várias máquinas rotativas deve-se considerar as forças de desequilíbrio com base nas massas, desequilíbrio e velocidade de operação de cada componente girante. Dai combinando-se essas forças obtém-se a resposta total do sistema.

### 4.6.3 Cargas de máquinas alternativas

As cargas de máquinas alternativas são caracterizadas pelo movimento de rotação de um virabrequim e o movimento alternativo linear de pistões conectados ou deslizantes. O movimento desses componentes causam forças que variam ciclicamente.

#### 4.6.3.1 Cargas alternativas primárias e secundárias

Pode-se entender as cargas alternativas observando-se o mecanismo de movimento de uma destas máquinas (Figura 4.8). O mecanismo consiste de um pistão que se move dentro de um cilindro guia, uma manivela de comprimento  $r$  que gira ao redor de um eixo e uma barra de conexão de comprimento  $L$ . A barra de conexão se liga ao pistão por meio do pino de articulação  $P$  e à manivela no ponto  $C$ . Considera-se que a manivela gira a uma velocidade angular constante  $\omega_0$ . A força que varia com a frequência de rotação  $\omega_0$  (expressão 4.28) é denominada força primária, e a força que varia com duas vezes a frequência de rotação é denominada força secundária (expressão 4.29).



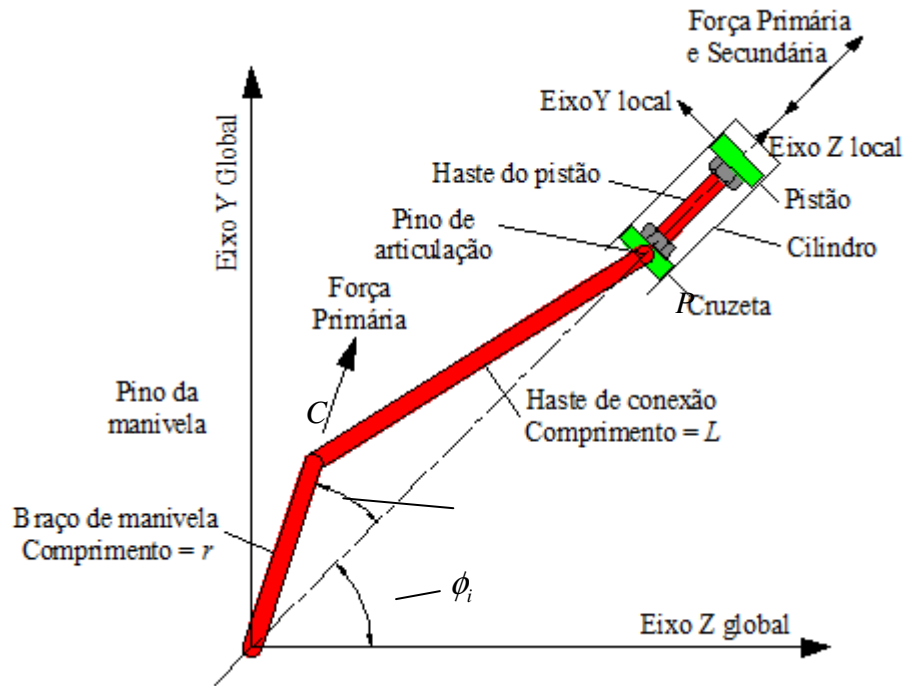


Figura 4.8: Mecanismo de manivela.

As expressões de deslocamento, velocidade e aceleração do movimento dos pistões são, respectivamente conforme RICHART (1970):

$$Z_p = \left( r + \frac{r^2}{4L} \right) - \left( \cos \omega_o t + \frac{r}{4L} \cos 2\omega_o t \right) \quad (4.16)$$

$$\dot{Z}_p = r\omega_o \left( \sin \omega_o t + \frac{r}{2L} \sin 2\omega_o t \right) \quad (4.17)$$

$$\ddot{Z}_p = r\omega_o^2 \left( \cos \omega_o t - \frac{r}{2L} \cos 2\omega_o t \right) \quad (4.18)$$

onde

$Z_p$  – deslocamento do pistão ( $mm$ );

$r$  – comprimento do braço do virabrequim ( $mm$ );

$L$  – comprimento da barra de conexão ( $mm$ );

$\omega_o$  – frequência circular de operação da máquina em ( $rad / s$ );

$t$  – tempo ( $s$ ).

As expressões para os eixos locais  $Z$ , paralelo ao movimento do pistão e  $Y$ , perpendicular ao movimento do pistão são:

$$y_p = -r \sin \omega_o t \quad (4.19)$$

$$\dot{y}_p = -r \cos \omega_o t \quad (4.20)$$

$$\ddot{y}_p = r \omega_o^2 \sin \omega_o t \quad (4.21)$$

$$z_p = r(1 - \cos \omega_o t) \quad (4.22)$$

$$\dot{z}_p = r \omega_o \sin \omega_o t \quad (4.23)$$

$$\ddot{z}_p = r \omega_o^2 \cos \omega_o t \quad (4.24)$$

onde

$y_p$  – deslocamento do pino da manivela no eixo local  $Y$  (  $mm$  );

$z_p$  – deslocamento do pino da manivela no eixo local  $Z$  (  $mm$  ).

As expressões para as forças de desequilíbrio são:

– paralelo ao movimento do pistão

$$F_z = (m_{alt} + m_{rot}) r \omega_o^2 \cos \omega_o t + m_{alt} \frac{r^2 \omega_o^2}{L} \cos 2\omega_o t \quad (4.25)$$

– perpendicular ao movimento do pistão

$$F_y = m_{rot} r \omega_o^2 \sin \omega_o t \quad (4.26)$$

Na expressão 4.25 tem-se:

– força primária

$$F_{pr} = (m_{alt} + m_{rot}) r \omega_o^2 \cos \omega_o t \quad (4.27)$$

– força secundária

$$F_{sec} = m_{alt} \frac{r^2 \omega_o^2}{L} \cos 2\omega_o t \quad (4.28)$$

onde

$m_{alt}$  – massa alternativa que inclui 1/3 da haste de conexão mais a massa do pistão concentrada no ponto  $P$  ;

$m_{rot}$  – massa rotativa do pino de conexão mais o braço da manivela concentrada no ponto  $C$  .

A expressão 4.27 fornece somente a componente força primária.

#### 4.6.3.2 Cargas de compressores de gás

Os compressores alternativos de gás aumentam a pressão do fluxo de gás pela transmissão de movimentos alternativos dos pistões dentro de um cilindro. Normalmente o gás é comprimido nas duas direções do movimento. A pressão do gás aumenta à medida que é comprimido a cada curso do pistão e o aumento da pressão interna dentro do cilindro gera reações no cabeçote e nas extremidades da manivela do pistão que alternam o fluxo de gás de cada extremidade do cilindro. Conforme ACI 351.3R-04 para a força máxima que atua na barra do pistão tem-se:

$$F_{haste} = [(P_{cab})(A_{cab}) - (P_{man})(A_{man})]F_1 \quad (4.29)$$

$$A_{cab} = \left(\frac{\pi}{4}\right)B_c^2 \quad (4.30)$$

$$A_{man} = \left(\frac{\pi}{4}\right)(B_c^2 - D_{haste}^2) \quad (4.31)$$

onde

$F_{haste}$  – força que atua na haste do pistão ( $N$ );

$A_{cab}$  – área da seção transversal do cabeçote do pistão ( $mm^2$ );

$A_{man}$  – área da seção transversal da manivela ( $mm^2$ );

$B_c$  – diâmetro interno do cilindro ( $mm$ );

$D_{haste}$  – diâmetro da haste do pistão ( $mm$ );

$P_{cab}$  – pressão instantânea que atua no cabeçote do pistão ( $MPa$ );

$P_{man}$  – pressão instantânea na manivela ( $MPa$ );

$F_1$  – fator de correção.

A pressão na cruzeta do pistão e na manivela varia continuamente, e a força diferencial tem valores ora positivo ora negativo durante cada ciclo do pistão. Normalmente esses valores são aproximados usando-se os valores de pressão de sucção e descarga máximo e mínimo. Para fins de projeto multiplica-se este valor por um fator  $F_1$  para levar em conta a tendência natural das forças do gás excederem os valores baseados diretamente nas pressões de sucção e descarga devido à resistência ao fluxo e pulsações, com  $1,1 \leq F_1 \leq 1,5$ . São valores razoáveis para trabalho o intervalo de 1,15 a 1,2.

Segundo SMALLEY (1988) *apud* ACI 351.3R-04 (2004) baseado em comparações limitadas usando análises de elementos finitos são sugeridas para cargas das forças de inércia transmitidas às fundações por um compressor típico as seguintes expressões:

$$F_{bloco} = \frac{F_{haste}}{F_{red}} \quad (4.32)$$

$$(F_{par})_{GC} = \frac{\left[ \frac{F_{haste}}{(N_{par})_{GC}} \right]}{F_{red}} \quad (4.33)$$

$$(F_{par})_{EST} = \frac{\left[ \frac{F_{desb}}{(N_{par})_{EST}} \right]}{F_{red}} \quad (4.34)$$

onde

$F_{bloco}$  – força de tração que atua no bloco de concreto ( $N$ );

$F_{desb}$  – valor máximo obtido da expressão 4.26 usando parâmetros para um cilindro de compressor horizontal ( $N$ );

$F_{haste}$  – força que atua na haste do pistão ( $N$ );

$(F_{par})_{EST}$  – força a ser contida por atrito, pelos parafusos de aperto da estrutura ( $N$ );

$(F_{par})_{GC}$  – força a ser contida por atrito, pelos parafusos de aperto da guia da cruzeta ( $N$ );

$F_{red}$  – fator de redução de força com valor sugerido de 2 para considerar a fração da carga do cilindro individual suportado pela estrutura do compressor (fator de rigidez da estrutura);

$(N_{par})_{EST}$  – número de parafusos suportando uma guia de cruzeta;

$(N_{par})_{GC}$  – número de parafusos suportando uma guia de cruzeta.

#### 4.6.4 Cargas de máquinas de impacto

O impacto dos martelos de forja e outras máquinas de impacto transfere energia cinética do conjunto da máquina montada para a fundação. A velocidade de pós impacto do martelo segundo ACI 351.3R-04 (2004) é dada por:

$$v_M = \frac{M_m}{M_M} (1 + \alpha_M) v_m \quad (4.35)$$

onde

$v_M$  – velocidade pós-impacto da máquina ( $m/s$ );

$M_m$  – massa do martelo incluindo peças auxiliares ( $kg$ );

$M_M$  – massa da máquina incluindo fundação ( $kg$ );

$\alpha_M$  – velocidade de recuperação do martelo em relação à velocidade do impacto ( $m/s$ );

$v_m$  – velocidade de impacto do martelo ( $m/s$ ).

Para prensas de metal são duas as componentes de forças desenvolvidas, sendo uma devido ao movimento mecânico dos componentes da prensa e outra do processo de conformação do material. As expressões usadas para esse caso são:

$$d_s(t) = \frac{S}{2} \text{sen}(\omega_o t) \quad (4.36)$$

que resulta na seguinte força dinâmica:

$$F_s(t) = \frac{m_d \omega_o \frac{S}{2} \text{sen}(\omega_o t)}{1000} \quad (4.37)$$

sendo

$d_s$  – deslocamento da prensa ( $mm$ );

$S$  – curso da prensa ( $mm$ );

$\omega_o$  – frequência de operação circular da máquina ( $rad/s$ ).

$F_s$  – Força de inércia dinâmica do martelo ( $N$ );

$m_d$  – massa do martelo incluindo os efeitos de qualquer desequilíbrio do mecanismo ( $kg$ ).

## 5 SOLO

Existem principalmente duas metodologias baseadas nas quais a rigidez efetiva do solo sob uma fundação de máquina pode ser avaliada. A teoria do semiespaço elástico e a teoria da constante de mola sem peso.

A teoria do semiespaço elástico requer a determinação do módulo de cisalhamento do solo  $G$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$  do solo, preferencialmente por meio de um teste dinâmico *in loco*. As expressões a seguir relacionam  $G$  e  $\nu$  com a rigidez de mola do solo nos vários modos de vibração, translação vertical, deslizamento horizontal, movimento de giro nos planos verticais  $XZ$  e  $YZ$  e torção no plano horizontal, para uma fundação circular de raio  $r$ .

As constantes de mola para uma fundação circular rígida em repouso sobre o semiespaço elástico para os diferentes graus de liberdade são as seguintes:

– movimento vertical

$$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu} \quad (5.1)$$

– movimento horizontal ou deslizamento

$$k_x = \frac{32(1-\nu)4Gr_o}{7-8\nu} \quad (5.2)$$

sendo  $r_o$  o raio equivalente para uma base retangular

$$r_o = \sqrt{\frac{A_f}{\pi}} \quad (5.3)$$

onde  $A_f$  é a área de contato horizontal da superfície entre a fundação e o solo;

– movimento de balanço

$$k_{\theta} = \frac{8Gr_{\theta}^3}{3(1-\nu)} \quad (5.4)$$

sendo  $r_{\theta}$  o raio equivalente para uma base retangular

$$r_{\theta} = \sqrt[4]{\frac{4I_o}{\pi}} \quad (5.5)$$

onde  $I_o$  é o momento de inércia da base da fundação em relação ao eixo de rotação;

– movimento de torção ao redor de um do eixo vertical

$$k_{\psi} = \frac{16Gr_{\psi}^3}{3} \quad (5.6)$$

sendo  $r_{\psi}$  o raio equivalente para uma base retangular,

$$r_{\psi} = \sqrt[4]{\frac{4I_z}{\pi}} \quad (5.7)$$

$$I_z = I_x + I_y \quad (5.8)$$

As constantes de mola para uma fundação retangular rígida com dimensões  $L \times B$  em repouso sobre o semi espaço elástico podem ser calculadas também para os diferentes graus de liberdade usando-se as seguintes expressões de RICHART (1970):

– vertical

$$k_z = \frac{G}{1-\nu} \alpha_z \sqrt{LB} \quad (5.9)$$

– horizontal

$$k_x = 2(1+\nu)4G\alpha_x \sqrt{LB} \quad (5.10)$$

– rotação

$$k_{\theta} = \frac{G}{1-\nu} \alpha_{\theta} BL^2 \quad (5.11)$$

sendo os valores de  $\alpha_z, \alpha_x$  e  $\alpha_{\theta}$  retirados da Figura 5.1.

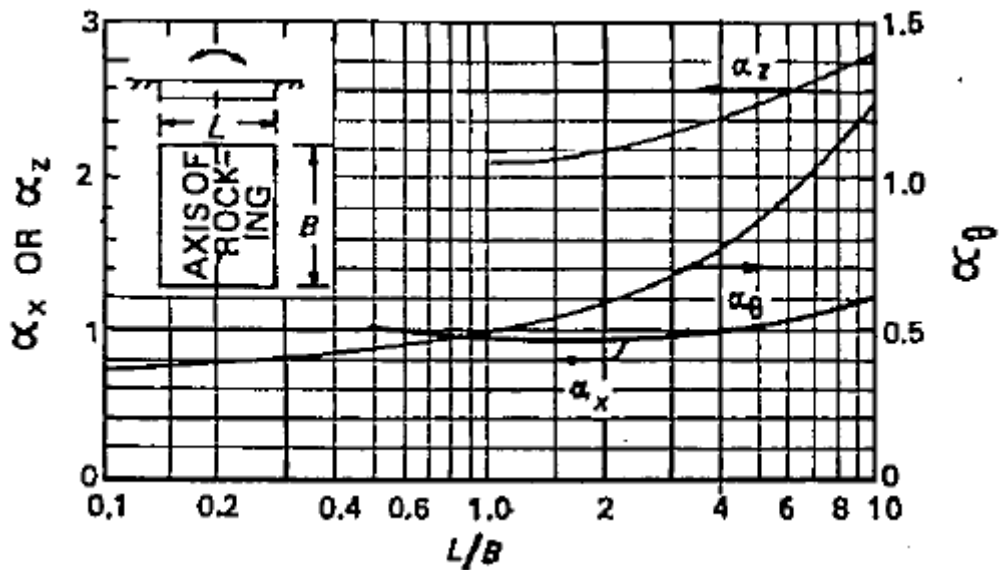


Figura 5.1: Valores de  $\alpha_z$ ,  $\alpha_x$  e  $\alpha_\theta$  para fundações retangulares (RICHART, 1970).

A teoria baseada na constante de mola sem peso (BARKAN, 1962), embora esteja em desuso, será resumidamente abordada pelo motivo de ainda ser considerada na N-1848. Ela requer a avaliação dos seguintes parâmetros do solo:

- coeficiente de compressão elástica uniforme  $C_z$ ;
- coeficiente de cisalhamento elástico uniforme  $C_\tau$ ;
- coeficiente de compressão elástico não uniforme  $C_\theta$ ;
- coeficiente de compressão elástico não uniforme  $C_\psi$ .

O valor de  $C_z$  é dado por:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (5.12)$$

$$C_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{BL}} \quad (5.13)$$

ou

$$C_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A_f}} \quad (5.14)$$

O valor de  $\alpha$  é função das dimensões do bloco de teste (Tabela 5.1).



Tabela 5.1: Fator  $\alpha$  para fundações retangulares (BARKAN, 1962).

L/B	$\alpha$
1	1,06
1,5	1,07
2	1,09
3	1,13
5	1,22
10	1,41

Considerando-se o valor de  $\alpha = 1,13$  tem-se:

$$C_z = 1,13 \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\sqrt{A_f}} \quad (5.15)$$

e com

$$A_f = \pi r_o^2$$

pode-se escrever que

$$C_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu} \frac{1}{A_f} \quad (5.16)$$

$$C_\theta = 2C_z \quad (5.17)$$

$$C_\tau = 0,5C_z \quad (5.18)$$

$$C_\psi = 0,75C_z \quad (5.19)$$

Os coeficientes de mola  $k$  são calculados para os vários modos de vibração em função dos coeficientes de elasticidade do solo, assim

$$k_z = C_z A_f \quad (5.20)$$

$$k_\tau = C_\tau A_f \quad (5.21)$$

$$k_\theta = C_\theta I_{z(or y)} \quad (5.22)$$

$$k_\psi = C_\psi I_z \quad (5.23)$$

## 6 ANÁLISE DA NORMALIZAÇÃO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

O Brasil não tem uma norma específica para fundações de máquinas, porém existe na Petrolóleo Brasileiro S.A. – Petrobras, a N-1848 – Projeto de Fundação de Máquinas, que é referência nesse assunto. Neste capítulo estuda-se a comparação da N-1848, com o ACI-351.3R-04 e com a DIN 4024–Partes 1 e 2.

### 6.1 ESCOPO DAS NORMAS

A Tabela 6.1 mostra o escopo dessas normas onde pode se observar que as três normas estudadas têm prescrições muito similares.

Tabela 6.1: Escopo da normas 1848, do ACI-351.3R-04 e da DIN 4024 – Partes 1 e 2.

Norma	Escopo
N-1848	<ul style="list-style-type: none"><li>– fixa os procedimentos a serem observados no projeto de fundações de máquinas estacionárias;</li><li>– aplica-se para projetos de fundações de máquinas rotativas e alternativas, sujeitas a cargas vibratórias.</li></ul>
351.3R-04	Limitado a engenharia, construção, reparo e modernização de fundações de equipamentos dinâmicos. Para o propósito da norma equipamentos dinâmicos incluem os seguintes: <ol style="list-style-type: none"><li>1. máquinas rotativas;</li><li>2. máquinas alternativas;</li><li>3. máquinas de impacto ou impulsivas.</li></ol>
DIN 4024 Parte 1	Especifica requisitos para estruturas de concreto armado ou aço que suportem sistemas mecânicos (fundações de máquinas). Tais sistemas mecânicos são entendidos principalmente como maquinários com elementos rotativos, as fundações dos quais são capazes de gerar vibrações de flexão no mínimo em um plano. Para o propósito desta norma, distinção é feita entre os seguintes tipos de fundações de máquinas: <ol style="list-style-type: none"><li>a) fundações tipo mesa;</li><li>b) fundações mola;</li><li>c) fundações radier;</li><li>d) fundações plataforma.</li></ol> Os requisitos especificados têm como objetivo prevenir que as cargas dinâmicas e estáticas transmitam vibrações inadmissíveis para o meio ambiente ou que causem danos ao maquinário e sua fundação. A norma estabelece critérios para determinar o comportamento da vibração, lidar com os efeitos das ações de projeto e sobre os princípios da construção baseados na experiência atual com fundações de máquinas.

<p>DIN 4024 Parte 2</p>	<p>Especifica blocos e caixas de fundações de máquinas rígidos feitos de concreto armado ou aço que têm por objetivo servir de apoio e proporcionar ancoragem para o maquinário sujeito a vibrações periódicas. Devido à rigidez à flexão e torção tais fundações são assumidas como rígidas. Tal maquinário inclui:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) aqueles com massas rotativas (geradores, compressores, ventiladores, transformadores, bombas, impressoras rotativas, máquinas ferramentas e seus acionadores, motores elétricos e turbinas à gás e vapor);</li> <li>b) aqueles com massas oscilantes (como compressores de pistão e motores diesel);</li> <li>c) trituradores e moinhos.</li> </ul> <p>Nota: nos casos de trituradores e moinhos as vibrações transitórias podem predominar sobre as vibrações periódicas, que requerem consideração especial.</p> <p>Essa norma também se aplica a máquinas que são sensíveis a vibrações de fontes externas (fresadoras, tornos e outras máquinas ferramentas).</p> <p>Esta norma não se aplica a estruturas flexíveis cobertas na DIN 4024 parte1, fundações para martelos de impacto ou máquinas sujeitas a cargas aplicadas repentinamente ou quadros estruturais para grupos geradores diesel ou maquinário similar.</p> <p>Os requisitos especificados têm como objetivo prevenir que as cargas dinâmicas e estáticas transmitam vibrações inadmissíveis para o meio ambiente ou que causem danos ao maquinário e sua fundação.</p> <p>A norma estabelece critérios para determinar o comportamento de vibração, lidar com os efeitos das ações de projeto e cobrir os princípios da construção baseados na experiência atual com fundações de máquinas.</p>
-----------------------------	--

## 6.2 DADOS BÁSICOS PARA O PROJETO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Neste item apresentam-se os dados básicos para o projeto de fundações de máquinas e neste caso limita-se a informar se os itens foram citados pelas normas. As Tabelas 6.2 a 6.4 mostram os parâmetros do solo, A Tabela 6.5 relaciona os parâmetros do equipamento e a Tabela 6.6 relaciona os parâmetros geométricos da fundação.

A N-1848 recomenda o método de ensaio *cross-hole* para a obtenção do valor do módulo de cisalhamento do solo  $G$  ( $kPa$ ) e na impossibilidade de se usar esse método o valor será:

$$G = 12000N^{0,8} \quad (6.1)$$

sendo  $N$  o número de golpes obtido em ensaio SPT.

O ACI 351.3R-04 cita os métodos *cross-hole*, *down-hole*, *up-hole* e *reflection seismic* para medir  $V_s$ , velocidade da onda de cisalhamento do solo ( $m/s$ ), para determinação de  $G$  ( $Pa$ ), no campo. A expressão que relaciona  $G$  e  $V_s$  é:

$$G = \rho(V_s)^2 \quad (6.2)$$

Em laboratório, a partir de amostras do solo, os valores de  $G$  são obtidos utilizando-se as expressões desenvolvidas por HARDIN e BLACK (1968) relacionando-se o índice de

vazios dos solos  $e_v$  e a pressão de confinamento dos solos  $\sigma_o$  determinados por HARDIN e RICHART (1963), *apud* ACI 351.3R-04:

$$G = \frac{218200(2,17 - e_v)^2 \sqrt{\sigma_o}}{1 + e_v} \quad (6.3)$$

– solos com grãos angulares, argilosos, índice de vazios  $e_v \geq 0,6$

$$G = \frac{102140(2,97 - e_v)^2 \sqrt{\sigma_o}}{1 + e_v} \quad (6.4)$$

– em solos arenosos a densidade relativa é proporcional ao índice de vazios, segundo SEED e IDRIS (1970), *apud* ACI 351.3R-04. Relaciona-se o módulo de elasticidade dinâmico  $G$  com a densidade relativa da areia e pressão de confinamento  $\sigma_o$ , por:

$$G = 6920k_2 \sqrt{\sigma_o} \quad (6.5)$$

sendo  $k_2$  extraído da Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Valores de  $k_2$  versus densidade relativa.

Densidade relativa %	$k_2$
90	70
75	61
60	52
45	43
40	40
30	34

O módulo de elasticidade do solo  $E$  é obtido pela expressão 6.6 quando o ensaio de *cross-hole* é realizado ou por meio da expressão 6.7, relaciona-se com o módulo de elasticidade transversal, caso não se tenha o citado ensaio, assim:

$$E = 2\rho V_s^2 (1 + \nu) \quad (6.6)$$

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (6.7)$$

Tabela 6.3: Parâmetros do solo.

Itens	N-1848	ACI 351.3R-04	DIN-4024	Comentários
a) posição e natureza das camadas/perfil do solo	S	N	N	
b) cota máxima do nível freático	S	S	N	
c) resistência à penetração definida pelo ensaio SPT	S	N	N	
d) massa específica do solo $\rho$ ;	S (1)	S	S	(1) Na falta de ensaio geotécnico usar $\rho = 1,8t/m^3$ .
e) módulo de cisalhamento do solo $G$	S (1)	S (2)	S (3)	(1) expressão 6.1. (2) expressões 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5. (3) Cita literaturas a serem consultadas.
f) coeficiente de Poisson $\nu$	S Ver Tabela 6.4	S (2)	S (3)	(2) Os valores para o coeficiente de Poisson $\nu$ são 0,33 para solos não coesivos e 0,4 para solos coesivos. (3) Cita literatura a ser consultada.
g) módulo de elasticidade do solo $E$	S (1)	S (2)	S	(1) expressão 6.6 e 6.7. (2) Citado na terminologia.

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.

Tabela 6.4: Coeficiente de Poisson segundo a N-1848.

Tipo de Solo	Coeficiente de Poisson $\nu$
Argila saturada	0,45-0,45
Argila parcialmente saturada	0,35-0,50
Areia densa ou pedregulho	0,40-0,50
Areia medianamente densa ou pedregulho	0,30-0,40
Silte	0,30-0,40

Tabela 6.5: Parâmetros do equipamento.

Item	N-1848	ACI 351.3R-04	DIN-4024
a) desenho dimensional do equipamento contendo: — dimensões do chassi; — dimensões principais do equipamento; — posição do centro de gravidade do conjunto ou das partes componentes; — fixação do equipamento à base/fundação (chumbadores e insertos).	S	S	S
b) peso do conjunto ou dos elementos componentes do conjunto	S	S	S
c) frequências operacionais dos elementos componentes do conjunto	S	S	S
d) cargas dinâmicas (forças centrífugas, forças de inércia das massas móveis e momentos)	S	S	S
e) frequências críticas de operação da máquina ( $f_c$ )	S	S	S
f) amplitudes máximas permissíveis de vibração	S	S	S
g) momento de curto-circuito (para motores elétricos ou geradores)	S	S	S

N—Não citado na norma.

S—Sim, citado na norma.

Tabela 6.6: Parâmetros geométricos da fundação.

Item	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
a) centroide da área da base;	S	S	S
b) centro de gravidade do conjunto fundação mais máquina;	S	S	S
c) momento de inércia da área da base;	S	S	S
d) momento de massa do conjunto fundação mais máquina.	S	S	S

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.

### 6.3 FUNDAÇÕES TÍPICAS PARA MÁQUINAS

A Tabela 6.7 mostra os tipos de fundação de máquinas abordadas pelas normas analisadas neste estudo. A N-1848 não trata nem cita blocos de inércia em estrutura nem sobre plataforma com isoladores. O uso de sistemas de isolamento de vibrações não é tratado na N-1848.

Tabela 6.7: Tipos de fundação de máquinas.

Tipo de fundação	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Bloco	S	S	S
Bloco combinado	S	S	S
Bloco de inercia em estrutura	N	S	S
Plataforma	S	S	S
Plataforma com isoladores	N	S	S
Fundações sobre estacas	S	S	S

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.

#### 6.4 FAIXAS DE SEVERIDADE DE VIBRAÇÃO

A N-1848 utiliza as faixas de severidade de vibração como critério para aceitação da fundação. As Tabelas 6.8 e 6.9 extraídas da NBR-10082 (1987), muito similares às da ISO 10816, são empregadas para classificar as faixas de severidade de vibração.

Tabela 6.8: Faixas de severidade de vibração

Faixa de classificação	Faixa de classificação (valor efetivo da velocidade de vibração)	
	mm/s	
	Acima de	Até
0,11	0,071	0,112
0,18	0,112	0,18
0,28	0,18	0,28
0,45	0,28	0,45
0,71	0,45	0,71
1,12	0,71	1,12
1,8	1,12	1,8
2,8	1,8	2,8
4,5	2,8	4,5
7,1	4,5	7,1
11,2	7,1	11,2
18	11,2	18
28	18	28
45	28	45
71	45	71

Na Tabela 6.9 tem-se a seguinte nomenclatura:

A é bom;

B é satisfatório;

C é pouco satisfatório;

D é ruim ou não satisfatório.



Classificação das máquinas:

- máquinas pequenas – Classe I;
- máquinas médias – Classe II;
- máquinas grandes – Classe III;
- turbomáquinas – Classe IV.

Tabela 6.9: Faixa de severidade de vibração.

Faixa de severidade de vibração		Avaliação de qualidade para classes diferentes de máquinas			
Faixa	Velocidade efetiva $v$ (mm/s) nos limites da faixa	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV
0,28	0,28	A	A	A	A
0,45	0,45				
0,71	0,71				
1,12	1,12	B	B	B	B
1,8	1,8				
2,8	2,8	C	C	C	C
4,5	4,5				
7,1	7,1	D	D	D	D
11,2	11,2				
18	18				
28	28				
45	45				
71	71				

**NOTA:** O projeto da fundação deve ser orientado de modo que a máquina se enquadre dentro das faixas A ou B de comportamento.

O ACI 351.3R-04 não define graus de severidade de vibrações, porém, relaciona e comenta vários autores e dá exemplos de controle (Figura 6.1). Nessa figura ele define cinco critérios A, B, C, D e E, em que se pode enquadrar se o equipamento está operando sem falhas, critério A, até o critério E, no qual o equipamento deve ser desligado, pois apresenta perigo.

O ACI 351.3R-04 cita também a ISO 10816 que apresenta os critérios de severidade de vibrações para os diversos tipos de equipamentos. Essa norma identifica quatro áreas de interesse com respeito à magnitude de vibrações, da Zona A, vibração típica de novos equipamentos até a Zona D, vibração normalmente considerada severa o suficiente para causar danos à máquina.

Outro documento citado pelo ACI 351.3R-04 é o de LIFSHITS, SIMMONS e SMALLEY (1986), que também segue a abordagem de BLAKE (1964) de identificação de cinco categorias desde a categoria de não falha até perigo imediato de falha. Uma série de fatores de correção é estabelecida para ampliar a aplicabilidade a uma maior faixa de equipamentos e dados de medição. Na Figura 6.1 tem-se que:

- A – sem falhas, típico de equipamento novo;
- B – falhas menores, custos de manutenção;
- C – defeituoso. Corrigir dentro de 10 dias de forma econômica;
- D – falha está próxima. Corrigir dentro de 2 dias para evitar colapso;
- E – perigoso. Desligar para evitar perigo.

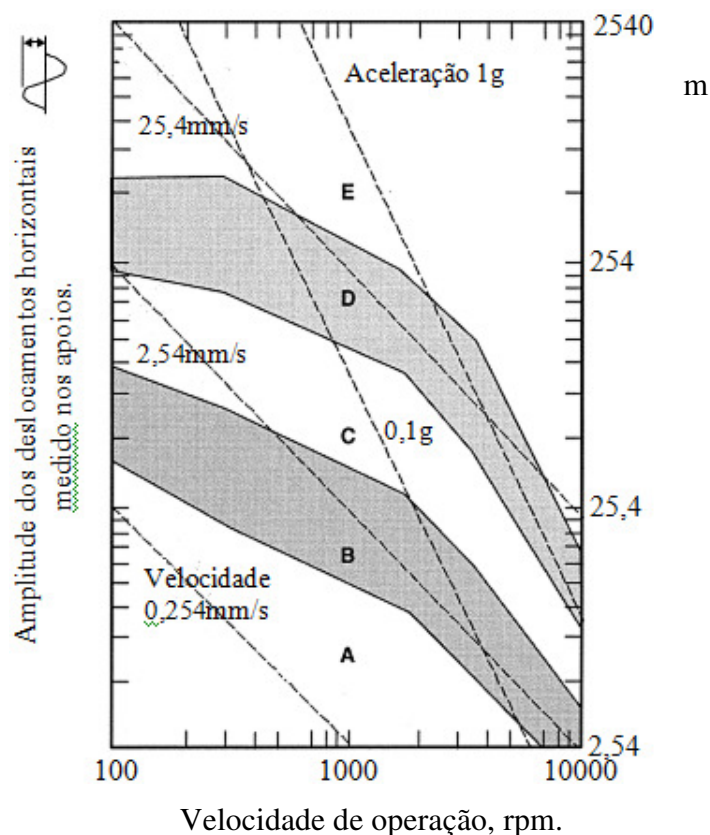


Figura 6.1: Critérios de vibração para máquinas rotativas BLAKE (1964), modificado por ARYA, O'NEILL e PINCUS (1970).

O ACI 351.3R-04 também sugere o gráfico de BAXTER e BERNHARD (1967) que tem uma ampla faixa de severidade de vibrações desde vibrações extremamente suaves até muito fortes.

As normas 541, 610, 612, 613, 617, 618 e 619 do American Petroleum Institute (API), para equipamentos da indústria petroquímica, também são citadas no ACI 351.3R-04.

A norma DIN 4024 recomenda consultar as normas VDI 2056 e 2060 quanto aos graus de severidade de vibrações. A classificação existente nessas duas normas são similares àquelas encontradas na ISO 10816.

## 6.5 PARÂMETROS PRELIMINARES DO SISTEMA SOLO-FUNDAÇÃO

Neste item são mostrados os parâmetros preliminares do sistema solo-fundação para fundações diretas e profundas (com estacas). Na Tabela 6.10 são mostrados os parâmetros para fundação direta pela teoria da constante de mola sem peso, proposto por BARKAN (1962), em desuso, porém mantida aqui neste estudo por constar da N-1848. Observa-se que as expressões contidas nesta tabela não são citadas no ACI 351.3R-04 e na DIN 4024, pois esta teoria não é usada nestas normas. Na Tabela 6.11 correlaciona-se a razão entre o comprimento  $L$  da fundação e sua largura  $B$  e a razão entre  $C_\theta$  e  $C_u$ . Na falta de ensaios adota-se essa tabela e obtém-se  $C_\theta$  a partir de  $C_u$ .

Tabela 6.10: Parâmetros preliminares do sistema solo-fundação para fundações diretas.

Item	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024	Comentário
Coeficiente dinâmico de compressão elástica uniforme	$C_u = \frac{1,13E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}}$ (1)	N	N	(1) Na falta de ensaio usar a expressão para obter $C_u$
Coeficiente dinâmico de cisalhamento elástico uniforme	$C_\tau = 0,5C_u$ (1)	N	N	(1) Na falta de ensaio usar a expressão para obter $C_\tau$
Coeficiente dinâmico de compressão elástica não-uniforme	$C_\theta$ (1)	N	N	(1) Na falta de ensaio usar a Tabela 6.11 para obter $C_\theta$
Coeficiente dinâmico de cisalhamento elástico não-uniforme	$C_\psi = 0,75C_u$ (1)	N	N	1) Na falta de ensaio usar a expressão para obter $C_\psi$

N–Não citado na norma.

Tabela 6.11: Razão entre  $C_\theta$  e  $C_u$ .

$L/B$	$\frac{C_\theta}{C_u}$
1,0	1,87
1,5	2,11
2,0	2,31
3,0	2,63
5,0	3,04
10,0	3,53

Na Tabela 6.12 estão listados os parâmetros solo-fundação para fundações em estacas. Estes parâmetros são os coeficientes de rigidez e coeficientes de amortecimentos que são usados nas expressões para obtenção das rigidezes e constantes de amortecimento das estacas. A DIN-4024 não cita estes parâmetros. Observa-se que a DIN-4024 concentra-se bastante nos conceitos sobre fundações de máquinas, mas não apresenta expressões detalhadas como o

ACI 351.3R-04 e N-1848, motivo do não aparecimento de expressões da DIN nas diversas tabelas comparativas que serão apresentadas a seguir.

Tabela 6.12: Parâmetros preliminares sistema solo-fundação com estacas.

Item	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024	Comentários
Coefficiente de rigidez horizontal com a estaca engastada no bloco de coroamento – $f_{x1}$	S (1)	S (3)	N	(1) Extrair de tabelas fornecidas na norma.
Coefficiente de rigidez horizontal com a estaca rotulada no bloco de coroamento – $f_{x1}^p$	S (1)	S (3)	N	(3) Cita tabelas e gráficos fornecidos na norma.
Coefficiente de rigidez vertical $f_{z1}$	S (2)	S (3)	N	
Coefficiente de rigidez à flexão $f_{\phi1}$	S (1)	S (3)	N	
Coefficiente de rigidez cruzada $f_{x\phi1}$	S (1)	S (3)	N	
Coefficiente de amortecimento horizontal com a estaca engastada no bloco de coroamento – $f_{x2}$	S (1)	S (3)	N	
Coefficiente de amortecimento horizontal com a estaca rotulada no bloco de coroamento – $f_{x2}^p$	S (1)	S (3)	N	
Coefficiente de amortecimento vertical $f_{z2}$	S (2)	S (3)	N	(2) Extrair de ábacos fornecidos na norma.
Coefficiente de amortecimento à flexão $f_{\phi2}$	S (1)	S (3)	N	
Coefficiente de rigidez cruzada $f_{x\phi2}$	S (1)	S (3)	N	

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.

## 6.6 RAIOS EQUIVALENTES

A teoria elástica do semiespaço foi idealizada para bases circulares. Para bases retangulares torna-se necessário o cálculo dos raios equivalentes de acordo com o modo de vibração a considerar. A Tabela 6.13 mostra as fórmulas dos raios equivalentes apresentados

nas normas em análise. As expressões não apresentam diferenças, pois são estabelecidas a partir da forma geométrica da fundação. As diferenças contidas entre as expressões da N-1848 e ACI 351.3R-04 são apenas de notação.

Tabela 6.13: Raio equivalente para fundação de base retangular.

Modo de vibração	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Vertical e horizontal	$r_x = r_y = r_z = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}$	$R = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}$	N
Balanço ao redor do eixo X	$r_{\theta_x} = \sqrt[4]{\frac{ab^3}{3\pi}}$	$R_\psi = \sqrt[4]{\frac{a^3b}{3\pi}}$	N
Balanço ao redor do eixo Y	$r_{\theta_y} = \sqrt[4]{\frac{ba^3}{3\pi}}$	$R_\psi = \sqrt[4]{\frac{ab^3}{3\pi}}$	N
Torção ao redor do eixo Z	$r_{\theta_z} = \sqrt[4]{\frac{ab(a^2 + b^2)}{6\pi}}$	$R_\eta = \sqrt[4]{\frac{ab(a^2 + b^2)}{6\pi}}$	N

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.

Nessa tabela tem-se:

$a$  – lado maior da base retangular da fundação;

$b$  – lado menor da base retangular da fundação.

## 6.7 CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DE UMA ESTACA

A Tabela 6.14 mostra para cada tipo de deformação as expressões usadas pelas normas para determinação das constantes de rigidez de uma estaca, e a Tabela 6.15 mostra as expressões usadas para obtenção das constantes de amortecimento para uma estaca. As diferenças existentes nestas tabelas são somente de notação visto que as mesmas são extraídas de NOVAK (1974) apud ARYA (1979).

Tabela 6.14: Rigidez de uma estaca para cada tipo de deformação.

Tipo de deformação	Rigidezes		
	N-1848	ACI 351.3R-04	DIN-4024
Horizontal	$k'_x = k'_y = \frac{E_p I_p}{r_o^3} \cdot f_{x1}$	$k_{uj} = \frac{E_p I_p}{r_o^3} \cdot f_{u1}$	N
Vertical	$k'_z = \frac{E_p A_p}{r_o} \cdot f_{z1}$	$k_{vj} = \frac{E_p A_p}{r_o} \cdot f_{v1}$	N
Rotação (flexão)	$k'_\phi = \frac{E_p I_p}{r_o} \cdot f_{\phi1}$	$k_{\psi j} = \frac{E_p I_p}{r_o} \cdot f_{\psi1}$	N
Cruzada (flexão mais horizontal)	$k'_{x\phi} = k'_{y\phi} = \frac{E_p I_p}{r_o^2} \cdot f_{x\phi1}$	$k_{u\psi j} = \frac{E_p I_p}{R^2} \cdot f_{u\psi1}$	N
Torção	N	$k_{nj} = \frac{G_p J}{r_o} f_{\eta1}$	N

N–Não citado na norma.

Tabela 6.15: Constante de amortecimento para uma estaca.

Tipo de deformação	Constantes de Amortecimento		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Horizontal	$c'_x = c'_y = \frac{E_p I_p}{r_o^2 V_s} \cdot f_{x2}$	$c_{ij} = \frac{E_p I_p}{r_o^2 V_s} f_{u2}$	N
Vertical	$c'_z = \frac{E_p A_p}{V_s} \cdot f_{z2}$	$c_{vj} = \frac{E_p A_p}{V_s} f_{v2}$	N
Rotação (flexão)	$c'_\phi = \frac{E_p I_p}{V_s} \cdot f_{\phi2}$	$c_{\psi j} = \frac{E_p I_p}{V_s} f_{\psi2}$	N
Cruzada (flexão mais horizontal)	$c'_{x\phi} = c'_{y\phi} = \frac{E_p I_p}{r_o^2} \cdot f_{x\phi1}$	$c_{u\psi j} = \frac{E_p I_p}{r_o V_s} f_{u\psi2}$	N
Torção	N	$c_{nj} = \frac{G_p J}{V_s} f_{\eta2}$	N

N–Não citado na norma.

Os parâmetros dessas tabelas são:

$E_p$  – módulo de elasticidade da estaca;

$I_p$  – momento de inércia à flexão da estaca;

$A_p$  – área da seção reta da estaca;

$r_o$  – raio da estaca;

$V_s$  – velocidade de onda de cisalhamento do solo;

$G_p J$  – rigidez torcional da estaca.

Nota: para estaca rotulada no bloco de coroamento, deve-se substituir  $f_{x2}$  na Tabela 15 por  $f_{px2}$ .

## 6.8 CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DE UMA FUNDAÇÃO DIRETA

A Tabela 6.16 mostra as constantes de rigidez para os seis graus de liberdade, considerando-se a teoria da constante de mola sem peso, em desuso e que será citado por ainda constar da N-1848. Aqui novamente as expressões não são citadas pelo ACI 351.3R-04 e DIN-4024, pois esta teoria não é usada nestas normas. Observa-se que resultados de rigidez calculados por essa teoria apresentam resultados da ordem de 30% inferiores para as direções dos eixos  $X$  e  $Y$  e diferença de menos de 1% na direção  $Z$ , quando comparados os valores encontrado pela teoria elástica do semiespaço.

Tabela 6.16: Rigidezas de uma fundação direta pela teoria da constante de mola sem peso.

Modo de Vibração	Constante de mola		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$k_x = C_\tau A_f$	N	N
Translação em Y	$k_y = C_\tau A_f$	N	N
Translação em Z	$k_z = C_u A_f$	N	N
Rotação em X	$k_{\theta_x} = C_\theta J_x - Mgl$	N	N
Rotação em Y	$k_{\theta_y} = C_\theta J_y - Mgl$	N	N
Rotação em Z	$k_{\theta_z} = C_\psi J_z$	N	N

N–Não citado na norma.

Na Tabela 6.16 tem-se:

$M$  – massa do sistema (fundação + máquina);

$l$  – distância do centro de gravidade do sistema (fundação + máquina) em relação à base (assentamento) da fundação.



Na Tabela 6.17 mostra-se as expressões de razão de massa em fundações diretas, pela teoria elástica do semiespaço para os seis graus de liberdade. Na Tabela 6.18 mostra-se as expressões de amortecimento pela teoria elástica do semiespaço. As expressões da N-1848 e da ACI 351.3R-04 são idênticas provenientes de RICHART, HALL e WOODS (1970), sendo as diferenças somente de notação. A norma alemã não cita expressões de razão de massa e não cita expressões de fator de amortecimento em função da razão de massa pela teoria elástica do semiespaço.

Tabela 6.17: Razão de massa de fundações diretas pela teoria elástica do semiespaço.

Modo de Vibração	Razão de massa		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
Translação em X	$B_x = \frac{(7 - 8\nu)}{32(1 - \nu)} \frac{M}{\rho r_x^3}$	$B_u = \frac{(7 - 8\nu)}{32(1 - \nu)} \frac{M}{\rho R^3}$	N
Translação em Y	$B_y = \frac{(7 - 8\nu)}{32(1 - \nu)} \frac{M}{\rho r_y^3}$	$B_u = \frac{(7 - 8\nu)}{32(1 - \nu)} \frac{M}{\rho R^3}$	N
Translação em Z	$B_z = \frac{(1 - \nu)}{4} \frac{M}{\rho r_x^3}$	$B_v = \frac{(1 - \nu)}{4} \frac{M}{\rho R^3}$	N
Rotação em X	$B_{\theta_x} = \frac{3(1 - \nu)}{8} \frac{I_x}{\rho r_{\theta_x}^5}$	$B_{\psi} = \frac{3(1 - \nu)}{8} \frac{I_{\psi}}{\rho R_{\psi}^5}$	N
Rotação em Y	$B_{\theta_y} = \frac{3(1 - \nu)}{8} \frac{I_y}{\rho r_{\theta_y}^5}$	$B_{\psi} = \frac{3(1 - \nu)}{8} \frac{I_{\psi}}{\rho R_{\psi}^5}$	N
Rotação em Z	$B_{\theta_z} = \frac{I_z}{\rho r_{\theta_z}^5}$	$B_{\eta} = \frac{I_{\eta}}{\rho R_{\eta}^5}$	N

N–Não citado na norma.

Tabela 6.18: Fator de amortecimento – fundações diretas.

Modo de Vibração	Fator de amortecimento		
	Teoria do semiespaço elástico		
	N-1848	351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$D_x = \frac{0,2875}{\sqrt{B_x}}$	$D_u = \frac{0,2875}{\sqrt{B_u}}$	N
Translação em Y	$D_y = \frac{0,2875}{\sqrt{B_y}}$	$D_u = \frac{0,2875}{\sqrt{B_u}}$	N
Translação em Z	$D_z = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}}$	$D_v = \frac{0,425}{\sqrt{B_v}}$	N
Rotação em X	$D_{\theta_x} = \frac{0,15}{(1 + B_{\theta_x})\sqrt{B_{\theta_x}}}$	$D_{\psi} = \frac{0,15}{(1 + B_{\psi})\sqrt{B_{\psi}}}$	N
Rotação em Y	$D_{\theta_y} = \frac{0,15}{(1 + B_{\theta_y})\sqrt{B_{\theta_y}}}$	$D_{\psi} = \frac{0,15}{(1 + B_{\psi})\sqrt{B_{\psi}}}$	N
Rotação em Z	$D_{\theta_z} = \frac{0,5}{(1 + 2B_{\theta_z})}$	$D_{\eta} = \frac{0,5}{(1 + 2B_{\eta})}$	N

Nessas tabelas tem-se:

$B_i$  – razão de massa para a direção  $i$ ;

$D_i$  – razão de amortecimento para a direção  $i$ ;

$R, R_i$  – raio e raio equivalente da fundação para a direção aplicável; .

$A_f$  – área da fundação;

$c$  – constante elástica (mola) de um sistema 1GDL;

$m$  – massa de um sistema 1GDL.

Na Tabela 6.19 tem-se as expressões para as constantes de mola. As expressões da N-1848 e da ACI 351.3R-04 são idênticas provenientes de RICHART, HALL e WOODS (1970), como nas tabelas anteriores, sendo as diferenças somente de notação. Na ACI 351.3R-04 são apresentadas também as expressões para uso das dimensões planas de uma fundação retangular de acordo com RICHART, HALL E WOODS (1970). A DIN-4024 não cita expressões para obtenção de constante de mola.

Tabela 6.19: Constante de mola – fundações diretas, teoria elástica do semiespaço.

Modo de Vibração	Constante de mola		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$k_x = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} Gr_x$	$k_u = \frac{32(1-\nu)}{(7-8\nu)} GR$	N
Translação em Y	$k_y = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} Gr_y$	$k_u = \frac{32(1-\nu)}{(7-8\nu)} GR$	N
Translação em Z	$k_z = \frac{4Gr_z}{1-\nu}$	$k_v = \frac{4}{(1-\nu)} GR$	N
Rotação em X	$k_{\theta_x} = \frac{8Gr_{\theta_x}^3}{3(1-\nu)}$	$k_{\psi} = \frac{8}{3(1-\nu)} Gr_{\psi}^3$	N
Rotação em Y	$k_{\theta_y} = \frac{8Gr_{\theta_y}^3}{3(1-\nu)}$	$k_{\psi} = \frac{8}{3(1-\nu)} Gr_{\psi}^3$	N
Rotação em Z	$k_{\theta_z} = \frac{16}{3} Gr_{\theta_z}^3$	$k_{\eta} = \frac{16}{3} Gr_{\eta}^3$	N

N–Não citado na norma.

## 6.9 CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DE FUNDAÇÃO EM ESTACAS

Neste item serão tratadas as fundações sobre bloco com estacas. A Tabela 6.20 compara as expressões contidas nas normas em estudo para os coeficientes de mola de um grupo de estacas. A Tabela 6.21 compara as expressões das constantes de amortecimento do grupo de estacas.

A N-1848 inicia este assunto apresentando as seguintes hipóteses simplificadoras:

- as constantes de rigidez e amortecimento à torção das estacas individuais são desprezadas;
- a interação entre estacas (efeito de grupo) é desprezada;
- admite-se que as estacas sejam todas iguais.

O ACI cita que quando o espaçamento entre estacas é superior a vinte vezes o diâmetro da estaca a interação entre estacas (efeito de grupo) pode ser desprezado. Quando este espaçamento é menor do que vinte vezes o diâmetro da estaca pode-se adotar um fator de redução para as constantes de rigidez e amortecimento do grupo de estacas. POULOS e DAVIS (1980) apresentam gráficos para os fatores de interação para carregamento axial e lateral. SANTOS (2012) exemplifica o efeito de grupo de estacas em seu artigo.

Observa-se que a DIN-4024 não apresenta expressões para grupo de estacas. A N-1848 e o ACI 351.3R-04 apresentam expressões com notações diferentes, mas que conduzem

aos mesmos resultados exceto para torção, pois a N-1848 não apresenta expressão de cálculo para este item.

Tabela 6.20: Rigidez para um grupo de estacas.

Modo de Vibração	Rigidez (mola) do grupo de estacas		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
Horizontal	$k_x^g = k_y^g = \sum_{i=1}^n k_x' = \sum_{i=1}^n k_y'$	$k_{gu} = \sum_{j=1}^N k_{uj}$	N
Vertical	$k_z^g = \sum_{i=1}^n k_z'$	$k_{gv} = \sum_{j=1}^N k_{vj}$	N
Rotação em torno de X	$k_{xx}^g = \sum_{i=1}^n [k_\phi' + k_z' y_i^2 + k_y' z_c^2 - 2k_{y\phi}' z_c]$	$k_{g\psi} = \sum_{j=1}^N (k_{\psi j} + k_{vj} x_j^2)$	N
Rotação em torno de Y	$k_{yy}^g = \sum_{i=1}^n [k_\phi' + k_z' x_i^2 + k_x' z_c^2 - 2k_{x\phi}' z_c]$	$k_{g\psi} = \sum_{j=1}^N (k_{\psi j} + k_{vj} x_j^2)$	N
Rotação em torno de Z	$k_{zz}^g = \sum_{i=1}^n [k_x' (x_i^2 + y_i^2)]$	$k_{gu\psi} = k_{g\psi u} = \sum_{j=1}^N k_{u\psi j}$	N
Torção	N	$k_{g\eta} = \sum_{j=1}^N [k_{nj} + k_{uj} (x_j^2 + z_j^2)]$	

N–Não citado na norma.

Tabela 6.21: Constante de amortecimento para um grupo de estacas.

Modo de Vibração	Constante de amortecimento do grupo de estacas		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
Horizontal	$c_x^g = c_y^g = \sum_{i=1}^n c_x' = \sum_{i=1}^n c_y'$	$c_{gu} = \sum_{j=1}^N c_{uj}$	N
Vertical	$c_z^g = \sum_{i=1}^n c_z'$	$c_{gv} = \sum_{j=1}^N c_{vj}$	N
Rotação em torno de X	$c_{xx}^g = \sum_{i=1}^n [c_\phi' + c_z' y_i^2 + c_y' z_c^2 - 2c_{y\phi}' z_c]$	$c_{g\psi} = \sum_{j=1}^N (c_{\psi j} + c_{vj} x_j^2)$	N
Rotação em torno de Y	$c_{yy}^g = \sum_{i=1}^n [c_\phi' + c_z' x_i^2 + c_x' z_c^2 - 2c_{x\phi}' z_c]$	$c_{g\psi} = \sum_{j=1}^N (c_{\psi j} + c_{vj} x_j^2)$	N
Rotação em torno de Z	$c_{zz}^g = \sum_{i=1}^n [c_x' (x_i^2 + y_i^2)]$	$c_{gu\psi} = c_{g\psi u} = \sum_{j=1}^N c_{u\psi j}$	N
Torção	N	$c_{g\eta} = \sum_{j=1}^N [c_{nj} + c_{uj} (x_j^2 + z_j^2)]$	N

N–Não citado na norma.

As Tabelas 6.22 e 6.23 comparam as expressões de amortecimento crítico e fator de amortecimento para um grupo de estacas. As normas DIN-4024 e ACI 351.3R-04 não apresentam estas expressões para grupo de estacas.

Tabela 6.22: Amortecimento crítico de um grupo de estacas.

Tipo de deformação	Amortecimentos críticos		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em torno de X	$c_{cx}^g = 2\sqrt{k_x^g M}$	N	N
Translação em torno de Y	$c_{cy}^g = 2\sqrt{k_y^g M}$	N	N
Translação em torno de Z	$c_{cz}^g = 2\sqrt{k_z^g M}$	N	N
Rotação em torno de X	$c_{c_{xx}}^g = 2\sqrt{k_{xx}^g M I_x}$	N	N
Rotação em torno de Y	$c_{c_{yy}}^g = 2\sqrt{k_{yy}^g M I_y}$	N	N
Rotação em torno de Z	$c_{c_{zz}}^g = 2\sqrt{k_{zz}^g M I_z}$	N	N

N–Não citado na norma.

Tabela 6.23: Fatores de amortecimento crítico de um grupo de estacas.

Tipo de deformação	Fatores de amortecimento críticos		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
Translação em torno de X	$D_x = \frac{c_x^g}{c_{cx}^g}$	N	N
Translação em torno de Y	$D_y = \frac{c_y^g}{c_{cy}^g}$	N	N
Translação em torno de Z	$D_z = \frac{c_z^g}{c_{cz}^g}$	N	N
Rotação em torno de X	$D_{\theta_x} = \frac{c_{xx}^g}{c_{c_{xx}}^g}$	N	N
Rotação em torno de Y	$D_{\theta_y} = \frac{c_{yy}^g}{c_{c_{yy}}^g}$	N	N
Rotação em torno de Z	$D_{\theta_z} = \frac{c_{zz}^g}{c_{c_{zz}}^g}$	N	N

N–Não citado na norma.

## 6.10 FREQUÊNCIAS NATURAIS

Neste item são mostradas as expressões para determinação das frequências naturais da fundação sem a consideração de modos de vibração acoplados. São mostradas tabelas comparativas das normas em estudo, sem e com a consideração do amortecimento. Na Tabela 6.24 tem-se as expressões das frequências naturais sem a consideração do amortecimento, para cada grau de liberdade. As expressões mostradas são da teoria de dinâmica. A expressão apresentada pelo ACI 351.3R-04 é de forma genérica.

As normas recomendam na análise dinâmica verificar a razão entre a frequência natural do sistema fundação e máquina e a frequência de operação da máquina. A N-1848 estabelece que a frequência operacional deve ser mantida a uma distância de pelo menos 20% da frequência natural.

A DIN 4024 estabelece que a frequência natural da fundação deve ser inferior a 0,8 ou maior que 1,25 vezes a frequência de operação da máquina.

A norma 351.3R-04 não estabelece valores para a razão entre a frequência de operação e a frequência natural da fundação, mas cita que muitas companhias requerem que esses valores estejam distantes entre si entre 20% e 33%. Se estas frequências estão bem separadas não são necessárias mais avaliações dinâmicas.

Tabela 6.24: Frequências naturais sem considerar amortecimento.

Deslocamento	Frequências naturais $\omega_n$		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{M}}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$	N
Translação em Y	$\omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_y}{M}}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$	N
Translação em Z	$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{M}}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$	N
Rotação em torno de X	$\omega_{n\theta_x} = \sqrt{\frac{k_{\theta_x}}{I_x}}$	N	N
Rotação em torno de Y	$\omega_{n\theta_y} = \sqrt{\frac{k_{\theta_y}}{I_y}}$	N	N
Rotação em torno de Z	$\omega_{n\theta_z} = \sqrt{\frac{k_{\theta_z}}{I_z}}$	N	N

N–Não citado na norma.

Nessa tabela tem-se:



$I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  – momentos de massa do sistema em relação aos eixos ortogonais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  passando pelo centroide da área da base;

$M$  – massa do sistema máquina/fundação;

Nas Tabelas 6.25 e 6.26 as expressões de amortecimento crítico e fator de amortecimento são apresentadas. Estas expressões também são da teoria da dinâmica. As diferenças contidas na Tabela 25 são apenas de notação, sendo que o ACI 351.3R-04 e DIN-4024 apresentam somente uma expressão genérica. A DIN-4024 usa a letra  $c$  para a constante de mola em vez da letra  $k$ . Na Tabela 6.26 as expressões do fator de amortecimento apresentados na ACI 351.3R-04 foram obtidas por dedução e a expressão é apresentada de forma genérica.

Tabela 6.25: Amortecimento crítico

Deslocamento	Amortecimento crítico $c_c$		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$c_{cx} = 2\sqrt{k_x M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{k_i M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{c_i m}$
Translação em Y	$c_{cy} = 2\sqrt{k_y M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{k_i M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{c_i m}$
Translação em Z	$c_{cz} = 2\sqrt{k_z M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{k_i M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{c_i m}$
Rotação em torno de X	$c_{c\theta_x} = 2\sqrt{k_{\theta_x} M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{k_i M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{c_i m}$
Rotação em torno de Y	$c_{c\theta_y} = 2\sqrt{k_{\theta_y} M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{k_i M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{c_i m}$
Rotação em torno de Z	$c_{c\theta_z} = 2\sqrt{k_{\theta_z} M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{k_i M}$	$c_{ci} = 2\sqrt{c_i m}$

N–Não citado na norma.

Nessa tabela tem-se:

$c_{ci}$  – constante de amortecimento crítico para a direção  $i$ ;

$k_i$  – rigidez na direção  $i$ ;

$c_i$  – rigidez na direção  $i$ , na DIN-4024.

Tabela 6.26: Fator de amortecimento

Deslocamento	Fator de amortecimento crítico		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$D_x = \frac{c_x}{c_{cx}}$	$D_i = \frac{c_i}{c_{ci}}$	N
Translação em Y	$D_y = \frac{c_y}{c_{cy}}$	$D_i = \frac{c_i}{c_{ci}}$	N
Translação em Z	$D_z = \frac{c_z}{c_{cz}}$	$D_i = \frac{c_i}{c_{ci}}$	N
Rotação em torno de X	$D_{\theta_x} = \frac{c_{\theta_x}}{c_{c\theta_x}}$	$D_i = \frac{c_i}{c_{ci}}$	N
Rotação em torno de Y	$D_{\theta_y} = \frac{c_{\theta_y}}{c_{c\theta_y}}$	$D_i = \frac{c_i}{c_{ci}}$	N
Rotação em torno de Z	$D_{\theta_z} = \frac{c_{\theta_z}}{c_{c\theta_z}}$	$D_i = \frac{c_i}{c_{ci}}$	N

N–Não citado na norma.

Nas Tabelas 6.27, 6.28 são mostradas as expressões das frequências naturais considerando-se o amortecimento, porém, essas expressões são funções do amortecimento crítico e fator de amortecimento mostrados nas Tabelas 6.25 e 6.26. As normas ACI 351.3R-04 e DIN 4024 não apresentam estas expressões. No caso do ACI 351.3R-04 estas expressões estão contidas na expressão de amplitude de deslocamento.

Tabela 6.27: Frequências naturais amortecidas para força excitante constante.

Deslocamento	Considerando-se amplitude de força excitante $F_o$ constante		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$\omega_{dx} = \omega_{nx} \sqrt{1 - D_x^2}$	N	N
Translação em Y	$\omega_{dy} = \omega_{ny} \sqrt{1 - D_y^2}$	N	N
Translação em Z	$\omega_{dz} = \omega_{nz} \sqrt{1 - D_z^2}$	N	N
Rotação em torno de X	$\omega_{d\theta_x} = \omega_{n\theta_x} \sqrt{1 - D_{\theta_x}^2}$	N	N
Rotação em torno de Y	$\omega_{d\theta_y} = \omega_{n\theta_y} \sqrt{1 - D_{\theta_y}^2}$	N	N
Rotação em torno de Z	$\omega_{d\theta_z} = \omega_{n\theta_z} \sqrt{1 - D_{\theta_z}^2}$	N	N

N–Não citado na norma.

Tabela 6.28: Frequências naturais amortecidas para força excitante variável.

Deslocamento	Considerando-se amplitude de força excitante $F_o = m_o e \omega^2$		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
Translação em X	$\omega_{d_x} = \omega_{n_x} \sqrt{1 - 2D_x^2}$	N	N
Translação em Y	$\omega_{d_y} = \omega_{n_y} \sqrt{1 - 2D_y^2}$	N	N
Translação em Z	$\omega_{d_z} = \omega_{n_z} \sqrt{1 - 2D_z^2}$	N	N
Rotação em torno de X	$\omega_{d\theta_x} = \omega_{n\theta_x} \sqrt{1 - 2D_{\theta_x}^2}$	N	N
Rotação em torno de Y	$\omega_{d\theta_y} = \omega_{n\theta_y} \sqrt{1 - 2D_{\theta_y}^2}$	N	N
Rotação em torno de Z	$\omega_{d\theta_z} = \omega_{n\theta_z} \sqrt{1 - 2D_{\theta_z}^2}$	N	N

N–Não citado na norma.

Nessa tabela tem-se:

$m_o$  – massa do rotor;

$e$  – excentricidade da massa do rotor;

$\omega$  – velocidade angular excitante.

## 6.11 ACOPLAMENTO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

Segundo a N-1848 o acoplamento deve ser considerado sempre que os valores da expressão 6.7 que corresponde a direção  $X$  e expressão 6.8 que corresponde à direção  $Y$  forem superiores a dois terços da frequência excitante.

a) Na direção  $X$  :

$$\frac{\sqrt{f_{n_x}^2 + f_{n\theta_y}^2}}{f_{n_x} \times f_{n\theta_y}} > \frac{2}{3} f \quad (6.7)$$

b) Na direção  $Y$  :

$$\frac{\sqrt{f_{n_y}^2 + f_{n\theta_x}^2}}{f_{n_y} \times f_{n\theta_x}} > \frac{2}{3} f \quad (6.8)$$

onde  $f$  é a frequência excitante.

## 6.12 FREQUÊNCIAS NATURAIS ACOPLADAS

A Tabela 6.29 mostra as expressões das frequências angulares acopladas sem considerar o amortecimento, e a Tabela 6.30 mostra as expressões das frequências angulares acopladas considerando o amortecimento. A ACI 351.3R-04 e DIN-4024 não apresentam expressões de acoplamento de modos de vibração.

Tabela 6.29: Velocidades angulares naturais acopladas não considerando amortecimento.

Direção	Velocidade angulares acopladas não amortecidas		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
X	$\omega_{n_x \theta_y}^4 - \omega_{n_x \theta_y}^2 \left( \frac{\omega_{n_x}^2 + \omega_{n_{\theta y}}^2}{\varphi_y} \right) + \frac{\omega_{n_x}^2 \cdot \omega_{n_{\theta y}}^2}{\varphi_y} = 0$	$\omega_n^4 - \left[ \frac{K_{uu}}{M} + \frac{K_{\psi\psi}}{I_\psi} \right] \omega_n^2 + \frac{K_{uu} K_{\psi\psi} - K_{u\psi}^2}{MI_\psi} = 0$	N
Y	$\omega_{n_y \theta_x}^4 - \omega_{n_y \theta_x}^2 \left( \frac{\omega_{n_y}^2 + \omega_{n_{\theta x}}^2}{\varphi_x} \right) + \frac{\omega_{n_y}^2 \cdot \omega_{n_{\theta x}}^2}{\varphi_x} = 0$	$\omega_n^4 - \left[ \frac{K_{uu}}{M} + \frac{K_{\psi\psi}}{I_\psi} \right] \omega_n^2 + \frac{K_{uu} K_{\psi\psi} - K_{u\psi}^2}{MI_\psi} = 0$	N
Translação em Z	Não acopla	Não acopla	N
Rotação em torno de Z	Não acopla	Não acopla	N

N–Não citado na norma.

Na Tabela 6.29 tem-se:

$$\varphi_x = \frac{(I_x - ML^2)}{I_x} \quad (6.9)$$

$$\varphi_y = \frac{(I_y - ML^2)}{I_y} \quad (6.10)$$

sendo

$\varphi_x$  ,  $\varphi_y$  – razão entre os momentos de massa do sistema (fundação + máquina) tomados no centro de gravidade combinado e os respectivos momentos de massa tomados em relação ao centroide da área da base, em relação aos eixos  $X$  e  $Y$  ;

$L$  – é a distância da base ao centro de gravidade do sistema (fundação + máquina).

Tabela 6.30: Velocidades angulares naturais acopladas considerando amortecimento.

Direção	Velocidade angulares acopladas amortecidas		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
X	$\omega_{d_x \theta_y}^a{}^4 + \omega_{d_x \theta_y}^a{}^2 \left( \frac{\omega_{d_x}^2 + \omega_{d_{\theta_y}}^2}{\varphi_y} \right) + \frac{\omega_{d_x}^2 \cdot \omega_{d_{\theta_y}}^2}{\varphi_y} = 0$	N	N
Y	$\omega_{d_y \theta_x}^a{}^4 + \omega_{d_y \theta_x}^a{}^2 \left( \frac{\omega_{d_y}^2 + \omega_{d_{\theta_x}}^2}{\varphi_x} \right) + \frac{\omega_{d_y}^2 \cdot \omega_{d_{\theta_x}}^2}{\varphi_x} = 0$	N	N
Translação em Z	Não acopla	Não acopla	N
Rotação em torno de Z	Não acopla	Não acopla	N

N–Não citado na norma.

Na Tabela 6.30 tem-se:

$\omega_n$  – frequência natural do sistema;

$I_{\psi}$  – momento de massa de inércia do sistema ao redor do centro de gravidade;

$M$  – massa do sistema máquina-fundação;

$K_{uu}$  – constante de mola horizontal;

$K_{u\psi}$  – constante de mola acoplada;

$K_{\psi\psi}$  – constante de mola de rotação.

### 6.13 AMPLITUDES DE OSCILAÇÃO

Neste item comparam-se as amplitudes de oscilação do centro de gravidade do sistema fundação-máquina. Na Tabela 6.31 são mostradas as expressões de amplitudes de oscilação admitindo-se a teoria da constante de mola sem peso. A ACI 351.3R-04 e DIN-4024 não usam a teoria da constante de mola sem peso. Por esse motivo a Tabela 6.31 tem somente expressões da N-1848.

Na Tabela 6.32 são comparadas as amplitudes de oscilação pela teoria elástica do semiespaço. A ACI 351.3R-04 apresenta a expressão equivalente à oscilação vertical não apresentando os demais graus de liberdade. A DIN-4024 não apresenta na norma expressões de amplitude.



Tabela 6.31: Amplitude de oscilação pela teoria da constante de mola sem peso

Deslocamento	Amplitude de oscilação		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
Translação em X	$A_x = \frac{[C_\tau A_f L^2 + C_\theta J_y - MgL - (l_y - ML^2)\omega^2]F_x + (C_\tau A_f L)M_y}{\Delta_x(\omega^2)}$	N	N
Translação em Y	$A_y = \frac{[C_\tau A_f L^2 + C_\theta J_x - MgL - (l_x - ML^2)\omega^2]F_y + (C_\tau A_f L)M_x}{\Delta_y(\omega^2)}$	N	N
Translação em Z	$A_z = \frac{F_z}{M(\omega_{nz}^2 - \omega^2)}$	N	N
Rotação em torno de X	$A_{\theta_x} = \frac{(C_\tau A_f L)F_y + (C_\tau A_f - M\omega^2)M_x}{\Delta_y(\omega^2)}$	N	N
Rotação em torno de Y	$A_{\theta_y} = \frac{(C_\tau A_f L)F_x + (C_\tau A_f - M\omega^2)M_y}{\Delta_x(\omega^2)}$	N	N
Rotação em torno de Z	$A_{\theta_z} = \frac{M_z}{I_z(\omega_{n\theta_z}^2 - \omega^2)}$	N	N

N–Não citado na norma.

Na Tabela 6.31 tem-se:

$F_x$ ,  $F_y$  – amplitude da força excitante segundo os eixos  $X$  e  $Y$ ;

$M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  – amplitude do momento resultante excitante em torno do eixo  $X$ ,  $Y$

e  $Z$ ;

$J_x$ ,  $J_y$  – momentos de inércia da área da base em relação aos eixos  $X$  e  $Y$ ;

$$\Delta_x \omega^2 \text{ é dado por: } \Delta_x \omega^2 = M(I_y - ML^2) \left( \omega_{n_x \theta_y}^{a1}{}^2 - \omega^2 \right) \left( \omega_{n_x \theta_y}^{a2}{}^2 - \omega^2 \right).$$

$$\Delta_y \omega^2 \text{ é dado por: } \Delta_y \omega^2 = M(I_x - ML^2) \left( \omega_{n_y \theta_x}^{a1}{}^2 - \omega^2 \right) \left( \omega_{n_y \theta_x}^{a2}{}^2 - \omega^2 \right).$$

Tabela 6.32: Amplitude de oscilação pela teoria elástica do semi espaço.

Deslocamento	Amplitude de oscilação		
	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN 4024
Translação em X	$A_x = \frac{M_y}{I_y - ML^2} \frac{\left[ (\omega_{nx}^2)^2 + (2D_x \omega_{nx})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_x \omega^2}$ $A_x = \frac{F_x}{MI_y'} \frac{\left[ (-I_y' \omega^2 + k_{\theta_y} + L^2 k_x)^2 + 4\omega^2 (D_{\theta_y} \sqrt{k_{\theta_y} I_y} + L^2 D_x \sqrt{k_x M})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_x \omega^2}$	N	N
Translação em Y	$A_y = \frac{M_x}{I_x - ML^2} \frac{\left[ (\omega_{ny}^2)^2 + (2D_y \omega_{ny})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_y \omega^2}$ $A_y = \frac{F_y}{MI_x'} \frac{\left[ (-I_x' \omega^2 + k_{\theta_x} + L^2 k_y)^2 + 4\omega^2 (D_{\theta_x} \sqrt{k_{\theta_x} I_x} + L^2 D_y \sqrt{k_y M})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_y \omega^2}$	N	N
Translação em Z	$A_z = \frac{F_z}{k_z \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right]^2 + \left( 2D_z \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$	$A = \frac{F_o}{k \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_o}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\beta \frac{\omega_o}{\omega_{nz}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$	N
Rotação em torno de X	$A_{\theta_x} = \frac{M_x}{I_x - ML^2} \frac{\left[ (\omega_{ny}^2 - \omega^2)^2 + (2D_y \omega_{ny} \omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_y \omega^2}$	N	N

	$A_{\theta_x} = \frac{F_y}{I_x - ML^2} \frac{\omega_{n_y} (\omega_{n_y}^2 + 4D_y \omega^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_y \omega^2}$		
Rotação em torno de Y	$A_{\theta_y} = \frac{M_y}{I_y - ML^2} \frac{\left[ (\omega_{n_x}^2 - \omega^2)^2 + (2D_x \omega_{n_x} \omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_x \omega^2}$ $A_{\theta_y} = \frac{F_x}{I_y - ML^2} \frac{\omega_{n_x} (\omega_{n_x}^2 + 4D_x \omega^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_x \omega^2}$	N	N
Rotação em torno de Z	$A_{\theta_z} = \frac{M_z}{k_{\theta_z} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{n\theta z}} \right)^2 \right]^2 + \left( 2D_z \frac{\omega}{\omega_{n\theta z}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$	N	N

N–Não citado na norma.

Sendo:

$$\Delta_x \omega^2 = \left\{ \left[ \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{\omega_{n\theta y}^2 + \omega_{n x}^2}{\varphi_y} - \frac{4D_x D_{\theta y} \omega_{nx} \omega_{n\theta y}}{\varphi_y} \right) + \frac{\omega_{n x}^2 \omega_{n\theta y}^2}{\varphi_y} \right]^2 + 4 \left[ \frac{D_x \omega_{n x} \omega}{\varphi_y} (\omega_{n\theta y}^2 - \omega^2) + \frac{D_{\theta y} \omega_{n\theta y} \omega}{\varphi_y} (\omega_{n x}^2 - \omega^2) \right]^2 \right\} \quad (6.11)$$

$$\Delta_y \omega^2 = \left\{ \left[ \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{\omega_{n\theta x}^2 + \omega_{n y}^2}{\varphi_x} - \frac{4D_y D_{\theta x} \omega_{ny} \omega_{n\theta x}}{\varphi_x} \right) + \frac{\omega_{n y}^2 \omega_{n\theta x}^2}{\varphi_x} \right]^2 + 4 \left[ \frac{D_y \omega_{n y} \omega}{\varphi_x} (\omega_{n\theta x}^2 - \omega^2) + \frac{D_{\theta x} \omega_{n\theta x} \omega}{\varphi_x} (\omega_{n y}^2 - \omega^2) \right]^2 \right\} \quad (6.12)$$

#### 6.14 VELOCIDADES EFETIVAS

Dadas as amplitudes de oscilação obtém-se as componentes de velocidades máximas de vibração com as expressões da Tabela 6.33, e com o uso das expressões da Tabela 6.34 obtém-se as velocidades eficazes. Essas expressões não são apresentadas na ACI 351.3R-04 e na DIN-4024. Tratam-se de expressões básicas da teoria da dinâmica, por esse motivo somente as expressões existente na N-1848 constam das tabelas citadas. O atendimento às amplitudes de oscilação e velocidades de vibração recomendadas nas normas específicas faz-se necessário para garantir a integridade da máquina e da fundação mas principalmente para preservar a saúde das pessoas que trabalham nas proximidades da máquina.

Tabela 6.33: Velocidades máximas.

Direção	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
X	$V_{px} = \omega A_{px}$	N	N
Y	$V_{py} = \omega A_{py}$	N	N
Z	$V_{pz} = \omega A_{pz}$	N	N

N–Não citado na norma.

Tabela 6.34: Velocidades efetivas

Direção	N-1848	ACI 351-3R-04	DIN-4024
X	$V_{efx} = \frac{\omega A_{px}}{\sqrt{2}} = \frac{V_{px}}{\sqrt{2}}$	N	N
Y	$V_{efy} = \frac{\omega A_{py}}{\sqrt{2}} = \frac{V_{py}}{\sqrt{2}}$	N	N
Z	$V_{efz} = \frac{\omega A_{pz}}{\sqrt{2}} = \frac{V_{pz}}{\sqrt{2}}$	N	N

N–Não citado na norma.

Sendo:

$A_{px}$ ,  $A_{py}$  e  $A_{pz}$  – amplitudes de oscilação de um ponto P nas direções X, Y e Z ;

$V_{px}$ ,  $V_{py}$  e  $V_{pz}$  – velocidades máximas de um ponto P nas direções X, Y e Z ;

$V_{efx}$ ,  $V_{efy}$  e  $V_{efz}$  – velocidades eficazes de um ponto P nas direções X, Y e Z ;

Nota: as velocidades efetivas devem satisfazer os limites estabelecidos na Tabela 6.9.

## 6.15 OUTROS REQUISITOS GERAIS DE PROJETO

A N-1848 apresenta requisitos gerais de projeto que devem ser seguidos durante a elaboração do dimensionamento das fundações de máquinas. A ACI 351.3R-04 cita alguns destes requisitos denominando-os como “regras de ouro” e que alguns engenheiros adotam para fundações que suportam máquinas relativamente pequenas, até 2,2 KN de peso. As Tabelas 6.35, 6.36 e 6.37 mostram estes requisitos gerais de projeto.

Tabela 6.35: Requisitos gerais de projeto - Fundações superficiais

Fundações superficiais			
Item	N-1848	ACI 351.3R-04	DIN-4024
a) A base deve ser ajustada para que o centroide da área de contato com o solo e o centro de gravidade do conjunto fundação + máquina estejam na mesma vertical. A distância em planta entre os 2 pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da base, deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.	S	S	N
b) A tensão no solo devida às cargas estáticas deve ser no máximo, igual a 50 % da tensão admissível do terreno. A soma das tensões devidas aos efeitos estático e dinâmico não deve exceder 75 % da tensão admissível do terreno.	S	S (1)	N
c) A base deve ter uma espessura mínima de 0,6 m, não deve ser menor que 1/5 da menor dimensão e 1/10 da maior dimensão da base.	S	S	N
d) Deve-se adotar uma razão 'massa da fundação / massa da maquinaria' maior que 3 para máquinas rotativas, e de 5 a 10 para máquinas alternativas.	S	S (2)	N
e) Deve-se manter um espaço ao redor da máquina de no mínimo 0,30 m para manutenção e outras atividades.	S	N (3)	N
f) Deve-se evitar dispor a base em terreno com lençol freático elevado, pois em solos saturados ocorre a amplificação das vibrações. Deve-se atentar principalmente para o efeito de vibrações em solos saturados arenosos.	S	N	N
g) A fundação não deve ser assentada em solo de aterro.	S	N	N
h) A dimensão da base na direção de rotação deve ser pelo menos 1,5 vezes maior que a distância vertical entre a linha de centro da máquina e a base.	S	S	N
i) Para fundações vizinhas de mesma característica, a cota de assentamento da fundação vibrante deve estar afastada e abaixo da não vibrante obedecendo, no mínimo, à relação de 1:3 (Vertical:Horizontal).	S	S (4)	N

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.

Notas:

- (1) O ACI cita que em qualquer caso a fundação é dimensionada para que a pressão de suporte da fundação não exceda a capacidade de suporte do solo;
- (2) O ACI não limita a razão ‘massa da fundação / massa da maquinaria’ no limite superior de 10 para máquinas alternativas e sim que seja maior que 5;
- (3) O ACI cita que todo engenheiro deve proporcionar área suficiente para manutenção da máquina;
- (4) O ACI cita que o projetista pode necessitar prover isolamento ou separação da fundação da máquina das fundações ou radier de edifícios. Separações na direção vertical também podem ser apropriadas. Normalmente fundações carregadas dinamicamente não são colocadas sobre fundações de edifícios ou em locais que os efeitos dinâmicos possam transferir para as fundações de edifícios.

Tabela 6.36: Requisitos gerais de projeto - Fundações profundas

Fundações profundas			
Item	N-1848	ACI 351.3R-04	DIN-4024
a) Recomenda-se a seguinte razão $s/d > 5$ , sendo $s$ é o espaçamento entre estacas (eixo a eixo) e $d$ o diâmetro da estaca.	S	N (1)	N
b) A carga estática em cada estaca deve estar limitada a 50 % de sua carga admissível.	S	N	N
c) Para máquina rotativa, o bloco de coroamento deve ter uma massa de cerca de 1,5 vezes a 2,5 vezes a massa da máquina. Para máquinas alternativas, esta relação deve ser de 2,5 vezes a 4 vezes.	S	N	N
d) Deve-se garantir uma boa ancoragem entre as estacas e o bloco de coroamento. Como requisito mínimo, deve-se adotar 60 cm de penetração para a armadura da estaca no bloco e 30 cm de embutimento para estacas metálicas.	S	S	N
e) A base deve ser ajustada para que o centroide da área de contato com o solo e o centro de gravidade do conjunto fundação + máquina estejam na mesma vertical. A distância em planta entre os dois pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da base, deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.	S	S	N

N–Não citado na norma.

S–Sim, citado na norma.



Notas:

(1) O ACI considera efeito de grupo de estacas não considerado na N-1848.

Tabela 6.37: Requisitos gerais de projeto – Fundações para máquinas elevadas

Fundações para máquinas elevadas			
Item	N-1848	ACI 351.3R-04	DIN-4024
a) A espessura da laje de fundação não deve ser menor que $0,11 \cdot L^{4/3}$ , onde L (em metros) é a média de dois vãos adjacentes entre colunas.	S	N	N
b) A carga estática nas colunas deve ser, no máximo, igual a 1/6 da sua máxima carga admissível e a tensão média de compressão deve ser aproximadamente a mesma para todas as colunas.	S	N	N
c) O espaçamento máximo entre as colunas deve ser de 3,5m .	S	N	N
d) A altura das vigas deve ser maior que 1/5 do vão livre. A flecha devida ao carregamento estático não deve exceder 0,5mm .	S	N	N
e) A rigidez à flexão das vigas deve ser no mínimo, duas vezes superior à das colunas	S	N	N
f) Para máquinas rotativas, a massa total da estrutura deve ser, no mínimo, igual a 3 vezes a massa suportada pela máquina. Esta relação deve ser de 5 para máquinas alternativas.	S	N (1)	N
g) A massa da laje do topo não deve ser menor que a da máquina.	S	N	N
h) O centroide das colunas deve coincidir com o centro de gravidade (em planta) do equipamento mais a metade superior da estrutura. A distância em planta entre os 2 pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da laje da fundação deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.	S	S	N
i) A flecha horizontal das colunas, devida aos carregamentos dinâmicos, não deve ultrapassar 0,5mm em qualquer caso.	S	N	N
j) Deve ser feita a verificação das colunas e vigas do pórtico para evitar a possibilidade de ressonância isolada dos membros constitutivos da estrutura.	S	N	N
j) Deve ser feita a verificação das colunas e vigas do pórtico para evitar a possibilidade de ressonância isolada dos membros constitutivos da estrutura.	S	S	N

N–Não citado na norma. S–Sim, citado na norma.

## 7 ESTUDO DE CASO

Nesse capítulo apresenta-se um exemplo de cálculo de fundações e compara-se a solução empregando-se as normas em estudo. A primeira solução considerada é uma fundação direta para uma bomba utilizada na indústria petroquímica. A segunda solução considerada é uma fundação sobre estacas para a mesma bomba, de modo a permitir comparações entre as duas soluções. A solução inicial é analítica; em seguida o resultado é obtido por meio do cálculo efetuado pelo Método dos Elementos Finitos utilizando-se o programa computacional SAP 2000.

### 7.1 FUNDAÇÃO DIRETA

Nesse exemplo será mostrado o cálculo da fundação direta de uma bomba utilizada na indústria petroquímica.

#### 7.1.1 Parâmetros da máquina

Os parâmetros adotados foram:

- fabricante KSB Bombas Hidráulicas S.A.;
- modelo 8x10x23 B-1 HOL;
- acionador WEG HGF
- velocidade angular da bomba  $\omega_{máq} = 1784 \text{ rpm}$  ;
- energia de acionamento 368 kW ;
- comprimento 4700 mm ;
- largura 2760 mm ;
- altura 1864 mm ;
- massa da bomba 1538 kg ;
- massa do motor 3010 kg ;

- massa da base 2760 kg ;
- massa do acoplamento 30 kg ;
- massa total da máquina 7338 kg ;
- solicitações nos chumbadores:
  - força estática 5,99 kN ;
  - força dinâmica 0,75 kN ;
  - momento estático 0,26 kN.m ;
  - momento dinâmico 0,32 kN.m .

A Figura 7.1 e a Tabela 7.1 mostram as forças e momentos conforme apêndice f.1.2 da API 610, 8ª edição:

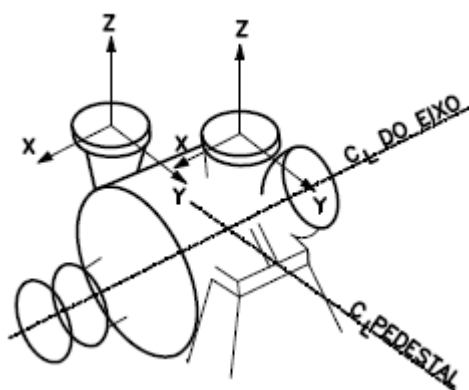


Figura 7.1: Esquema de forças e momentos conforme apêndice f.1.2 da API 610.

Tabela 7.1: Forças e momentos conforme API610

		Sucção DN1=10"	Descarga DN2=8"
Forças N	Fx	5340	3780
	Fy	4450	3110
	Fz	6670	4890
	Fr	9630	6920
Momentos Nm	Mx	5020	3530
	My	2440	1760
	Mz	3800	2580
	Mr	6750	4710

As Figuras 7.2 e 7.3 mostram as vistas lateral e frontal do conjunto motor e bomba com suas principais dimensões.





$$- T = \frac{1}{f_{máq}};$$

$$- T = 0,034 \text{ s}.$$

#### 7.1.4 Classificação da máquina

Em função dos dados de projeto a máquina é classificada da seguinte forma:

- máquina classe III, N-1848, pg 44;
- velocidade efetiva deverá ser  $\leq 4,5 \text{ mm/s}$  pela N-1848 e DIN 2056;
- amplitude de deslocamento deverá ser:
  - $\leq 30 \mu\text{m}$  pela NBR 10082;
  - $\leq 30 \mu\text{m}$  pela DIN 2056;
  - $\leq 30 \mu\text{m}$  pela ACI 351.

#### 7.1.5 Dados da base de concreto

As dimensões da fundação foram determinadas acrescentando-se  $29,2 \text{ cm}$  à largura e  $40,4 \text{ cm}$  ao comprimento da base do conjunto motor e bomba (Figura 7.4) e, considerando-se a espessura de laje igual a  $80 \text{ cm}$ , ou seja, maior que o mínimo recomendado pela N-1848 (2011). A base da bomba deverá se apoiar diretamente sobre o bloco da fundação, então as dimensões iniciais estabelecidas para a fundação são:

- comprimento da base  $B = 5,10 \text{ m}$ ;
- largura da base  $L = 3,25 \text{ m}$ ;
- altura da base  $H = 0,80 \text{ m}$ ;
- módulo de elasticidade do concreto  $E_c = 30,6725 \text{ GPa}$ ;
- coeficiente de Poisson do concreto  $\nu = 0,2$ ;
- peso específico do concreto  $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$ .

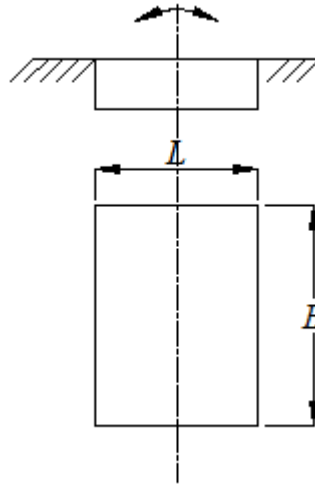


Figura 7.4: Esquema simplificado da base da fundação.

### 7.1.6 Dados do solo

Os dados geotécnicos para o projeto são:

- número de golpes obtido do ensaio de SPT  $N_{SPT} = 7$  ;
- módulo de elasticidade transversal do solo  $G_s = 12.000 \cdot N_{SPT}^{0,8} \text{ kPa}$   
 $G_s = 5,692 \times 10^4 \text{ kPa}$  ;
- coeficiente de Poisson do solo  $\nu = 0,4$  ;
- peso específico do solo  $\gamma_s = 17,65 \text{ kN} / \text{m}^3$  .

### 7.1.7 Massa total do sistema

O cálculo da massa total do sistema é efetuado considerando-se as massas da base e da máquina, assim:

$$M_{base} = B \times L \times H \times \rho_c = 33174 \text{ kg}$$

$$M_{total} = M_{máq} + M_{base}$$

$$M_{total} = 40512 \text{ kg}$$

$$\frac{M_{base}}{M_{máq}} = 4,524 \geq 3$$

Essa razão está de acordo para máquinas rotativas.

### 7.1.8 Raios equivalentes

Os raios equivalentes são obtidos com o uso das expressões apresentadas, então:

$$\begin{aligned}
 r_x &= \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}} & r_x &= 2,3 \text{ m} \\
 r_y &= r_x & r_y &= 2,3 \text{ m} \\
 r_z &= r_x & r_z &= 2,3 \text{ m} \\
 r_{\theta_x} &= \sqrt[4]{\frac{B \cdot L^3}{3\pi}} & r_{\theta_x} &= 2,08 \text{ m} \\
 r_{\theta_y} &= \sqrt[4]{\frac{B^3 \cdot L}{3\pi}} & r_{\theta_y} &= 2,6 \text{ m} \\
 r_{\theta_z} &= \sqrt[4]{\frac{B \cdot L(B^2 + L^2)}{6\pi}} & r_{\theta_z} &= 2,38 \text{ m}
 \end{aligned}$$

### 7.1.9 Momentos de inércia de massa

Utilizando-se as expressões apresentadas seguem-se para os momentos de inércia de massa:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{M_{total}}{12} \cdot (L^2 + H^2) & I_x &= 3,101 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 I_y &= \frac{M_{total}}{12} \cdot (B^2 + L^2) & I_y &= 1,013 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 I_z &= \frac{M_{total}}{12} \cdot (B^2 + H^2) & I_z &= 7,379 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$

### 7.1.10 Constantes de mola

As constantes de mola do sistema são:

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{32(1-\nu_s) \cdot G_s \cdot r_x}{7-8\nu_s} & k_x &= 6,61 \times 10^5 \text{ kN/m} \\
 k_y &= \frac{32(1-\nu_s) \cdot G_s \cdot r_y}{7-8\nu_s} & k_y &= 6,61 \times 10^5 \text{ kN/m} \\
 k_z &= \frac{4 \cdot G_s \cdot r_z}{1-\nu_s} & k_z &= 8,722 \times 10^5 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$



$$k_{\theta_x} = \frac{8 \cdot G_s \cdot r_{\theta_x}^3}{3 \cdot (1 - \nu_s)} \quad k_{\theta_x} = 2,268 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{rad}$$

$$k_{\theta_y} = \frac{8 \cdot G_s \cdot r_{\theta_y}^3}{3 \cdot (1 - \nu_s)} \quad k_{\theta_y} = 4,459 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{rad}$$

$$k_{\theta_z} = \frac{16 \cdot G_s \cdot r_{\theta_z}^3}{3} \quad k_{\theta_z} = 4,108 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{rad}$$

### 7.1.11 Razões de massa

As razões de massa ficam determinadas por:

$$B_x = \frac{7 - 8\nu_s}{32 \cdot (1 - \nu_s)} \cdot \frac{M_{total}}{\rho_s \cdot r_x^3} \quad B_x = 0,367$$

$$B_y = \frac{7 - 8\nu_s}{32 \cdot (1 - \nu_s)} \cdot \frac{M_{total}}{\rho_s \cdot r_y^3} \quad B_y = 0,367$$

$$B_z = \frac{(1 - \nu_s)}{4} \cdot \frac{M_{total}}{\rho_s \cdot r_z^3} \quad B_z = 0,278$$

$$B_{\theta_x} = \frac{3(1 - \nu_s)}{8} \cdot \frac{I_x}{\rho_s \cdot r_{\theta_x}^5} \quad B_{\theta_x} = 0,1$$

$$B_{\theta_y} = \frac{3(1 - \nu_s)}{8} \cdot \frac{I_y}{\rho_s \cdot r_{\theta_y}^5} \quad B_{\theta_y} = 0,106$$

$$B_{\theta_z} = \frac{I_z}{\rho_s \cdot r_{\theta_z}^5} \quad B_{\theta_z} = 0,533$$

### 7.1.12 Fatores de amortecimento

Com as expressões apresentadas os fatores de amortecimento são:

$$D_x = \frac{0,2875}{\sqrt{B_x}} \quad D_x = 0,475$$

$$D_y = \frac{0,2875}{\sqrt{B_y}} \quad D_y = 0,475$$

$$D_z = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}} \quad D_z = 0,806$$

$$D_{\theta_x} = \frac{0,15}{(1 + B_{\theta_x}) \cdot \sqrt{B_{\theta_x}}} \quad D_{\theta_x} = 0,431$$

$$D_{\theta_y} = \frac{0,15}{(1 + B_{\theta_y}) \cdot \sqrt{B_{\theta_y}}} \quad D_{\theta_y} = 0,417$$

$$D_{\theta_z} = \frac{0,5}{(1 + B_{\theta_z})} \quad D_{\theta_z} = 0,242$$

### 7.1.13 Constantes de amortecimento

Com os valores calculados anteriormente obtém-se as constantes de amortecimento:

$$C_x = 2 \cdot D_x \cdot \sqrt{k_x \cdot M_{total}} \quad C_x = 4,913 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \frac{s}{m}$$

$$C_y = 2 \cdot D_y \cdot \sqrt{k_y \cdot M_{total}} \quad C_y = 4,913 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \frac{s}{m}$$

$$C_z = 2 \cdot D_z \cdot \sqrt{k_z \cdot M_{total}} \quad C_z = 9,583 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \frac{s}{m}$$

### 7.1.14 Frequências naturais para 1GL

Obtém-se então as frequências naturais nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  para se comparar com a frequência de operação da máquina e verificar se há risco de ressonância para o sistema, e como pode ser verificado na Figura 7.5 este risco não existe, seguindo-se:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{M_{total}}} \quad \omega_x = 127,74 \frac{rad}{s} \quad f_x = \frac{\omega_x}{2\pi} \quad f_x = 20,33 \text{ Hz}$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{M_{total}}} \quad \omega_y = 127,74 \frac{rad}{s} \quad f_y = \frac{\omega_y}{2\pi} \quad f_y = 20,33 \text{ Hz}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{M_{total}}} \quad \omega_z = 146,73 \frac{rad}{s} \quad f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} \quad f_z = 23,35 \text{ Hz}$$

$$f_{máq} = 29,73 \text{ Hz}$$

A Tabela 7.2 mostra as faixas de frequência com risco de ressonância de acordo com as normas em estudo. A frequência do conjunto máquina e fundação não deve estar dentro destas faixas exceto no caso da ACI que cita uma faixa de frequência utilizada pelas companhias que varia de 67% a 80% e 120 a 133% do valor da frequência operacional.

Tabela 7.2: Faixas de frequência com risco de ressonância.

Direção	Frequência Natural Hz $f_n$	N-1848		ACI 351-3R-04		DIN-4024		Atende?
		$0,8 \times f_n$	$1,2 \times f_n$	$0,67 \times f_n$	$1,33 \times f_n$	$0,8 \times f_n$	$1,25 \times f_n$	
X	20,33	16,26	24,4	13,62	27,04	16,26	25,41	Sim
Y	20,33	16,26	24,4	13,62	27,04	16,26	25,41	Sim
Z	23,35	18,68	28,02	15,65	31,06	18,68	29,19	Sim

### 7.1.15 Fator de amplificação dinâmico

O fator de amplificação dinâmico é obtido pelas expressões a seguir e pode ser visualizado no gráfico da Figura 7.5:

$$\beta_z = \frac{f_{máq}}{f_z} \qquad \beta_z = 1,273$$

$$\xi_z = D_z$$

$$D_1(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot \xi_z \cdot \beta)^2}}$$

$$D_1(\beta_z) = 0,466$$

$$D_{zz} = D_1(\beta_z)$$

$$D_{zz} = 0,466$$

#### Varição do fator de amplificação

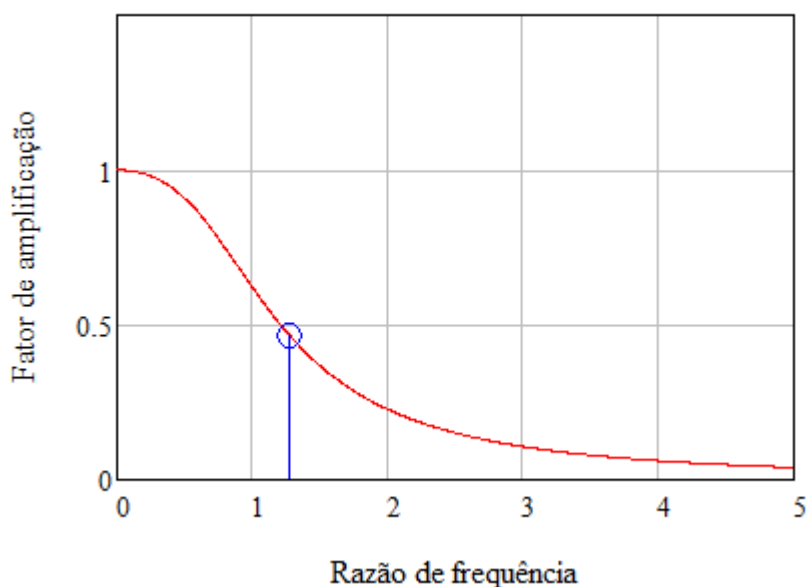


Figura 7.5: Gráfico da variação do fator de amplificação

### 7.1.16 Amplitude máxima dinâmica

A amplitude máxima dinâmica pode ser então calculada pela expressão:

$$U_{din z} = D_{zz} \frac{F_o}{k_z} \qquad U_{din z} = 4,81 \mu m$$

$$U_{din z} \leq 30 \mu m$$

Nesse caso atende à DIN-4024 (1991), à N-1848(2011) e à ACI-351(2004).

### 7.1.17 Máxima velocidade efetiva

Com o valor da amplitude máxima dinâmica calculada no item anterior obtém-se a máxima velocidade e a velocidade efetiva:

$$V_{máx z} = (2\pi \cdot f_{máq}) U_{din z} \qquad V_{máx z} = 0,898 \text{ mm / s}$$

$$V_{ef z} = \frac{(2\pi \cdot f_{máq}) U_{din z}}{\sqrt{2}} \qquad V_{ef z} = 0,64 \text{ mm / s}$$

$$V_{ef z} \leq 4,5 \text{ mm / s}$$

Nesse caso a N-1848(2011) é atendida, cujo valor máximo permissível para a classe III, faixa de severidade A é  $1,8 \text{ mm / s}$  ou faixa de severidade B que é  $4,5 \text{ mm / s}$ .

## 7.2 SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM USO DO SAP2000

Nesse item serão mostrados os resultados obtidos utilizando-se o SAP2000. A Figura 7.6 representa o bloco de fundação do conjunto motor e bomba, mantendo-se as mesmas dimensões adotadas na solução analítica (item 7.1). O motor e a bomba estão representados por suas respectivas massas. O bloco está apoiado no solo representado pelos amortecedores, que contêm tanto as constantes de rigidez do solo como também seus coeficientes de amortecimento (calculados no item 7.1).

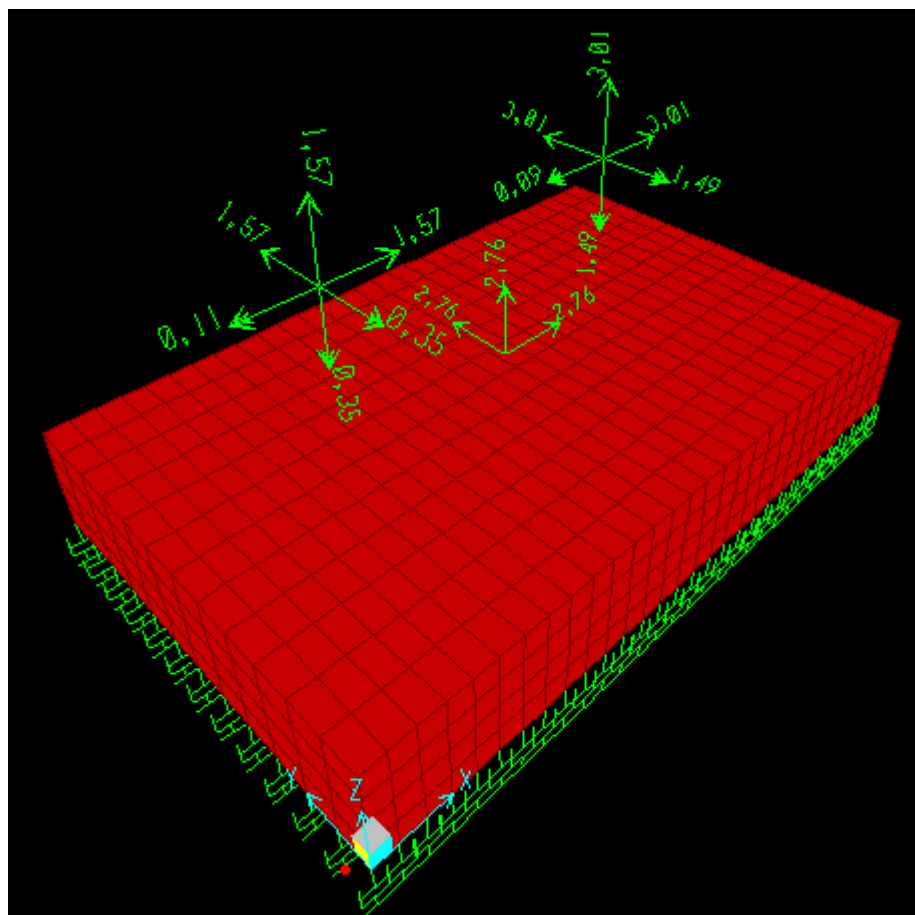


Figura 7.6: Modelo adotado para o bloco de fundação, motor e bomba.

Na Tabela 7.3 são mostrados os valores de frequência obtidos para os 20 modos de vibração definidos e calculados usando-se o SAP2000.

Tabela 7.3: Modo, período e frequência do sistema fundação e máquina.

Modo	Período	Frequência	Frequência circular	Frequência circular
	s	Hz	rad/s	(rad/sec) <sup>2</sup>
1	0,064936	15,4	96,759	9362,3
2	0,060416	16,552	104	10816
3	0,04923	20,313	127,63	16289
4	0,040026	24,984	156,98	24642
5	0,039999	25,001	157,09	24676
6	0,033363	29,973	188,33	35467
7	0,004935	202,65	1273,3	1621200
8	0,004174	239,55	1505,2	2265500
9	0,003831	261,05	1640,2	2690400
10	0,003466	288,55	1813	3287000
11	0,003202	312,3	1962,2	3850400
12	0,003176	314,85	1978,3	3913500
13	0,002875	347,79	2185,2	4775200
14	0,00278	359,7	2260,1	5107900
15	0,002693	371,3	2332,9	5442500
16	0,002507	398,91	2506,4	6282100
17	0,002362	423,4	2660,3	7077100
18	0,00229	436,73	2744	7529800
19	0,002106	474,84	2983,5	8901400
20	0,002059	485,78	3052,3	9316300

A Figura 7.7 mostra o gráfico de amplitudes de oscilação calculado usando-se SAP2000. Os pontos são escolhidos no modelo da fundação de modo a se obter os deslocamentos máximos e mínimos. Observa-se à direita do gráfico que os valores máximos de deslocamento (em m) podem ser visualizados nessa tela junto com a legenda de cores indicativas das curvas, sendo que cada curva representa um ponto escolhido no modelo. A direção estudada nesse exemplo é a vertical, ou eixo Z, porém, o programa fornece resultados para os eixos das direções X, Y e Z.

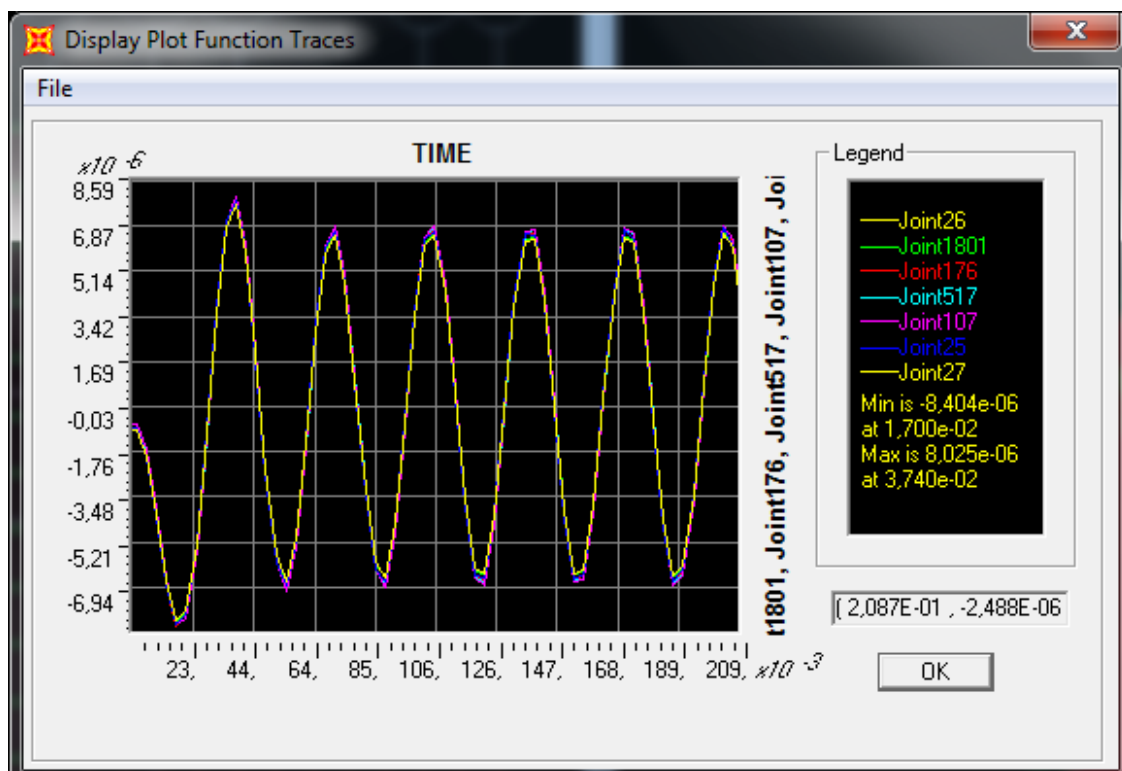


Figura 7.7: Gráfico do SAP2000 que mostra a amplitude de oscilação.

O gráfico apresentado na Figura 7.8 mostra a velocidade efetiva em m/s, vibração da fundação, dos mesmos pontos escolhidos e mostrados na Figura 7.7. Aqui também a direção estudada é a do eixo Z.

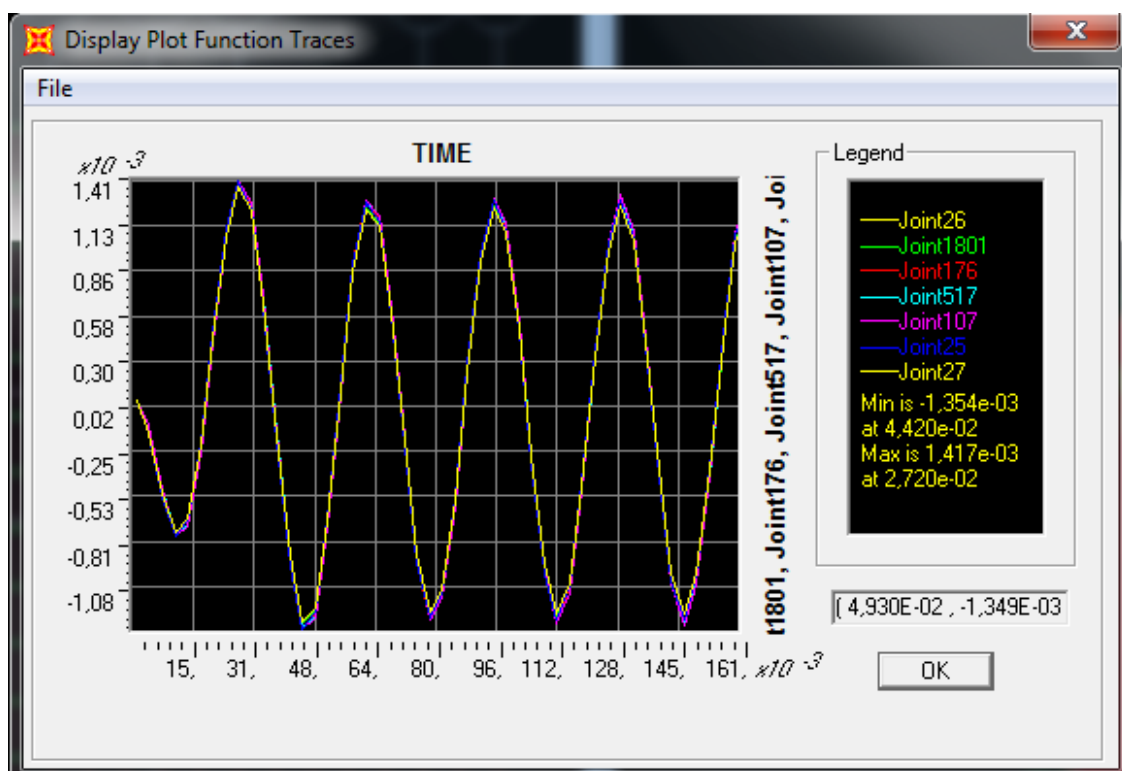


Figura 7.8: Gráfico do SAP2000 que mostra a velocidade eficaz.

Pode-se agora comparar os resultados obtidos pelo método analítico utilizando-se à N-1848 da Petrobras, com os resultados obtidos por meio do SAP2000. A Tabela 7.4 mostra esses resultados.

Tabela 7.4: Resultados comparativos entre solução analítica e SAP2000.

<b>Procedimento</b>	<b>Amplitude de oscilação <math>\mu\text{m}</math></b>	<b>Velocidade efetiva <math>\text{mm/s}</math></b>
<b>Analítico</b>	<b>4,81</b>	<b>0,898</b>
<b>SAP2000</b>	<b>8,4</b>	<b>1,35</b>
<b>Variação (%)</b>	<b>74,6</b>	<b>50,0</b>

Observa-se que os resultados obtidos apresentam diferenças de  $3,59 \mu\text{mm}$  na amplitude de oscilação e  $0,45 \text{ mm/s}$  na velocidade efetiva. Em ambos os casos o procedimento analítico apresentou resultados inferiores aos resultados do SAP2000. Os valores encontrados tanto pelo procedimento analítico quanto pelo SAP2000 atendem ao deslocamento permissível, que nesse caso é de  $30 \mu\text{m}$ , valor recomendado pelas normas e a velocidade de deslocamento (vibração) encontrada tanto pela solução analítica quanto por meio do SAP2000 estão bem abaixo do limite aceitável pela N-1848, faixa de severidade B, que é de  $4,5 \text{ mm/s}$ . A Figura 7.9 compara-se de forma gráfica os resultados obtidos no cálculo analítico usando-se a N-1848 e através do método dos elementos finitos usando-se o SAP2000.



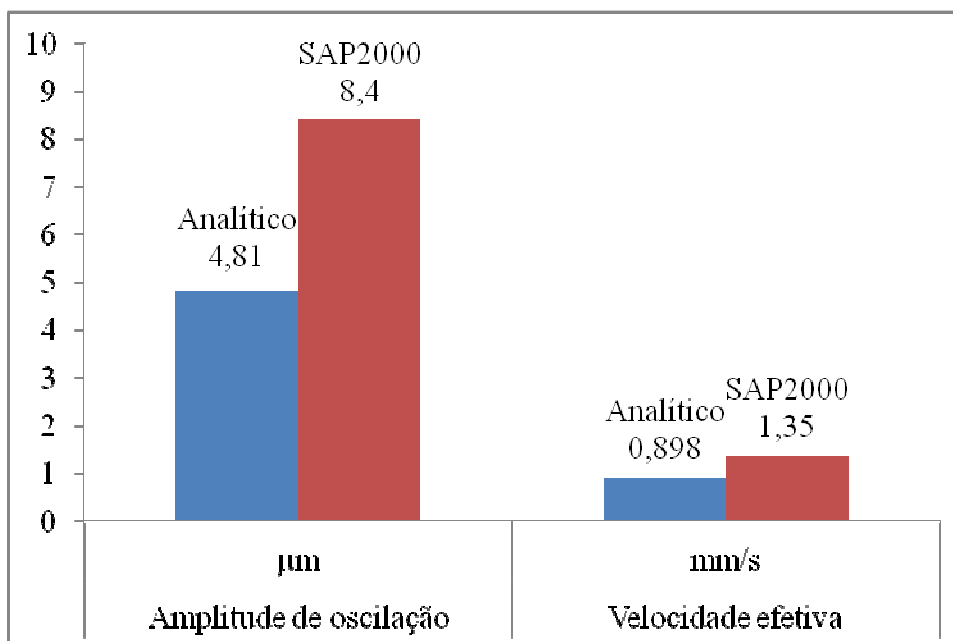


Figura 7.9: Gráfico comparativo dos resultados obtidos no método analítico e no SAP2000.

### 7.3 FUNDAÇÃO PROFUNDA

Neste item é analisada a mesma bomba mostrada no item 7.1, tendo sua base suportada por estacas.

#### 7.3.1 Dados da base de concreto

A espessura do bloco de coroamento é mantida a mesma, igual a  $80\text{ cm}$ , ou seja, ainda maior que o mínimo recomendado pela N-1848 (2011). As estacas contribuem para aumentar a rigidez do sistema. Assim as dimensões e características estabelecidas para a fundação são:

- comprimento da base  $B = 5,104\text{ m}$ ;
- largura da base  $L = 3,252\text{ m}$ ;
- altura da base  $H = 0,80\text{ m}$ ;
- módulo de elasticidade do concreto  $E_c = 30,6725\text{ GPa}$ ;
- coeficiente de Poisson do concreto  $\nu = 0,2$ ;
- peso específico do concreto  $\gamma_c = 25\text{ kN} / \text{m}^3$ .

#### 7.3.2 Dados das estacas

As características das estacas são:

- quantidade de estacas  $N = 4$ ;

- diâmetro das estacas –  $\phi = 30 \text{ cm}$  ;
- comprimento das estacas –  $L_e = 10 \text{ m}$  ;
- Módulo de elasticidade do concreto  $E_c = 30,6725 \text{ GPa}$  ;
- Coeficiente de Poisson do concreto  $\nu = 0,2$  ;
- peso específico do concreto  $\gamma_c = 25 \text{ kN} / \text{m}^3$  .

### 7.3.3 Massa total do sistema

O cálculo da massa total do sistema é efetuado considerando-se as massas da base e da máquina, assim:

$$M_{base} = B \times L \times H \times \rho_c = 33174 \text{ kg}$$

$$M_{total} = M_{máq} + M_{base}$$

$$M_{total} = 40512 \text{ kg}$$

$$\frac{M_{base}}{M_{máq}} = 4,524 \geq 3$$

Essa razão está de acordo para máquinas rotativas.

### 7.3.4 Coeficientes de impedância para uma estaca isolada

O cálculo dos parâmetros para obtenção das constantes de impedância é efetuado por meio das expressões:

$$r_o = \frac{\phi}{2} \qquad r_o = 0,15 \text{ m} \qquad \frac{L_e}{r_o} = 67$$

$$\frac{E_c}{G_s} = 539 \qquad V_s = \sqrt{\frac{G_s}{\rho_s}} \qquad V_s = 178 \text{ m/s}$$

Os parâmetros  $f_{x1}$ ,  $f_{z1}$ ,  $f_{x2}$  e  $f_{z2}$  são:

- rigidez horizontal  $f_{x1} = 0,0416$  ;
- rigidez vertical  $f_{z1} = 0,044$  ;
- amortecimento horizontal  $f_{x2} = 0,1018$  ;
- amortecimento vertical  $f_{z2} = 0,065$  .

As constantes de impedância são dadas por:

$$k_{xi} = \frac{E_c \cdot \pi \cdot r_o \cdot f_{x1}}{4} \qquad k_{xi} = 150.322 \text{ kN} / \text{m}$$

$$\begin{aligned}
 k_{zi} &= E_c \cdot \pi \cdot r_o \cdot f_{z1} & k_{zi} &= 635.979 \text{ kN} / m \\
 C_{xi} &= \frac{E_c \cdot \pi \cdot r_o^2 \cdot f_{x2}}{4 \cdot V_s} & C_{xi} &= 310 \text{ kN} \cdot s / m \\
 C_{zi} &= \frac{E_c \cdot \pi \cdot r_o^2 \cdot f_{z2}}{V_s} & C_{zi} &= 792 \text{ kN} \cdot s / m
 \end{aligned}$$

### 7.3.5 Constantes de impedância para o grupo de estacas

As constantes de impedância para o grupo de estacas são obtidas em função da quantidade de estacas e são dadas por:

$$\begin{aligned}
 k_x &= k_{xi} \cdot N & k_x = k_y &= 601.290 \text{ kN} / m \\
 k_z &= k_{zi} \cdot N & k_z &= 2.543.917 \text{ kN} / m \\
 C_x &= C_{xi} \cdot N & C_x &= 1.241 \text{ kN} \cdot s / m \\
 C_z &= C_{zi} \cdot N & C_z &= 3.170 \text{ kN} \cdot s / m
 \end{aligned}$$

### 7.3.6 Amortecimentos críticos

Os amortecimentos críticos são calculados com o uso direto das fórmulas:

$$\begin{aligned}
 C_{cx} &= 2 \cdot \sqrt{k_x \cdot M_{total}} & C_{cx} &= 9,871 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot s / m \\
 C_{cy} &= 2 \cdot \sqrt{k_y \cdot M_{total}} & C_{cy} &= 9,871 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot s / m \\
 C_{cz} &= 2 \cdot \sqrt{k_z \cdot M_{total}} & C_{cz} &= 2,03 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot s / m
 \end{aligned}$$

### 7.3.7 Fatores de Amortecimentos

Com os valores de amortecimentos calculados obtém se os fatores de amortecimento.

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{C_x}{C_{cx}} & D_x &= 0,126 \\
 D_y &= \frac{C_y}{C_{cy}} & D_y &= 0,126 \\
 D_z &= \frac{C_z}{C_{cz}} & D_z &= 0,156
 \end{aligned}$$

### 7.3.8 Frequências naturais para 1GL

Obtém-se as frequências naturais nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  para que se possa comparar com a frequência de operação da máquina e verificar se há risco de ressonância para o sistema. Os resultados são apresentados na Tabela 7.5 na qual observa-se que a frequência operacional fica contida na faixa de frequência não recomendada pela norma 351-3R-04, na direção vertical, porém considera-se aceita pois esta norma cita que as companhias trabalham com uma faixa de frequência que varia de 67% a 80% a 120% a 133% do valor da frequência operacional, daí a razão de se considerar que atende.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{\frac{k_x}{M_{total}}} & \omega_x &= 121,83 \frac{rad}{s} & f_x &= \frac{\omega_x}{2\pi} & f_x &= 19,39 \text{ Hz} \\ \omega_y &= \sqrt{\frac{k_y}{M_{total}}} & \omega_y &= 121,83 \frac{rad}{s} & f_y &= \frac{\omega_y}{2\pi} & f_y &= 19,39 \text{ Hz} \\ \omega_z &= \sqrt{\frac{k_z}{M_{total}}} & \omega_z &= 250,59 \frac{rad}{s} & f_z &= \frac{\omega_z}{2\pi} & f_z &= 39,88 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$f_{maq} = 29,73 \text{ Hz}$$

Tabela 7.5 – Faixas de frequência com risco de ressonância.

Direção	Frequência Natural Hz $f_n$	N-1848		ACI 351-3R-04		DIN-4024		Atende?
		$0,8 \times f_n$	$1,2 \times f_n$	$0,67 \times f_n$	$1,33 \times f_n$	$0,8 \times f_n$	$1,25 \times f_n$	
X	19,39	15,51	23,27	12,89	25,78	15,51	24,24	Sim
Y	19,39	15,51	23,27	12,89	25,78	15,51	24,24	Sim
Z	39,89	31,91	47,86	26,72	53,04	31,91	49,85	Sim

### 7.3.9 Fator de amplificação dinâmico

O fator de amplificação dinâmico é obtido pelas expressões a seguir e pode ser visualizado no gráfico da Figura 7.6:

$$\beta_z = \frac{f_{maq}}{f_z} \qquad \beta_z = 0,746$$

$$\xi_z = D_z$$

$$D_1(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot \xi_z \cdot \beta)^2}}$$

$$D_l(\beta_z) = 1,994$$

$$D_{zz} = D_l(\beta_z)$$

$$D_{zz} = 1,994 \text{ vide Figura 7.9}$$

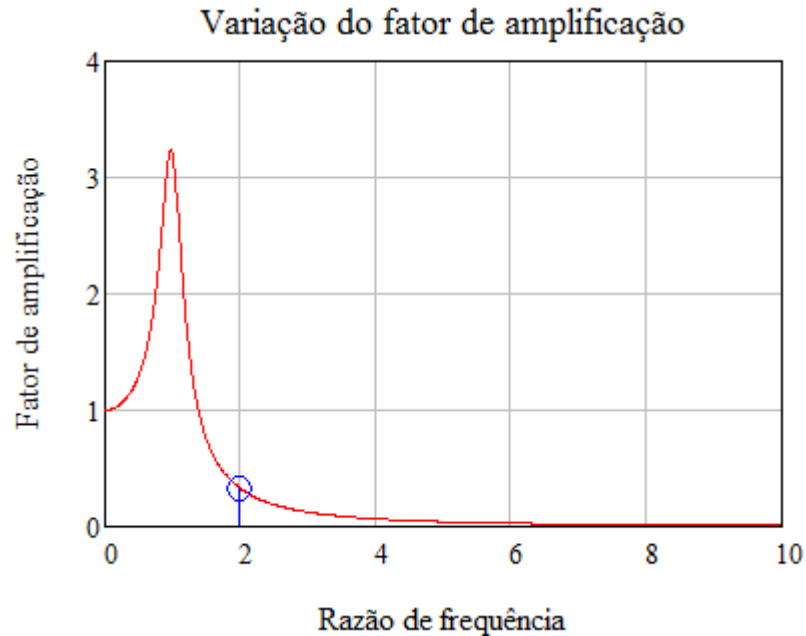


Figura 7.10: Variação do fator de amplificação.

### 7.3.10 Amplitude máxima dinâmica

A amplitude máxima dinâmica é calculada pela expressão:

$$U_{din z} = D_{zz} \frac{F_o}{k_z} \qquad U_{din z} = 7,05 \mu m$$

$$U_{din z} \leq 30 \mu m$$

Nesse caso atende à DIN-4024 (1991), à N-1848 (2011) e à ACI-351 (2004).

### 7.3.11 Máxima velocidade efetiva

Com o valor da amplitude máxima dinâmica calculada no item anterior obtém-se a máxima velocidade e a velocidade efetiva:

$$V_{max z} = (2\pi \cdot f_{maq}) U_{din z} \qquad V_{max z} = 1,32 \text{ mm / s}$$

$$V_{ef z} = \frac{(2\pi \cdot f_{maq}) U_{din z}}{\sqrt{2}} \qquad V_{ef z} = 0,931 \text{ mm / s}$$

$$V_{efz} \leq 4,5 \text{ mm/s}$$

Nesse caso a N-1848(2011) é atendida, cujo valor máximo permissível para a classe III, faixa de severidade A é  $1,8 \text{ mm/s}$  ou faixa de severidade B que é  $4,5 \text{ mm/s}$ .

#### 7.4 SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM USO DO SAP2000

Neste item são mostrados os resultados obtidos utilizando o programa de computador SAP2000. A Figura 7.10 mostra o bloco de fundação do conjunto motor bomba, com as 4 estacas, mantendo-se as mesmas dimensões adotadas na solução analítica, do item 7.3.

O motor e a bomba estão representados por suas respectivas massas. As estacas estão apoiadas lateralmente no solo por molas horizontais nas direções  $X$  e  $Y$  a cada 50cm e verticalmente na ponta inferior, com seus respectivos coeficientes de rigidez.

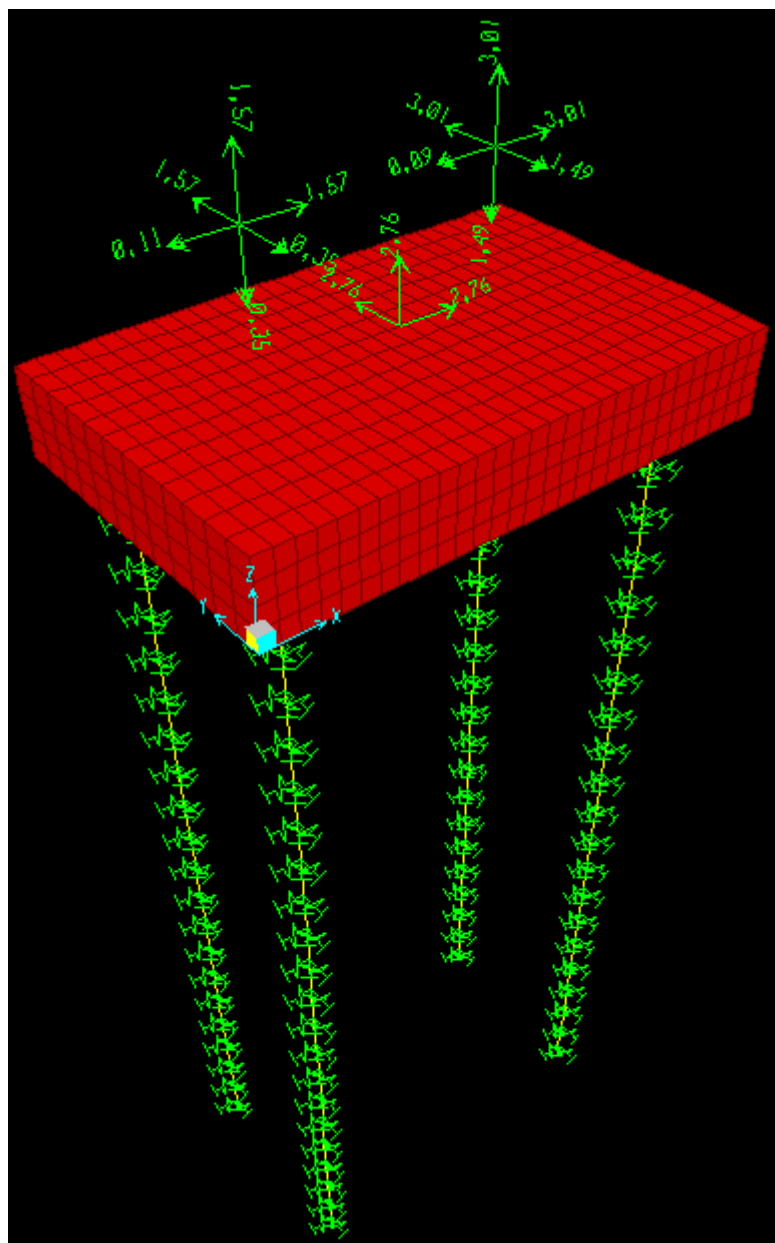


Figura 7.11: Modelo adotado para o bloco de fundação, motor, bomba e estacas.

Na Tabela 7.6 são mostrados os valores de frequência obtidos para os vinte modos de vibração definidos e calculados no SAP2000.

Tabela 7.6: Modo, período e frequência do sistema fundação e máquina.

Modo	Período	Frequência	Frequência circular	Frequência circular
	s	Hz	rad/s	(rad/s) <sup>2</sup>
1	0,46882	2,133	13,402	179,62
2	0,468112	2,1362	13,422	180,16
3	0,336813	2,969	18,655	348
4	0,052737	18,962	119,14	14195
5	0,050715	19,718	123,89	15349
6	0,040538	24,668	155	24024
7	0,028493	35,097	220,52	48629
8	0,028492	35,097	220,52	48630
9	0,028492	35,098	220,53	48631
10	0,028492	35,098	220,53	48632
11	0,028492	35,098	220,53	48632
12	0,028446	35,154	220,88	48787
13	0,02844	35,161	220,92	48808
14	0,028424	35,181	221,05	48862
15	0,019849	50,382	316,56	100210
16	0,019848	50,382	316,56	100210
17	0,019848	50,383	316,56	100210
18	0,019848	50,383	316,56	100210
19	0,019848	50,383	316,57	100210
20	0,019835	50,416	316,77	100340

A Figura 7.12 mostra o gráfico de amplitudes de oscilação calculado pelo SAP2000. Os pontos são escolhidos no modelo da fundação, de modo a se obter os deslocamentos máximos e mínimos. Observa-se à direita do gráfico que os valores máximos de deslocamento em m podem ser visualizados nessa tela junto com a legenda de cores indicativas das curvas, sendo que cada curva representa um ponto escolhido no modelo. A direção estudada nesse exemplo é a vertical, ou eixo  $Z$ , porém, o programa fornece resultados para os eixos das direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .



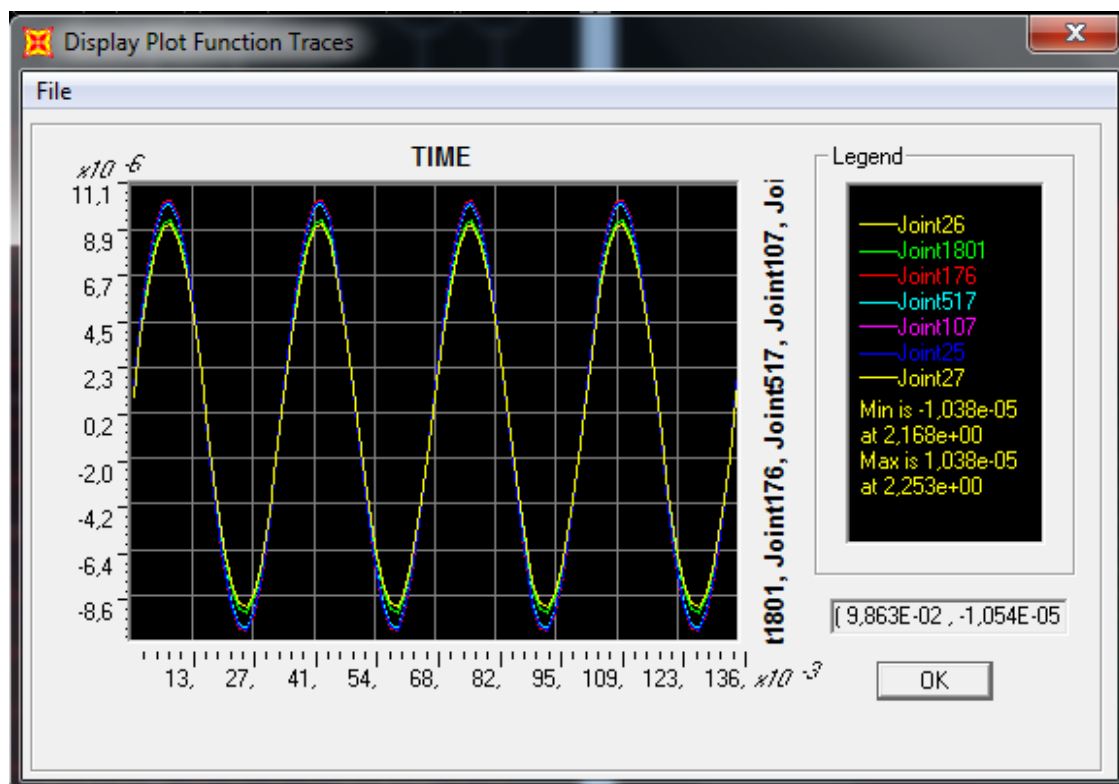


Figura 7.12: Gráfico do SAP2000 que mostra amplitudes de oscilação.

O gráfico apresentado na Figura 7.13 mostra a velocidade efetiva em m/s, vibração da fundação, dos mesmos pontos escolhidos e mostrados na figura anterior. Aqui também a direção estudada é a do eixo  $Z$ .

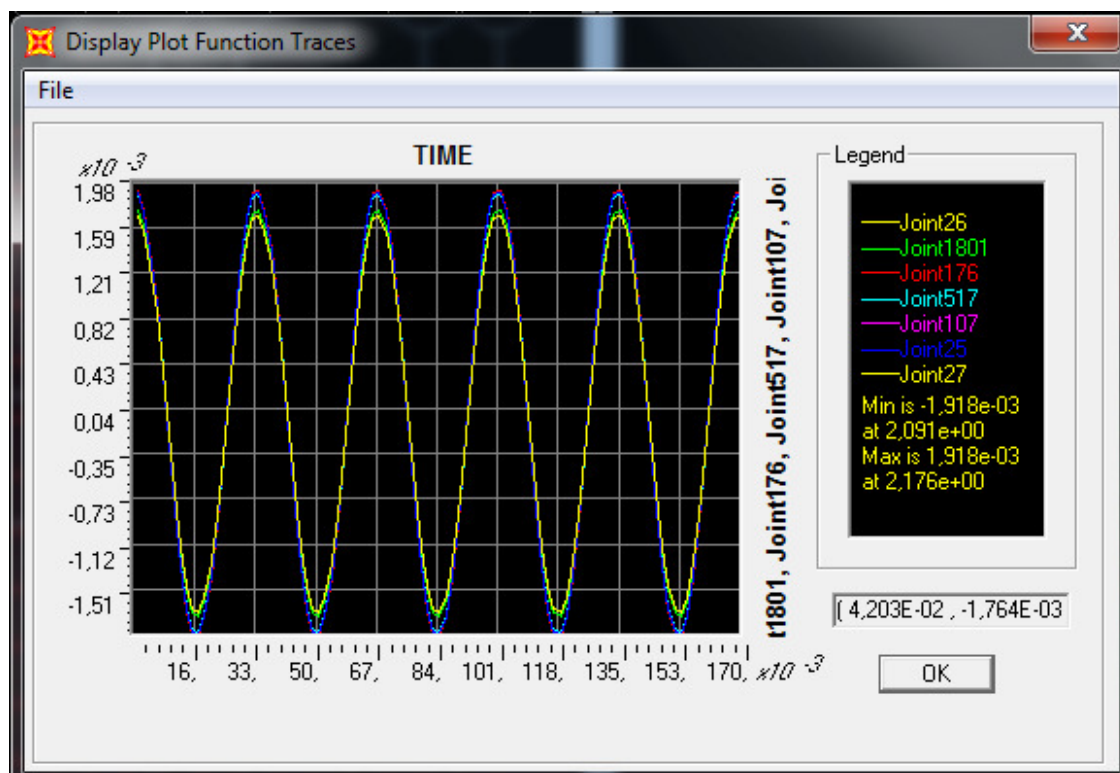


Figura 7.13: Gráfico do SAP2000 que mostra a velocidade efetiva.

Comparando-se os resultados obtidos pelo método analítico utilizando-se a N-1848 da Petrobras, com os resultados obtidos por meio do SAP 2000 tem-se os resultados mostrados na Tabela 7.7.

Tabela 7.7: Resultados comparativos entre solução analítica e SAP2000

Procedimento	Amplitude de oscilação $\mu\text{m}$	Velocidade efetiva $\text{mm/s}$
Analítico	7,05	1,32
SAP2000	10,38	1,92
Variação (%)	47,23	45,45

Observa-se aqui também que os resultados obtidos tem diferenças de  $3,35 \mu\text{mm}$  na amplitude de oscilação e  $0,60 \text{ mm/s}$  na velocidade de deslocamento. Em ambos os casos o procedimento analítico apresentou resultados menores que os resultados do SAP2000. Os valores encontrados tanto pelo procedimento analítico quanto pelo SAP2000 atendem às normas que nesse caso é de  $30 \mu\text{m}$ , e a velocidade de deslocamento (vibração) encontrada tanto pela solução analítica quanto por meio do SAP2000 estão abaixo do limite aceitável pela

N-1848, faixa de severidade B, que é de  $4,5 \text{ mm/s}$ . Esse caso mostra que para situações mais complexas deve-se sempre que possível recorrer a soluções mais elaboradas, pois os resultados apresentados pelo procedimento do método dos elementos finitos se distanciaram sensivelmente do procedimento analítico. Na Figura 7.14 comparam-se de forma gráfica os resultados obtidos no cálculo analítico usando-se a N-1848 e por meio do método dos elementos finitos usando-se o SAP2000.

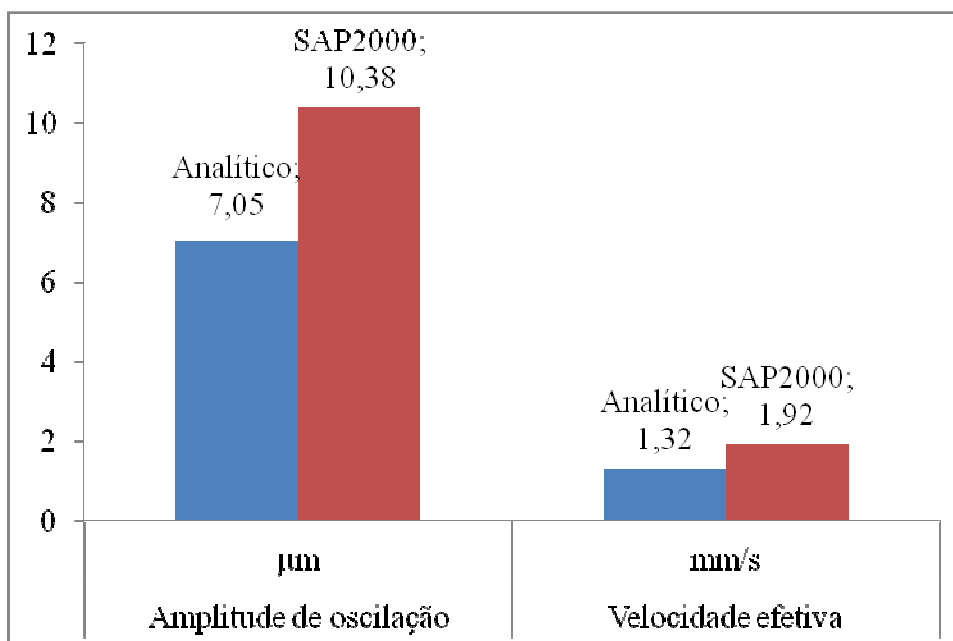


Figura 7.14: Gráfico comparativo dos resultados obtidos no método analítico e no SAP2000

## 8 CONCLUSÕES

A N-1848 - Revisão C, de dezembro de 2011, é muito similar à ACI 351.3R-04 (2004), pois grande parte das expressões e conceitos contidos na N-1848 foram adaptados desse documento, conforme mostrado no capítulo 6, nas diversas tabelas comparativas das normas analisadas neste estudo, sendo que a ACI cita as referências e a N-1848 não.

Observa-se nas diversas tabelas comparativas da N-1848 que essa norma é bastante abrangente e explicativa, rica em fórmulas que devem ser usadas e exploradas nos projetos de fundações de máquinas rotativas e alternativas, superando o nível de detalhamento existente na DIN-4024.

A Tabela 6.36 mostra que a N-1848 limita a carga estática em cada estaca em 50% de sua capacidade admissível, sem apresentar razões claras para esta recomendação, que também está contida em ARYA (1984).

A N-1848 ao tratar das rigidezas e constantes de amortecimento para grupos de estacas apresenta hipóteses simplificadoras desprezando-se a interação entre estacas (efeito de grupo). O ACI 351.3R-04 mostra que o efeito da interação das estacas pode reduzir ou aumentar as rigidezas e amortecimentos do grupo de estacas.

Na Tabela 6.32 – Amplitude de oscilação pela teoria elástica do semiespaço, mostra que a expressão referente à amplitude de oscilação vertical teve seu sinal alterado na parcela do denominador. Na versão de 2008 o denominador constava dentro dos colchetes sinal negativo na expressão:

$$A_z = \frac{F_z}{k_z \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right]^2 + \left( 2D_z \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Na versão de 2011 esta expressão está alterada, mostrando-se diferente do que contém o ACI 351.3R-04 e diferente do que está contido na literatura. A expressão da N-1848 de 2011 é:

$$A_z = \frac{F_z}{k_z \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right]^2 + \left( 2D_z \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

A N-1848 não trata de sistemas de isolamento de vibrações conforme citado no item 6.3 desse estudo o que pode limitar os projetistas nos casos de fundações de maior complexidade que haja transmissão de vibrações para outras fundações ou estruturas.

Os exemplos desenvolvidos no capítulo 7 mostram que a N-1848 atende às necessidades de projeto e análise dinâmica das fundações de máquinas rotativas e alternativas. A Petrobras vem utilizando e exigindo de seus fornecedores o cumprimento da referida norma.

No estudo de caso observa-se que para fundações diretas a solução pelo método dos elementos finitos por meio do SAP2000 apresentou resultados 75% maiores, e para fundação sobre estacas os resultados foram 47% maiores que os resultados obtidos pela solução analítica usando-se a N-1848. A configuração da fundação usando-se 4 estacas, e comprimento da base igual a 5,1m caracterizou esta fundação como uma laje sobre estacas, porém manteve-se dessa forma por ter passado pelas exigências de cálculo e economia.

O estudo de caso mostrou que a norma é aplicável e bom norteador para os engenheiros projetistas de fundações de máquinas estacionárias, rotativas e alternativas, geradoras de cargas dinâmicas.

## **9 SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

- Com base na N-1848 sugere-se a concepção de uma norma pela ABNT para fundações de máquinas, visto que a norma da Petrobrás tem aplicação restrita a essa empresa e que tem se mostrado adequada às condições de projeto de fundações de máquinas.
- Sugere-se elaborar estudos de pesquisa no campo, para verificação e análise de projetos e construções de fundações de máquinas e seus resultados com o uso da N-1848.
- Sugere-se corrigir a expressão de amplitude de oscilação vertical apresentada no item 6.13.1.2 da N-1848.
- Sugere-se incluir em futuras revisões da N-1848 o efeito da interação entre estacas tendo em vista que os valores das rigidezas e amortecimentos de um grupo de estacas podem ser reduzidos ou aumentados.
- Sugere-se incluir em futuras revisões da N-1848 texto sobre o uso de sistemas de isolamento de vibrações para que fundações onde a transmissão de vibrações precisem ser tratadas possam ser abrangidos por essa norma.
- Sugere-se ao projetar fundações complexas e especialmente para sistemas flexíveis com vários graus de liberdade o uso de programas computacionais como ferramentas práticas e eficientes na avaliação dinâmica da fundação. Essa é uma recomendação também contida no ACI 351.3R-04 pelo motivo de facilitar os cálculos e representação do modelo estrutural da fundação.
- Sugere-se o uso de outros programas computacionais, tais como o ANSYS, o GTSTRUDL e o SACS, com o intuito de comparar os resultados obtidos por meio destes recursos com os resultados analíticos obtidos por meio do uso da norma.
- Sugere-se avaliar as diferenças encontradas nos resultados entre o método dos elementos finitos e a solução analítica da literatura, alterando-se o tipo de elemento usado na modelagem, mola e amortecedor.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI) – ACI 351.3R–04 – **Foundations for Dynamic Equipment**:. USA, 2004.

AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE (API) – API610-11<sup>th</sup> Edition – Centrifugal Pumps for Petroleum, Petrochemical and Natural Gas Industries:. USA, 2010.

ARYA, S. C.; O'NEILL, M. W.; PINCUS, G. Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines, Theory and Practical Design. Applications for Dynamically Loaded Structures. Houston, Texas, USA, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) – NBR 6122 – **Projeto e Execução de Fundações**. Rio de Janeiro, Brasil, 1996.

— NBR 6123 – **Forças Devido ao Vento em Edificações**, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.

— NBR 6484 – **Sondagem de Simples Reconhecimento com SPT** – Método de Ensaio. Rio de Janeiro, Brasil, 2001.

— NBR 10082 – **Vibração Mecânica de Máquinas com Velocidade de Operação de (600 a 12000) rpm – Bases para Especificação e Padrões de Avaliação**. Rio de Janeiro, Brasil, 1987.

— NBR 13208 – **Estacas – Ensaio de Carregamento Dinâmico** – Método de Ensaio. Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

— NBR 15421 – **Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos – Procedimento**. Rio de Janeiro, Brasil, 2006.

BARKAN, D. D. **Dynamics of Bases and Foundation**, McGraw-Hill Book Co. Inc. New York, USA, 1962.

BATHIA, K. G. **Foundation for Industrial Machines**, In: Handbook for Practising Engineers. New Delhi, India, 2008.

DIN 4024, Part 1 – **Machine Foundations – Rigid Foundations for Machinery Subjected to Periodic Vibration**, Berlin, German, 1988.

DIN 4024, Part 2 – **Machine Foundations – Rigid Foundations for Machinery Subjected to Periodic Vibration**, Berlin, German, 1991.

GAZETAS, G. **Analyses of Machine Foundation Vibrations: State of the Art**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Vol. 2, No. 1, New York, USA. 1983.

HARTOG, J. P. D. **Mechanical Vibrations**. New York, USA, 1985.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION – ISO 1940 –1 – **Mechanical Vibration – Balance Quality Requirements for Rotors in a Constant (Rigid) State – Part 1: Specification and Verification of Balance Tolerances**. USA, 2004.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION – ISO 10816 –1 – **Mechanical Vibration – Evaluation of Machine Vibration by Measurements on Non-rotating Parts – part 1: General guidelines**, Genève, Switzerland, 1995.

MACHADO, F. G. **Estudo do Comportamento de Fundações Submetidas a Vibrações de Máquinas**. Dissertação de M. Sc. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.

MILET, R. R. **Análise Comparativa de Métodos de Cálculo para Fundações de Máquinas**. Dissertação de M. Sc. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco, Brasil, 2006.

NETO, E. S. A. **Introdução à Análise Dinâmica de Fundações de Máquinas**. Dissertação de M. Sc. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil, 1989.

PETROBRAS – PETRÓLEO BRASILEIRO S.A. – N-1848 – REV. C – **Projeto de Fundações de Máquinas**. Rio de Janeiro, Brasil, 2011.

PRAKASH, S. **Soil Dynamics**, New York, USA, 1981.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H., **Pile Foundation Analysis and Design**, New York, USA, 1980.

RICHART Jr., F. E.; WOODS, R. D.; HALL, Jr., J.R. **Vibrations of Soils and Foundations**, New Jersey, USA, 1970.

SAMPAIO, R. P. C. **Notas de Aulas**. Escola Náutica Infante D. Henrique, Paço de Arcos, Portugal, 2008.

SANTOS, S. H. C.; Lima, S. S. **Estimativa do Impacto no Projeto de Edificações da Proposta de Norma Brasileira de Sismos**. Rio de Janeiro, Brasil, 2006.

SANTOS, S. H. C. **Fundações de Máquinas**. Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

SRINIVASULU, P.; VAIDYANATHAN, C. V. **Handbook of Machine Foundations**. New Delhi, Índia, 1980.